МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1. Пусть q - множитель прогрессии, тогда $b = aq$, $c = aq^2$, $q \neq 0$.

2. $ax^2 - 2bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = a^2q^2 - a \cdot aq^2 = 0$, значит уравнение имеет только один корень

$x = \frac{b}{a} = q$

3. Также известно, что x - 4 член прогрессии, значит $x = aq^3$

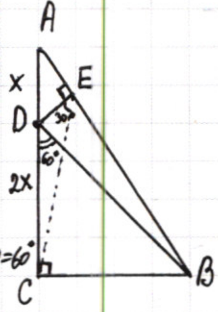
4. $aq^3 = q \quad | \cdot \frac{1}{q} \neq 0$

$aq^2 = 1$

$c = 1$

Ответ: 1

№4



0. $AD = x$, значит $AC = 3x$ и $CD = 2x$

1. Из $BCDE$:

$\angle C + \angle E = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит $DEBC$ - вписанный в окружность, зн $\angle CDB = \angle CEB = 90 - 30 = 60^\circ$ (по св-ву опис окр)

2. Из $\triangle CBD$:

$\angle C = 90^\circ$, $\angle CDB = 60^\circ$, зн $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}$, зн $BD = 2CD = 4x$ (по св-ву пр. $\triangle$)

3. $\left.\begin{array}{l} \angle CBD = 60^\circ \\ \angle CBD + \angle ADB = 180^\circ \text{ (как смежные)} \end{array}\right| \Rightarrow \angle ADB = 120^\circ$

4. По т. Косинусов из $\triangle ABD$:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,AD \cdot BD \cos\angle ADB = x^2 + (4x)^2 - 2 \cdot x \cdot 4x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = x^2 + 16x^2 + 4x^2 = 21x^2$

$AB = \sqrt{21}\,x$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

5 $\cos\angle BAC = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3x}{\sqrt{21}\,x} = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$

$tg^2\angle BAC = \dfrac{1}{\cos^2\angle BAC} - 1 = \dfrac{21}{9} - 1 = \dfrac{12}{9}.$

$tg\angle BAC = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

б) 1. $\cos\angle BAC = \cos\angle DAE = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$

$\sin\angle DAE = \sqrt{1-\cos^2\angle DAE} = \sqrt{1-\dfrac{9}{21}} = \sqrt{\dfrac{12}{21}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ | $\Rightarrow DE = \dfrac{2}{3}$

$\sin\angle DAE = \dfrac{DE}{AD}$, $AD = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ | $\Rightarrow \sin\angle DAE = \dfrac{3DE}{\sqrt{7}}$

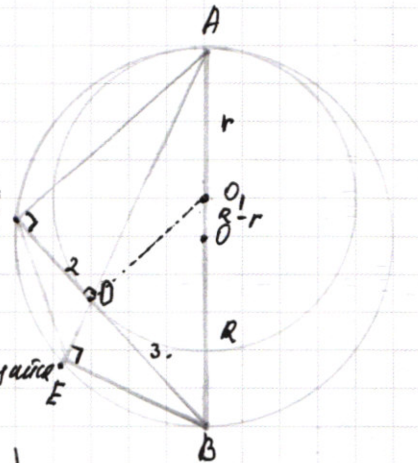
2. $\angle CDE = 180 - \angle ADE = 180 - (90 - \angle DAE) = 90 + \angle DAE$

3. $\sin\angle CDE = \sin(\angle DAE + 90) = \cos\angle DAE = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$

4. $S_{\triangle CED} = \dfrac{CD\cdot DE\cdot \sin\angle CDE}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{21}}}{2} = \dfrac{4\cdot 3\cdot\sqrt{7}}{2\cdot 9\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ б) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

№6



1. O − центр Ω, O_1 − центр ω, $r = O_1A$, $R = AO = OB$

2. O_1D − радиус, BD − касательная | $\Rightarrow O_1D \perp BD$, зк $\triangle O_1BD$ − прямоуг,

$\angle O_1DB = 90°$.

