МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) a, b, c, d - геом прогрессия $\Rightarrow$

$\Rightarrow b = aq, \quad c = aq^2, \quad d = aq^3$

$F(x) = ax^2 + 2bx + c$

$F(d) = 0 \Rightarrow ad^2 + 2bd + c = 0$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

Замена $aq^2 = t$.

$t^3 + 2t^2 + t = 0$

$t(t^2 + 2t + 1) = 0$

$t = 0 \qquad t^2 + 2t + 1 = 0$

$D = 0 \Rightarrow t = -1$

Заметим, что $t = aq^2 = c$

$c = 0$ или $c = -1$

~~Ответ: 0, -1~~ Член геом прогрессии не может $= 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: -1.

~~№2~~

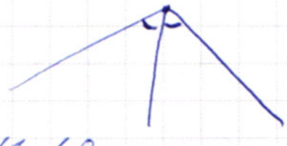
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1.

(Нумеровать только чистовики)

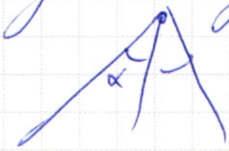
2). Заметим, что биссектриса, выходящая из вершины, не может быть перпендикулярна медиане, выходящей из этой же вершины.
Т.к.



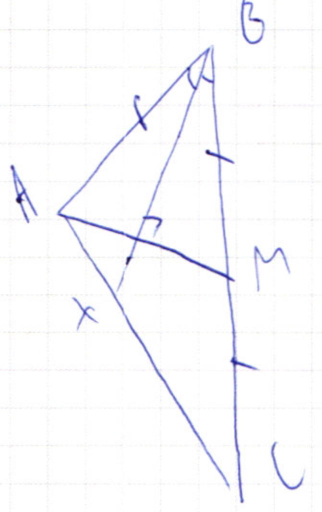
биссектриса - ось симметрии угла => она лежит внутри угла.

Противолежащая углу сторона лежит внутри него, а медиана ~~прямая~~ соединяет вершину угла (этого) и середину стороны (этой) => она лежит внутри угла.

Углы в треугольнике < 180 - каждый => угол между биссек. и обеими сторонами ~~стороной~~ (α) $< 90^\circ$



Углы между медианой и сторонами $\neq > 0^\circ$ => угол между биссек. и медианой из одной вершины $< 90^\circ$ => ситуация следующая



BX - биссек., AM - медиана.

$$\left.\begin{array}{l} BX \perp AM \\ \angle ABX = \angle XBM \end{array}\right| \Rightarrow AB = BM = \frac{1}{2} BC = x.$$

По неравенству Δ.

$AC > AB$ (иначе $AB + AC \leq BC$) =>

$1200 - 3x > x$

$x < 300$

$AB + BC > AC$.

$3x > 1200 - 3x$.

$x > 200$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №2.)

$200 < AB < 300$
AB-целое $\Rightarrow \exists$ 99 вариантов AB $\Rightarrow$ 99 треугольников, удовл. условию (AB-произвольная)
Ответ: 99.

№3) $\begin{cases} y-2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0.$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0.$

$x-1 = \dfrac{(y-2x)^2}{y-2}$ (если $y-2 \neq 0$)

$2\dfrac{(y-2x)^4}{(y-2)^2}+(y-2)^2-3=0.$

$2(y-2x)^4+(y-2)^4-3(y-2)^2=0.$

$t=(y-2)^2$

$2(y-2x)^4+t^2-3t=0.$

$t_1+t_2=3$

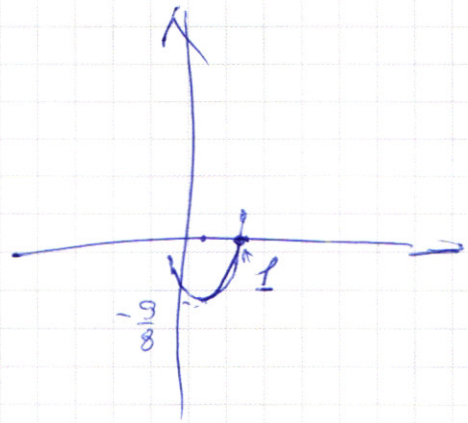
$t_1 \cdot t_2 = 2(y-2x)^4.$

6. $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$.

