МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

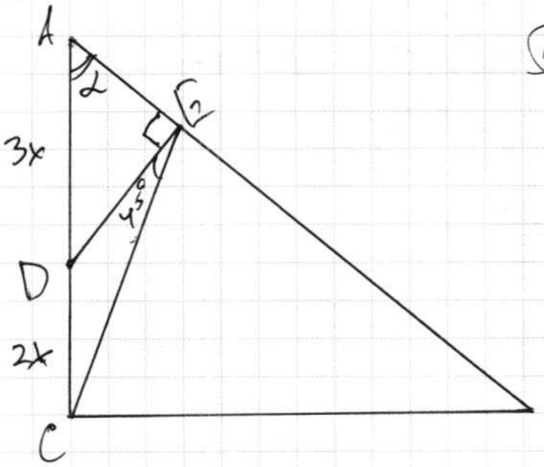
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

5+6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



① $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ ~~= DC = AD = AD~~

Пусть $AD = 3x$, $AC = 5x$, тогда $DC = 2x$.

$\angle ADE = 90° - \alpha$, где $\alpha = \angle A$.

$\angle CDE = 180° - \angle ADE = 90° + \alpha$

$\angle DCE = 180° - 90° - \alpha - 45° = 45° - \alpha$.

② По т. синусов:

$$\frac{2x}{\sin 45°} = \frac{DE}{\sin(45° - \alpha)}$$

$$DE = \frac{2x \cdot (\sin 45° \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 45°)}{\sin 45°} =$$

$$= \frac{2x\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha\right)}{\sqrt{2}/2} = 2x(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

③ $AE = 3x \cdot \cos\alpha$.

④ $$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{2x(\cos\alpha - \sin\alpha)}{3x\cos\alpha} = \frac{2}{3}(1 - tg\alpha) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} tg\alpha.$$

$$tg\alpha = \frac{2}{3\left(1 + \frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}. \quad (a)$$

(5) $tg\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{4}{25}$.

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{29}{25}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{29-25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

(всё положительно, т.к. $\triangle ABC$ – прямоуг., и $0<\alpha<90°$).

(6) $DE = AD \cdot \sin\alpha = \frac{3x \cdot 2}{\sqrt{29}} = \frac{6 \cdot x}{\sqrt{29}}$

$5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow DE = \frac{6 \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{29} \cdot 5} = \frac{6}{5}.$$

$DC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$.

~~(по т. синусов)~~:

$$\frac{EC}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{EC}{\cos(-\alpha)} = \frac{EC}{\cos\alpha} = \frac{DC}{\sin 45°}.$$

$$EC = \frac{DC \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{\sqrt{2}/2} = \frac{2\sqrt{29} \cdot 5 \cdot 2}{5 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$S_{CED} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{2\sqrt{29}}{5}$, $c = 2\sqrt{2}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{29}}{5} + \sqrt{2}$.

$S_{CED} =$

$$S_{CED} = \frac{CD \cdot DE}{2} \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{CD \cdot DE}{2} \cdot \cos(\alpha) = \frac{CD \cdot DE}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$S_{CED} = \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}. \quad (\text{б})$$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{5}$.

№ 1.

① $b = aq$

$c = bq = aq^2$.   , где q – знаменатель геом. прогр.

$d = cq = bq^2 = aq^3$

② $ax^2 + 2bx + c = 0$.

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac \geq 0. \quad (b^2 \geq ac)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = d.$$

$$ad = -b \pm \sqrt{b^2 - ac}$$

$$\frac{c}{q^2} \cdot cq = -\frac{c}{q} \pm \sqrt{\frac{c^2}{q^2} - \frac{c^2}{q^2}}$$

$$\frac{c^2}{q} = -\frac{c}{q}.$$

$$c^2 + c = 0.$$

$$c(c+1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$$, но $c \neq 0$, т.к. является членом геом. прогрессии.