3. $\angle ACB = 90°$ (как вписанный, опирающийся на диаметр)

4. $\angle B$ − общий, $\angle ACB = 90°$, $\angle O_1DB = 90°$ | $\Rightarrow \triangle O_1DB \sim \triangle ACB$ (по двум углам),

зк $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{O_1B}{AB} = \dfrac{AB - AO_1}{2R} = \dfrac{2R - r}{2R}$ | $\Rightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{2R-r}{2R}.$

$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{3}{5}$

$6R = 10R - 5r.$

$1{,}25r = R$

5. По т Пифагора из $\triangle O_1DB$:

$O_1D^2 + BD^2 = BO_1^2$

$r^2 + 9 = (2R - r)^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

$r^2 + 9 = (2 \cdot 1{,}25r - r)^2 = (1{,}5r)^2$

$r^2 + 9 = 2{,}25r^2$

$1{,}25r^2 = 9.$

$5r^2 = 36$

$r = \frac{6\sqrt{5}}{5} = 1{,}2\sqrt{5}$

$R = \frac{5}{4} \cdot r = 1{,}5\sqrt{5}$

6. ~~$\angle AEB = 90°$ (как вписанный, опир. на диаметр) ⇒ $\angle ACB = 90°$ $\angle EDB = \angle CDA$ (как вертикальные)~~

$\frac{O_1D}{AC} = \frac{3}{5}$ (из подобия $\triangle O_1DB$ и $\triangle ACB$), з-к $AC = \frac{5O_1D}{3} = \frac{5}{3} \cdot 1{,}2\sqrt{5} =$

$= 2\sqrt{5}$

7. $DC \cdot BD = ED \cdot AD$

$6 = ED \cdot AD$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow ED = \frac{\sqrt{6}}{2}$

8. По т Пифагора из $\triangle BED$: $EB = \sqrt{9 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

9. $\angle CAE = \angle CBE$, з-к $\sin\angle CAE = \sin\angle CBE = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

10. $S_{ABEC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CBE} = \frac{AC \cdot BC}{2} + \frac{1}{2} BC \cdot EB \cdot \sin\angle CBE = 5\sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} =$

$= 5\sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot 5\sqrt{5} = 6{,}25\sqrt{5}$

Ответ: $1{,}2\sqrt{5}$; $1{,}5\sqrt{5}$; $6{,}25\sqrt{5}$

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2-12x+36-36+2y^2-4y+2-2+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$ $y-1=b$, тогда

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \cancel{\Rightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ ab\geq 0 \end{cases}}$$

Если $a=0$, то р.н

Если $b=0$, то р.н.

$$\cancel{\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \;\Big|\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}\neq 0\ (1) \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}}$$

~~(1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-6\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=1$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=t$ $\Rightarrow t-\frac{6}{t}=1$, $\begin{cases} t^2-t-6=0 \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \end{array}\right. \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=3 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-2 \end{array}\right. \Rightarrow a=9b$~~

~~$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ 83b^2=18 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ b=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases} \end{array}\right.$~~

~~Выполнив обратную замену получим $\left(6+\frac{27\sqrt{166}}{83};\ 1+\frac{3\sqrt{166}}{83}\right)$; $\left(6-\frac{27\sqrt{166}}{83};\ 1-\frac{3\sqrt{166}}{83}\right)$~~

~~Ответ: $\left(6+\frac{27\sqrt{166}}{83};\ 1+\frac{3\sqrt{166}}{83}\right)$ $\left(6-\frac{27\sqrt{166}}{83};\ 1-\frac{3\sqrt{166}}{83}\right)$.~~

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \;\Big|\cdot\frac{1}{ab}\ (1) \\ a^2+2b^2=18 \\ ab\geq 0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(1) $\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}=13$, $\frac{a}{b}=t$ $\Rightarrow t+\frac{36}{t}-13=0.$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=9 \end{array}\right. \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=4 \\ \frac{a}{b}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ ab\geq 0 \\ a^2+2b^2=18 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ продолжение на следующей странице

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3 (продолжение)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4b \\ 16b^2 + 2b^2 = 18 \\ a - 6b \geqslant 0 \\ ab \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 9b \\ 83b^2 = 18 \\ a - 6b \geqslant 0 \\ ab \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ a - 6b \geqslant 0 \\ ab \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 6b \geqslant 0 \\ ab \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} \\ a = \frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} \\ a = -\frac{27\sqrt2}{83} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = \frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} \\ a = \frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;0)$; $\left(6 + \frac{3\sqrt{166}}{83};\ 1 + \frac{27\sqrt{166}}{83}\right)$

N 7.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ выполнялось, должно выполнятся $f(y) > f(x)$

Если $x = 22$, то $f(22) = f(11) + f(2) = [5,5] + [1] = 6$.