$2x^2 - x - 1$

$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

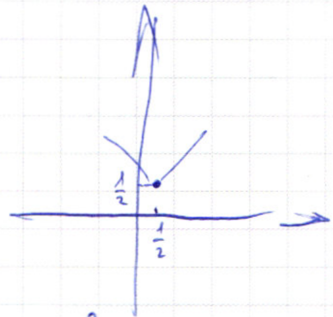
$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$.



$x + |2x-1|$

$x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow 3x - 1$.

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x$.



$ax+b$ — линейная $\Rightarrow$ ~~все, что нам важно это~~.

~~$2x^2 + x$~~

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{4}{2} = 2$ или быть const.

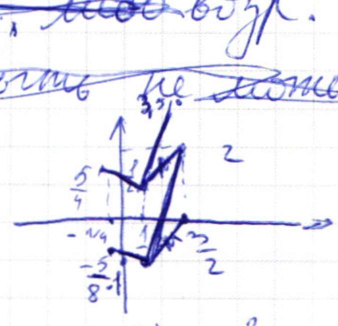
$ax+b$ не может убывать, т.к. при $x = \frac{1}{2}$ оно $\le \frac{1}{2}$,

а при $x = \frac{3}{2}$ оно ≥ 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow ax+b$ ~~либо = const, либо~~ возр.

но ~~конст оно тоже быть не может все~~ по

отметим 6 точки



$ax+b$ располагается в „туннеле".

Отметим осн. точки. $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 3{,}5\right)$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b \ge 2 \\ \frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad -\frac{1}{4}a + b \ge -\frac{5}{8}$ (продолжение стр. №6.)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

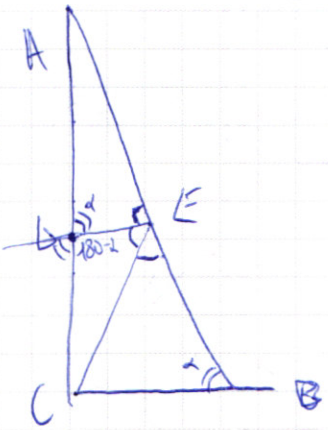
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№4



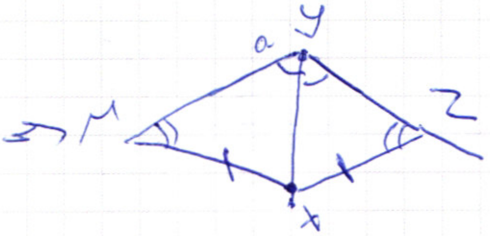
$AD : AC = \frac{3}{5}$.

$DE = \frac{2}{5} AC$.

a) $\angle BED = 90°$, $\angle DEC = 45°$ $\Rightarrow \angle CEB = 45° \Rightarrow EC$ - биссек.

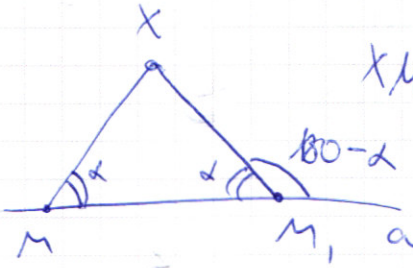
биссек. - ось симметрии угла $\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow XM = XZ$ (силу YX - биссек).

Заметим, что



$XM = XM'$

Применим это на нашей картинке.

$\triangle DAE \sim \triangle CAB$ (по 2 углам) $\Rightarrow \angle ADE = \angle CBA$.

Тогда CE - биссек, CB на месте XZ, а CD на месте XM', то есть $CD = C'B = \frac{2}{5} AC$.

$tg(\angle BAC) = \frac{CB}{CA} = \frac{2}{5}$

~~$AC = \sqrt{29}$, тогда~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4 б.