Ответ: -1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в ну...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~(3) На промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$:~~

~~$g(x) \geq f(x)$, т.к.~~

~~$f(x) = -x + 1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow g(x) - f(x) = 2x^2 - x - 1 - (-x+1) = 2x^2 - x - 1 + x - 1 =$~~

~~$= 2x^2 - 2 \geq 0$, но при этом.~~

~~$g(x) \leq ax + b \leq f(x)$, т.е.~~

~~$g(x) \leq f(x)$.~~

~~При $f(x) = g(x)$: $x = 0$.~~

~~$f(x) =$.~~

(3) $f(0) = 1$, $g(0) = -1$;

$h(x) = ax + b$: $h(0) = b$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in [-1; 1]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

1) $f\left(\frac{a}{b}\right)+f(b)=f\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=f(a)$.

$f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$.

2) $f(1)=f\left(\frac{2}{2}\right)=f(2)-f(2)=0$.

$f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]=1$

$f(3)=\left[\frac{3}{2}\right]=1$.

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=\left[\frac{5}{2}\right]=2$.

$f(6)=f(2)+f(3)=2$.

$f(7)=\left[\frac{7}{2}\right]=3$

$f(8)=f(2)+f(4)=3$.

$f(9)=f(3)+f(3)=2$.

$f(10)=f(2)+f(5)=3$

$f(11)=\left[\frac{11}{2}\right]=5$.

$f(12)=f(2)+f(6)=3$

$f(13)=\left[\frac{13}{2}\right]=6$.

$f(14)=f(2)+f(7)=4$.

$f(15)=f(3)+f(5)=3$

$f(16)=f(8)+f(2)=4$.

$f(17)=\left[\frac{17}{2}\right]=8$

$f(18)=f(2)+f(9)=3$

$f(19)=\left[\frac{19}{2}\right]=9$

$f(20)=f(5)+f(4)=4$

$f(21)=f(3)+f(7)=4$.

3) При $x=y$:

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(1)=0$.

4) $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ при

$f(a)-f(b)<0$.

$f(a)<f(b)$

5) $x=1$: $y\in[2;21]$.

$x=2$: $y\in[4;21]$.

$x=3$: $y\in[4;21]$.

......

Для каждого x посчитаем кол-во y таких, что $f(y)>f(x)$:

$x=1$: 20.

$x=2$: 18

$x=3$: 18

$x=\{4;5;6;9;\}$: 14.

(т.к. $f(4)=f(5)=f(6)=f(9)$).