Если $x = 21$, то $f(21) = f(7) + f(3) = 3 + 1 = 4$

Если $x = 20$, то $f(20) = f(2) + f(2) + f(5) = 4$

Если $x = 19$, то $f(19) = 9$

Если $x = 18$, то $f(18) = f(3) + f(3) + f(2) = 3$.

~~Если~~ Аналогично для $17 \to 8$, $16 \to 4$, $15 \to 3$, $14 \to 4$, $13 \to 6$, $12 \to 3$, $11 \to 5$, $10 \to 3$, $9 \to 2$, $8 \to 3$, $7 \to 3$, $6 \to 2$, $5 \to 2$, $4 \to 2$, $3 \to 1$, $2 \to 1$

Если $x = 2$ или $x = 3$, то $y \in [4; 22] \Rightarrow 19$ реш $\cdot 2 = 38$.

Если $x = 9, 6, 5, 4$, то $y = 7, 8 \vee y \in [10; 22] \Rightarrow 15 \cdot 4 = 60$

Если $x = 7, 8, 10, 12, 15, 18$, то $y = 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22 \Rightarrow 9 \cdot 6 = 54$

Если $x = 14, 16, 20, 21$, то $y = 11, 13, 17, 19, 22 \Rightarrow 5 \cdot 4 = 20$

Если $x = 11$, то $y = 13, 17, 19, 22 \Rightarrow 4 \cdot 1 = 4$

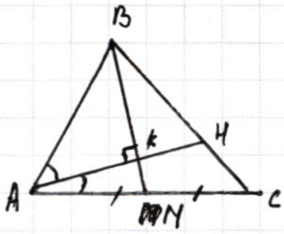
Если $x = 13$ или 22, то $y = 17, 19 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$

Если $x = 17$, $y = 19 \Rightarrow 1$.

Всего решений $f(y) > f(x)$: $38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 181$

Ответ: 181 пара.

N 2



1 AK − выс $\triangle ABM$
AK − бис-са $\triangle ABM$ $\Big| \Rightarrow$ $\triangle ABM$ − р/б с осн $[BM]$ (по признаку),

зн $AB = AM = MC$ (по опр р/б $\triangle$ и мед)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

2. $AB = c$
$BC = a$
$AC = b$.

3. $\begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = 900 \\ a+b > c \\ a+c > b \\ b+c > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = 900 \\ a < 450 \\ b < 450 \\ c < 450 \\ a > c \\ 3c > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = 900 \\ a < 450 \\ b < 450 \\ c < 225 \\ a > c \\ 3c > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 900 \\ b < 450 \\ c < 225 \\ b = 2c \\ a > 225 \\ 3c > a \end{cases}$

~~$\begin{cases} 3c + a = 900 \\ 3c > a \end{cases} \Leftrightarrow c < 300$~~

$225 + \Delta a = 3(225 - \Delta c)$

$\Delta a = \Delta b + \Delta c = 2\Delta c$

$225 + 3\Delta c = 3 \cdot 225 - 3\Delta c$.

$6\Delta c = 450$
$\Delta c = 75$

Значит $c \in (150; 225)$
$b \in (300; 450)$
$a \in (225; 450)$

Так как $a, b, c \in \mathbb{Z}$, то вариантов $225 - 150 - 1 = 74$

Ответ: 74 варианта.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$(x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}$~~

~~$a-6b=\sqrt{ab}$.~~

~~$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{6\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=1$~~ $-4-1$

$-4-6(-1)=$

16.

30.

~~$t-\frac{6}{t}=1$.~~

~~$t^2-6=t$.~~

6

~~$t^2-t-6=0$.~~ $-\frac{6}{16}=\frac{7}{8}$.

~~$(t-3)(t+2)=0$.~~

~~$t=3$~~

~~$t=-2$~~

~~$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=3$~~

~~$\sqrt{a}=3\sqrt{b}$~~

$a=9b$.

$a^2-12ab+36b^2=ab$.

$a^2+36b^2=13ab$, $ab\geq 0$, $a>6b$.

$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}=13$.

$t+\frac{36}{t}=13$.

$t^2-13t+36$

$(t-4)(t-9)$.