$AC = \sqrt{29} \Rightarrow DC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$.

$AB^2 = 29 + \frac{4 \cdot 29}{25} = \frac{29^2}{25} \Rightarrow \frac{29}{5} = AB$.

$\frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{5}{29} = \frac{3}{\sqrt{29}} = k$ подобия ($\triangle DEA$ и $\triangle ABC$)

$DE = CB \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$.

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{AC}{AB} = \sqrt{29} \cdot \frac{5}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$S_{\triangle CED} = \frac{CD \cdot ED \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{2} =$

$= \frac{12}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10}$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$ б) $\frac{6}{5}$.

№6 продолж.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b \geq 2 & (1) \\ -\frac{1}{2}a - b \geq -\frac{1}{2} & (2) \\ -\frac{1}{4}a + b \geq -\frac{5}{8} & (3) \\ \frac{3}{2}a + b \leq 3{,}5 & (4) \end{cases}$$

$a \geq \frac{3}{2}$.

(1)+(2) $\Rightarrow a \geq \frac{3}{2}$.

(2)+(4) $\Rightarrow a \leq 3$.

$-(3) - (2) = \frac{3}{4}a \leq \frac{9}{8}$

$a \leq \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$

(2) $-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - b \geq 0$.

$-\frac{1}{4} - b \geq 0 \Rightarrow b \leq -\frac{1}{4}$

(1) $\frac{9}{4} - 2 + b \geq 0 \Rightarrow b \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$

Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$

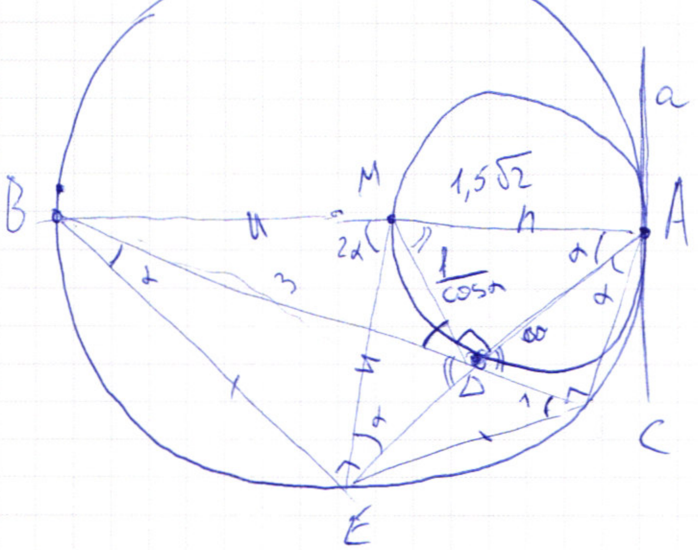
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



a - касательная

$BA \perp a \Rightarrow BA \cap \omega$ (вторая точка) $= M$: AM - диаметр, т.к. $MA \perp a$ (касат).

$\Rightarrow \angle MDA = \angle BEA = \angle ACB = 90°$

$\angle AMD = \angle ADC$ (кас. и хорда)

$\Rightarrow \angle MAD = \angle DAC = 90 - \angle AMD \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = EC$ (хорды и равн. дуги).

$\triangle MAD \sim \triangle DAC \sim \triangle BED$ (по 2 углам)

$AD = AM \cos\alpha$.

$\frac{AD}{AM} = \frac{CD}{DM} \Rightarrow DM = \frac{1}{\cos\alpha}$

$CD = AM \cdot \cos\alpha \sin\alpha = 1$.

$AM = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

~~AC~~ $BC = AB \sin 2\alpha = 4$

$AB = \frac{4}{\sin 2\alpha}$.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AC~~ $M = \frac{1}{2} BA = R$.

(R = радиус Ω)

$\angle BEA = 90°$

EM - медиана

$\Rightarrow EM = BM = MA$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

M – центр $\Omega \Rightarrow \angle BME = \smile BE = 2\alpha$

$BD^2 = BM \cdot BA$ (ст. точки) $= 9$ $\Rightarrow$

BD – касательная

$BM = \frac{1}{2} BA$

$\frac{1}{2} BA^2 = 9$

$BA = 3\sqrt{2}$.