$x=\{~~5~~;8;10;12;15;18\}$: 8

$x = \{14; 16\}; 20; 21\} : 4$

$x = 11 : 3$

$x = 13 : 2$

$x = 1\cancel{7} : 1$

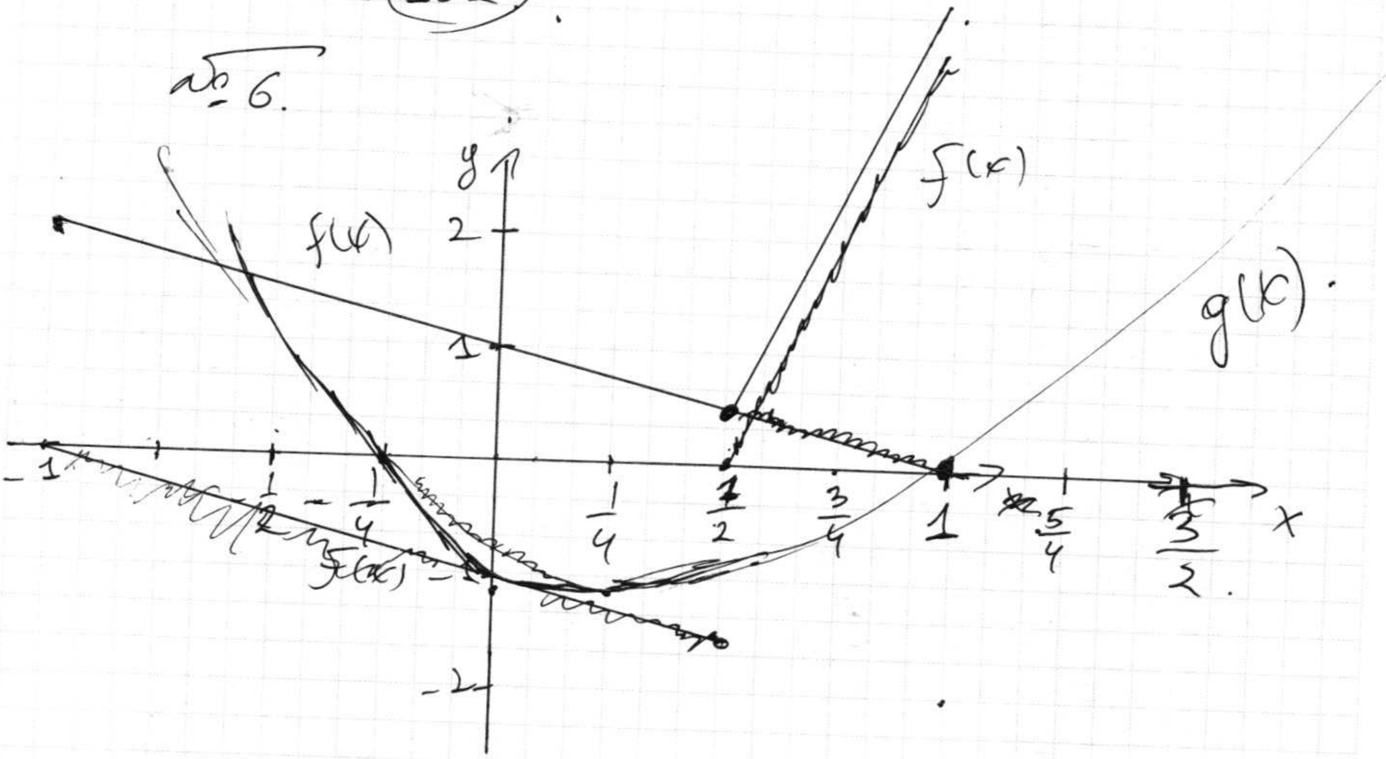
$x = 15 : 0.$

Таким образом, всего пар (x, y):

$20+18+18+14\cdot4+6\cdot8+4\cdot4+$
$+3+2+1+0=$
$=20+36+56+48+16+6=$
$=56+56+54+16=112+70=182.$

Ответ: 182.

№ 6.



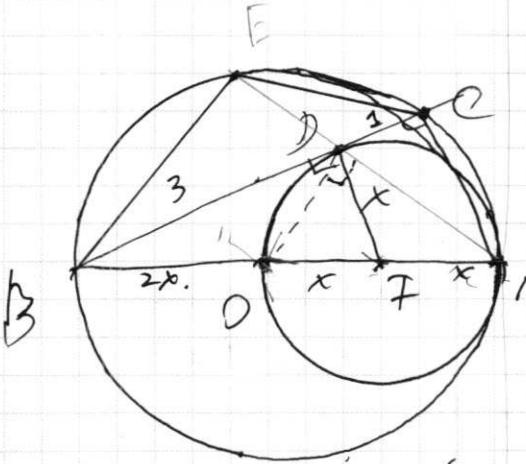
① $|x+|2x-1|$
1) $2x-1 \geq 0$: $(x \geq \frac{1}{2})$
$f(x) = x + |2x-1| = 3x-1$
2) $2x-1<0$:
$f(x) = x-2x+1 = -x+1.$

② $2x^2-x-1 = g(x)$
$g(x) = (2x+1)(x-1)$
$g(x) = 0$ при $x_1 = 1$
$x_2 = -\frac{1}{2}.$

• $x_0 = \frac{1}{4}$
$y_0 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - 1 =$
$= -1\frac{1}{8}.$

№5

$\Omega(O;R), \omega(I;r)$



① Р-м общую касательную l в т. A к Ω и ω.
$IA \perp l$ и $OA \perp l$ =>
=> (O, I, A) лежат на одной прямой.

② $\angle BDI = 90°$ (BD-касательная к ω)
$\angle BCA = 90°$ (опирается на диаметр Ω) =>

=> $\triangle BDI \sim \triangle BCA$ => $\frac{BI}{BA} = \frac{3}{4}$.