$\frac{a}{b}=4$.

$\frac{a}{b}=9$.

17		11	
16	2 222	10	5 2
15	3 5	9	3 3
14	2 7	8	2 2 2
13	9	7	
12	2 2 3	6	3 2
		5	
		4	2 2
		3	
		2	

$c\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$.

$\frac{9}{16}+\frac{9}{4}+7-\frac{9}{32}$.

22 6

19 9

17 8

13 6

11 5

22 6

21 9

20 9

19 9

18 3

17 8

16 4

15 3

14 4

13 6

12 3

11 5

10 3

9 2

8 3

7 3

6 2

5 2

4 2

$127+54=181$

29 +

98 +

54

$x<0{,}5$

$20x-6$

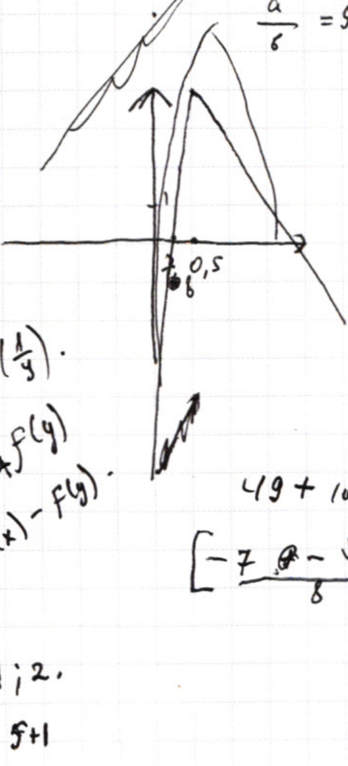
$\begin{cases}-0{,}5\leq x<0{,}5 \\ 20x-6\end{cases}$ 1

$\begin{cases}a\geq x\geq 0{,}5 \\ -4x+6\end{cases}$ 2

$8x-6|2x-1|\leq -8x^2+6x+7$.

$20x-6\leq -8x^2+6x+7$.

$8x^2+14x-13\leq 0$.



2 $\quad -4x+6\leq 8x^2+6x+7$.

$8x^2+10x+1\geq 0$.

~~$100-32=68$.~~

$25-8$.

17.

f $\quad a,b>0$.

$f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$

$f(a\cdot b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$.

$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

$49+104=153$.

$\left[\frac{-7-\sqrt{153}}{8};\frac{-7+\sqrt{153}}{8}\right]$

$\left(-\infty;\frac{-5-\sqrt{17}}{8}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{17}}{8};\ \right.$ <0

$[0{,}5;1]$

22 $\quad$ 11; 2.

f+1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b = aq$, где q - множитель прогрессии

$c = aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac$

$\begin{cases} x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2-ac}}{a} \\ x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2-ac}}{a} \end{cases}$

Если x_2 - 4 член прогрессии, то $aq^3 = \frac{b - \sqrt{b^2-ac}}{a} = aq - \sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}$

$(x-6) + 6 - 6y =$

$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 - 2\frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$

$x = q$

$a+b+c = 900$

$a+b < c$

$a+b+c < 2c$

$900 < 2c$

$450 < c$

$a = \frac{b}{2}$

$b = 2a$

$3a + c = 900$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 9$

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

$2c = b$

$3c + a = 900$

$3c > a > c$

$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$16x^2 + x^2 +$

$\frac{a}{\sqrt{ab}} - \frac{6b}{\sqrt{ab}} = 1$

$c < 450$, $a < 225$, $b < 450$

$480 + 18 = 496$

$\frac{27}{19}$, 243, 27, 513

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin\angle = \frac{r}{2R-r} = \frac{1{,}2}{1{,}8} = \frac{2}{3}.$