$R = 1{,}5\sqrt{2}$

r (радиус ω) $= 0{,}75\sqrt{2}$.

$\cancel{AB = \frac{4}{\sin 2\alpha} = 3\sqrt{2}}$. $\cancel{\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

$AB = \frac{4}{\sin 2\alpha} = 3\sqrt{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$S_{\triangle BME} = S_{\triangle MEA}$ $(\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha))$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle BEA} = BM^2 \sin 2\alpha = (1{,}5\sqrt{2})^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} =$

$= 3\sqrt{2}. = \frac{BE \cdot EA}{2}$

$S_{\triangle AEC} = \frac{AE \cdot EC \sin(90^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{AE \cdot EB}{2} \cos 2\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \cos 2\alpha$ $\Rightarrow$

$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow S_{\triangle AEC} = \sqrt{2}$

$S_{BECA} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BME} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $R = 3\sqrt{2}$, $r = 1{,}5\sqrt{2}$, $S = 4\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y-2x>0$

$xy+2>2x+y$

$x(y-2)\cancel{*}-(y-2)$

$\sqrt{(x-1)(y-2)}=y-2x$

$2(x^2-2x+1)$

$2x(x-2)\quad 2x^2-4x+2$

$\cancel{x-\sqrt{2}}\quad \sqrt{2}(x-1)$

$y^2-4y+1.\ +3-3.$

$(y-2)^2+\sqrt{2}(x-1)^2-3=0.$

$x-1=\dfrac{y^2-4xy+4x^2}{y-2}$

$(y-2)^2+\sqrt{2}\ \dfrac{(y-2x)^4}{(y-2)^2}-3=0.$

$\cancel{t}^2+2(y-2x)^4-3t=0.$

$\cancel{t}\ t_1+t_2=3$

$t_1t_2=2$

$\dfrac{9}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

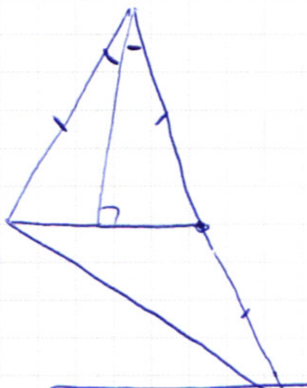
$a, b, c \quad a \quad aq \quad aq^2$

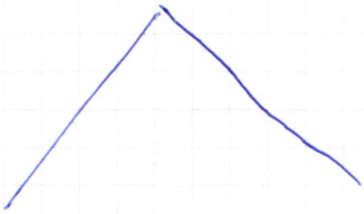
$d = aq^3$

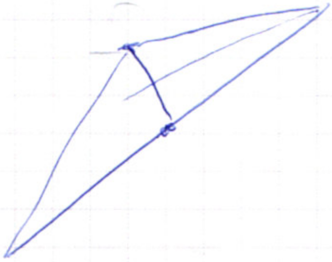
$F(d) = 0 = ad^2 + 2bd + c = 0$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2$

$x^3 + 2x^2$







$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - 2y + 2}$

$2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - 2y + 2$

$y^2 + 2y + 2x \cancel{+2} - 5xy + 4x^2 = 0$

$y = 2x + \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$2x^2 + 4x^2 + xy - 2x - y + 2 + 4x$

$y^2 - 4y + 4 \quad \sqrt{4(x+y) - 3 - 2x^2} = \sqrt{xy - 2x - y + 2} + 2x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{BD}{AD} = K.$ $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$BD = kAD = k \cdot tg\alpha$

$k \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3}.$

$\frac{\sin\alpha}{k} = \frac{1}{3}.$

$BM \cdot MA = 90$

$BM \cdot BA = 9.$

$AD = \cos\alpha \cdot AM$

$AM \cdot \sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$

$AC = AM \cdot \cos^2\alpha$

$2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 \le a\cos\alpha + b \le \cos\alpha + |2\cos\alpha - 1|$