~~П~~Пусть. $AI = x$, тогда $BA = 4x$,
$BO = 2x = OA = R$, тогда
$OI = OA - IA = 2x - x = x$ =>
=> $OI = IA = x$, т.е. $O \in \omega$.

③ $OI = DI = x = r$.
~~$(3x)^2$~~ $3^2 + x^2 = (3x)^2$
$x^2 + 9 = 9x^2$.
$8x^2 = 9$; $x^2 = \frac{9}{8}$
$x = \frac{3}{2\sqrt{2}} = r$
$R = 2x = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

④ $S_{BDI} = \frac{3 \cdot x}{2} = \frac{9}{4\sqrt{2}}$
$CA = \sqrt{(4x)^2 - 4^2} = 4\sqrt{\frac{9}{8} - 1} = 4\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$
$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

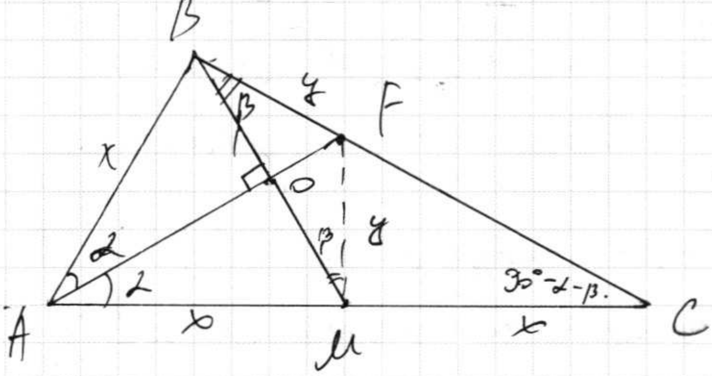
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.



$\triangle ABC$, AF – биссектриса,

BM – медиана,

$AF \perp BM$

$\angle BAF = \angle FAC = \alpha$.

$AF \cap BM = O$.

① Р-м $\triangle ABO$ и $\triangle AMO$:

AO – общая

$\angle BAO = \angle MAO$

$\Rightarrow \triangle BAO = \triangle MAO$. (прямоугольные).

$\Rightarrow AM = AB = x = AC$ (M – середина)

$BO = OM \Rightarrow O$ – середина BM.

② $FO \perp BM$, O – середина $BM \Rightarrow FO$ – высота и медиана $\triangle BFM \Rightarrow \triangle OBF = \triangle OMF \Rightarrow$

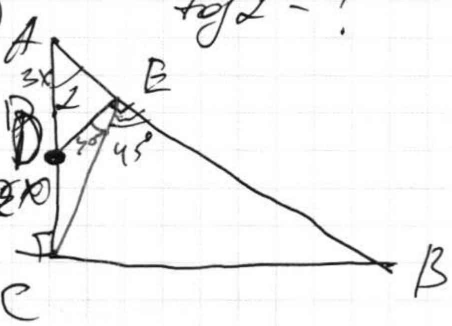
$\Rightarrow \angle FBM = \angle FMB = \beta$, $BF = FM = y$

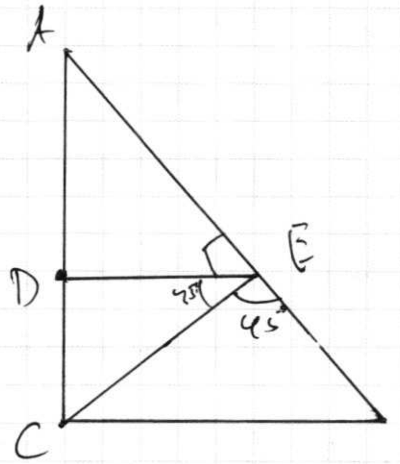
③ $\angle MFC = 2\beta$ (внешний)