$6{,}25\cdot5+4 = 35{,}25.$

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{BD}.$

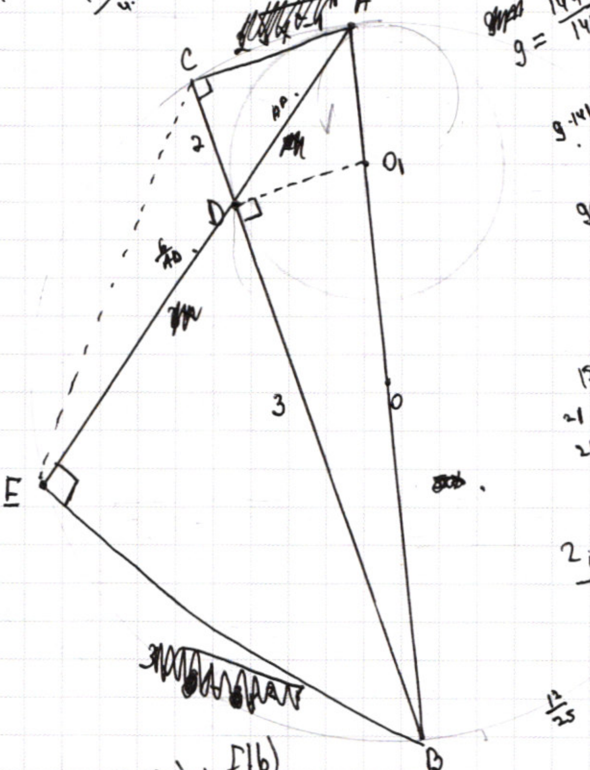
$CD\cdot BD = AD\cdot DE = 6.$

$\frac{12}{\sqrt{141}}$

$9 = \frac{144}{141} + EB^2.$

$DE = \frac{6}{AD}.$

$\frac{141}{4}$



$9\cdot141-144$

$AC = \sqrt{AD^2-4}.$

$BE = \sqrt{9-\frac{36}{AD^2}}$

$900+369-144.$

$900+225$

$1125.$

$25 + AD^2 - 4 = 9 - \frac{36}{AD^2} + \left(AD + \frac{6}{AD}\right)^2$

$21 + AD^2 = 9 - \frac{36}{AD^2} + \frac{(AD^2+6)^2}{AD^2}.$

$\frac{2{,}5\sqrt5}{EB} = \frac{2}{3}.$

$21 + x = 9 - \frac{36}{x} + \frac{x^2+12x+36}{x}.$

$\frac{6{,}5\sqrt5}{2}.$

$12 + x = \frac{x^2+12x}{x}.$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$\frac{D-r}{D} = \frac{3}{5}.$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{5}.$

$5D - 5r = 3D.$

$10R - 5r = 6R.$

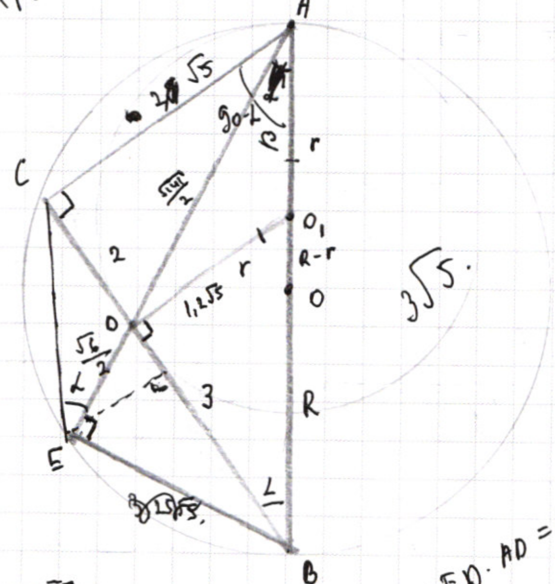
$2D = 5r.$

$4R = 5r.$

$0{,}8R = r$

$5r = 4R.$

$\frac{r}{R} = \frac{4}{5}.$



$6{,}25\cdot5$

$31{,}25+4 = 35{,}25.$

$4r = 5R.$

$9 + r^2 = (2R-r)^2$

$9+r^2 = 0{,}8r^2.$

$R = 1{,}25r.$

$9 + \cancel{r^2} = 4R^2 + 4Rr + \cancel{r^2}$

$4R^2 + 4Rr - 9 = 0.$

$2{,}25r^2 = r^2 + 9.$

$4+20$

$4Rr = 9 - 4R^2.$

$1{,}25r^2 = 9.$

$r = \frac{9}{4R} - R.$

$r^2 = \frac{36}{5}.$

$r = \frac{6}{\sqrt5}.$

$9 - \frac{6}{4}$

$ED\cdot AD = 6.$

$\frac{30}{4} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$

$AC = 2{,}5\sqrt5$

$AB = 3\sqrt5.$

$BC = 5.$

$\sin\angle = \frac{2}{3}.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)