$\cos 2\alpha - \cos\alpha$

$-b$ $\frac{1}{4}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

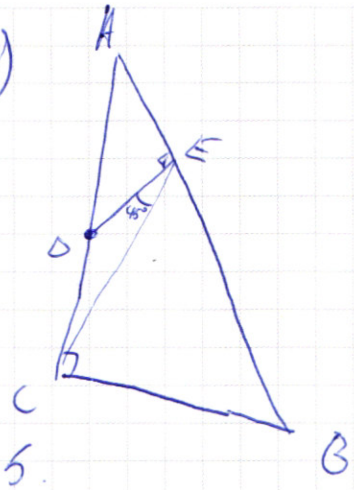
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

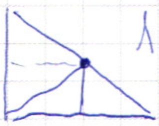
ШИФР

(заполняется секретарём)

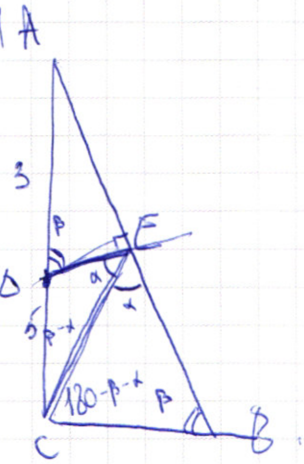
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 а)





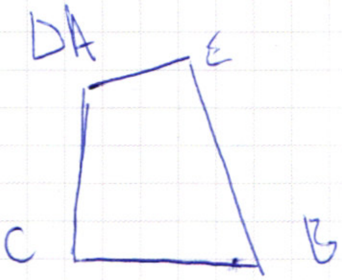
1,5 · 4



$\times \frac{1,5}{1,5}$

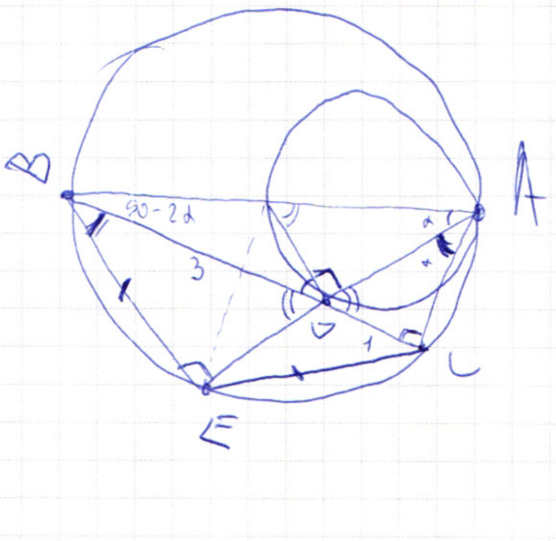
$\frac{8}{9}$

180 − B

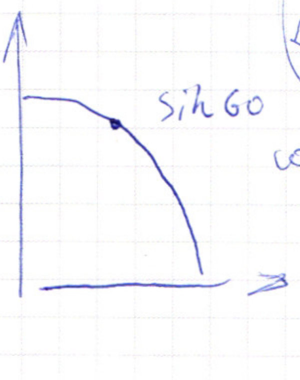


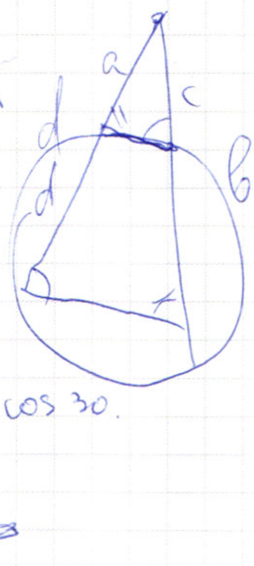
$\sin(180-\alpha) = \sin(\alpha)$ $\frac{29\cdot 25}{25} + \frac{4\cdot 29}{25} = \frac{29}{5}.$

$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$



$90-2\alpha$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)