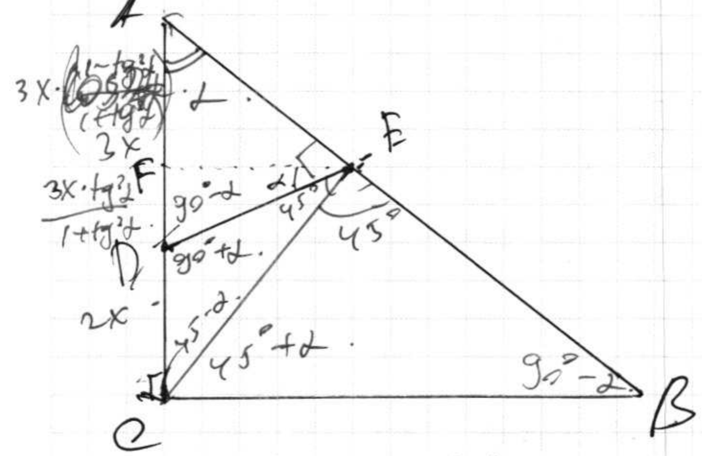
$\angle AMB = 90° - \alpha \Rightarrow \angle FMC = 180° - 90° + \alpha - \beta = 90° + \alpha - \beta$.

$\angle C = 180° - 90° - \alpha + \beta - 2\beta = 90° - \alpha - \beta$.

(4) $tg\alpha - ?$







$180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha$

$90^\circ - 45^\circ + \alpha = 45^\circ + \alpha$

$tg\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{CB}{5x}$

(1) $\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AE}{5x} = \frac{DE}{CB} = \frac{3x}{AB}$

$AB \cdot AE = 15x^2$

$\frac{EF}{AF} = \frac{FD}{EF}$

$CB = \frac{DE}{AE} 5x = \frac{DE \cdot AB}{3x}$

~~CB = DE·A~~

$tg\alpha = \frac{DE \cdot AB}{15x^2}$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$tg\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{9x^2}{AE^2} - 1} =$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) =$

$\Rightarrow f(6) = 2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ!

$\boxed{xy-2x-y+2\geq 0}$

3) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \\ \cancel{xy-2x-y+2\geq} \end{cases}$

$\cancel{y^2}$ +:

$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0. \\ 2x^2+y^2+0-4x-4y+3=0. \end{cases}$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0.$

$\cancel{x(2x-y)}$

$2x^2-(5y-6)x+5(y-5)=0.$

$D=(5y-6)^2-40y+200=$

$=25y^2+36-60y-40y+200=$

$=25y^2-100y+236$

☑ черновик ☐ чистовик

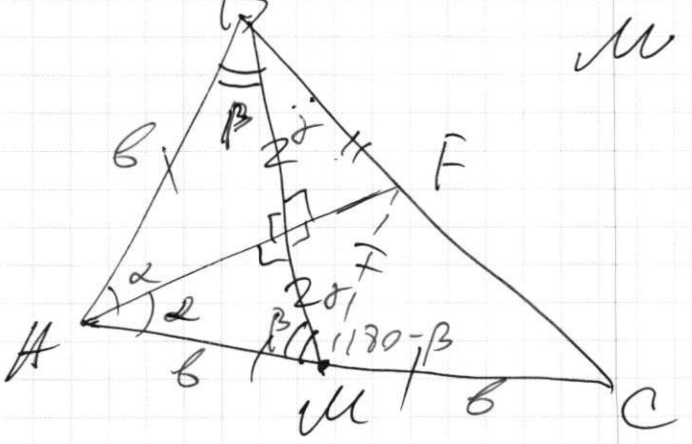
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

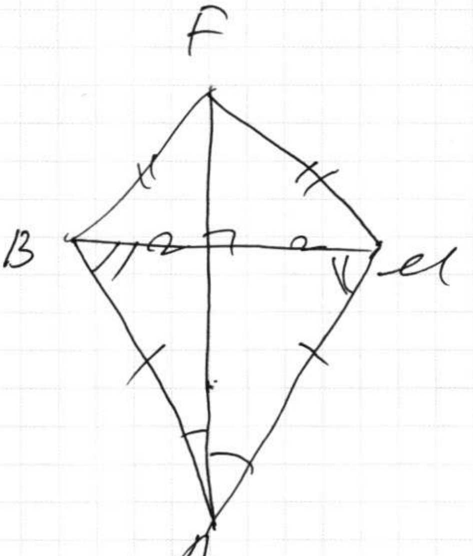
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

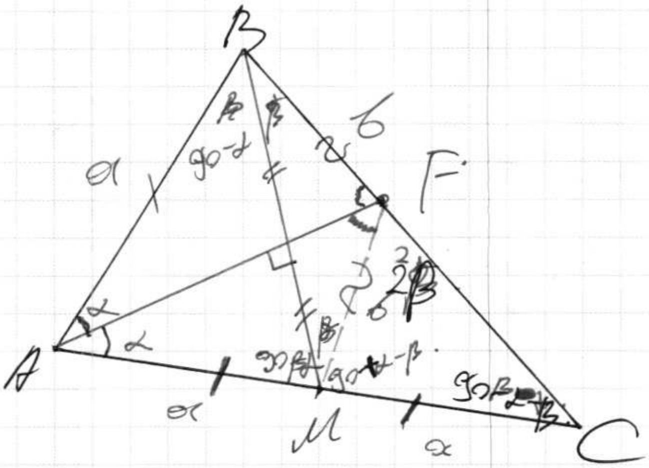
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



M





$180-90+\cancel{\gamma}-90+\cancel{\gamma}=2\gamma$

$180-2\gamma-180+\beta+\gamma=$
$=\beta-\gamma.$

$180-90+\alpha+\beta-\beta=90-\alpha.$

$90-\alpha-\cancel{\beta}+\cancel{\beta}+2\alpha+x=180^\circ$

$\cancel{x=90}$

$x=90^\circ-\alpha.$

1) $ax^2+2bx+c=0$

$\frac{D}{4}=b^2-ac$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

1) $b^2-ac\geq 0$

$b^2\geq ac$.

$b=aq$

$c=bq=aq^2$

$d=cq=bq^2=aq^3$

$ad=-b\pm\sqrt{b^2-ac}$

$\frac{c}{q^2}\cdot cq=-\frac{c}{q}\pm\sqrt{\frac{c^2}{q^2}-\frac{c^2}{q^2}}$

$\frac{c^2}{q}=-\frac{c}{q}$

$c^2=-c$

$c^2+c=0$

$c(c+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-1 \end{array}\right.$

Т.к. прогрессия геометр., то $c\neq 0$ $\Rightarrow$ $c=-1$ (с)

$$\frac{\cancel{EF}}{\cancel{FD}} \quad \frac{FD}{EF} = \frac{EF}{AF} = \frac{EF}{\cancel{3x}-FD} = \frac{BC}{\cancel{5x}} = \frac{ED}{AE} = \frac{ED \cdot 5x}{AB \cdot AF}.$$

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{5x} \Rightarrow AE = \frac{AB \cdot AF}{5x}$$

$$EF = \frac{FD}{tg\,\alpha} =$$

$$AF = 3x - FD.$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{3x - \frac{3x\,tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}{5x} = \frac{3+3\,tg^2\alpha-3tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} =$$

$$tg\,\alpha = \frac{FD}{tg(\alpha)\cdot AF}.$$

$$= \frac{3}{5(1+tg^2\alpha)} = \frac{AE}{AB}.$$

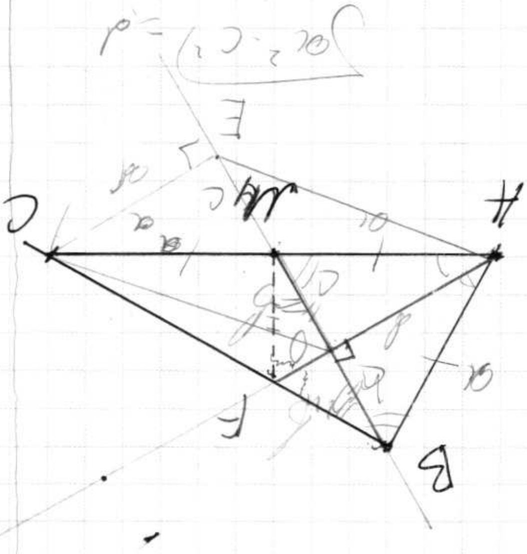
$$\frac{FD}{AF} = tg^2\alpha = \frac{\cancel{FD}}{3x-FD}$$

$$3x\,tg^2\alpha = FD(1+tg^2\alpha)$$

$$FD = (3x\,tg^2\alpha)/(1+tg^2\alpha)$$

$$tg^2\alpha = \frac{FD}{EF} = \frac{3x\cdot tg^2\alpha}{(1+tg^2\alpha)EF} = \frac{BC}{5x}.$$

$$\frac{15x^2\,tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = BC\cdot EF.$$



OE ∥ AO и

AO = OE, т.к.

$\frac{3OM \cdot AO}{2}$

$S_{ABM} = S_{BMC} = 2S_{AOM} = OM \cdot AO.$

$$\cos(2\alpha) = \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)/\cancel{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$\frac{\sin^2\alpha/\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha.$$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=[\frac{p}{2}]$, где p - простое

$f(2)=[\frac{2}{2}]=1$

$f(3)=[\frac{3}{2}]=1$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=[\frac{5}{2}]=2$

$f(6)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=4$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

$f(23)=11$

$f(1)=f(\frac{4}{4})=f(4)-f(4)=0.$

$x=2$: $y\in[2;21]$.

$x=2$ и $x=3$!

$4\le y\in[4;21]$.

$x=4$: $y\in\{7;8;\infty$.

$f(y\cdot\frac{x}{y})=f(y)+f(\frac{x}{y})=f(x)$

т.е. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(\frac{2}{3})=0.$

$f(\frac{2}{5})=-1<0.$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=3$

$f(9)=2$

$f(10)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=3$

$f(13)=6$

$f(14)=4$

$f(15)=3$

$f(16)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=4$

$f(21)=4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

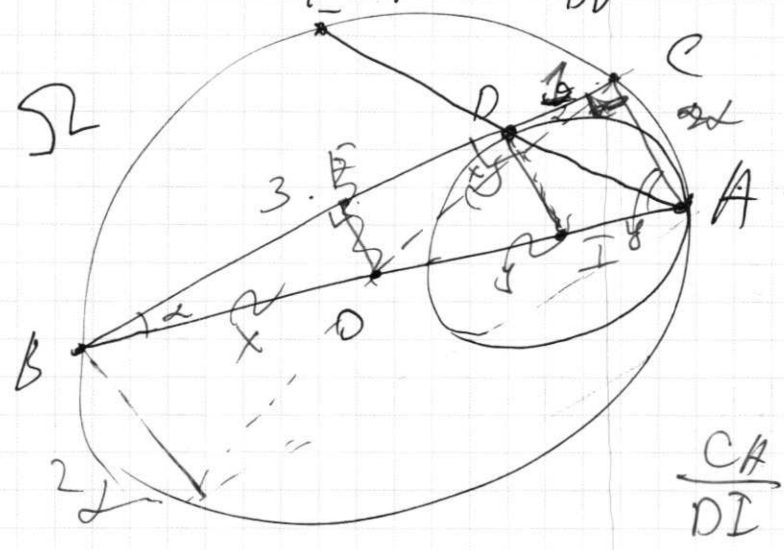
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CD=1$
$BD=3.$



~~$\triangle BDI \sim \triangle B.$~~

~~$\frac{ID}{FO} = \frac{BD}{BI}.$~~

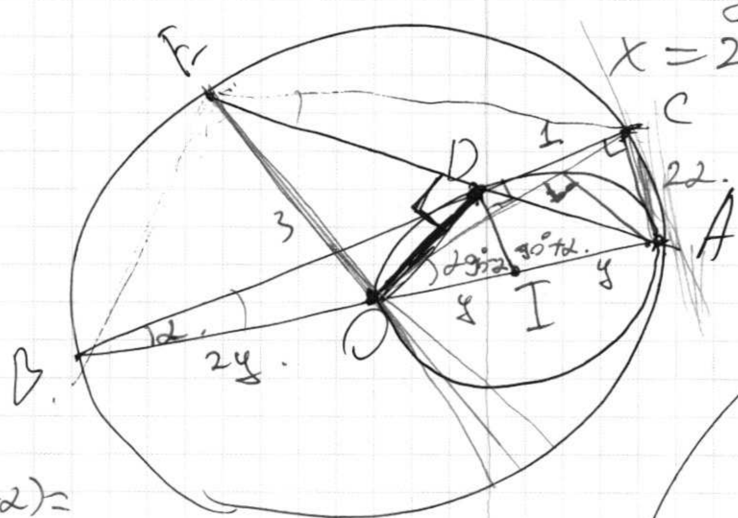
~~$\frac{ID}{FO} =$~~

$$\frac{CA}{DI} = \frac{CB}{DB} = \frac{4}{3} = \frac{AB}{IB} = \frac{2x}{2x-y}$$

$8x-4y=6x.$

$2x=4y$

$x=2y \Rightarrow O\in\omega.$



~~$\frac{4}{4y} = \frac{3}{3y}$~~

$\sin(180^\circ-2\alpha)=$
$=\cos(2\alpha-90^\circ)=\cos(90^\circ-2\alpha)=$
$=\sin(90^\circ-90^\circ+2\alpha)$
$=\sin(2\alpha)$

$2\alpha-2\gamma.$

$90-\alpha-\alpha+\gamma.$

$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin(180^\circ-2\alpha)} = \frac{4}{\sin 2\alpha}.$$

$$y = \frac{4\cdot\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

⑥ $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \\ ax + b \le x + \lvert 2x - 1 \rvert \end{cases}$

1) $2x - 1 \ge 0 \Rightarrow \left(x \ge \frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \\ ax + b \le x + 2x - 1 \end{cases}$

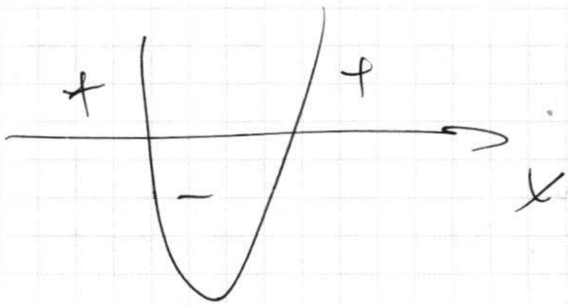
$\begin{cases} 2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0 \ (a) \\ (a-3)x \le -(b+1) \end{cases}$

1a) $2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0$ (ветви $\uparrow$)

$D = (a+1)^2 + 8(b+1) =$

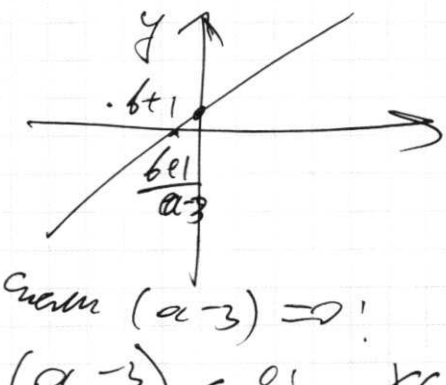
$= a^2 + 1 + 2a + 8b + 8 =$

$= a^2 + 2a + 8b + 9.$



$f(x) = (a-3)x + (b+1)$ — прямая.

Если $a - 3 > 0$:



$(a-3)x + (b+1) = 0$

$x = \frac{b+1}{a-3}$

$x \in \left(-\infty; \frac{b+1}{a-3}\right]$

Если $(a-3) = 0$: x — любое при $b+1 \le 0$ и $\varnothing$ при $b+1 > 0$)

Если $(a-3) < 0$: $x \in \left[\frac{b+1}{a-3}; +\infty\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AE}{AB} = \frac{3x\cos(2\alpha)}{5x} = \frac{3\cos 2\alpha}{5} \Rightarrow AE = 3x\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\frac{AB}{5x} = \cos\alpha \Rightarrow AB = 5x\cos\alpha.$$

$$\cancel{\frac{AE}{HE} = \frac{3x\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}}{3x\cos 2\alpha} =}$$

$$DE = AE\cdot tg\alpha = 3x\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\cancel{\sin\alpha = \frac{3x\,tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \quad 3x\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} =}$$

$$EF^2 = 9x^2\cdot\cos^2 2\alpha / \cos^2\alpha - \frac{9x^2 tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

$$\cancel{tg^2\alpha = \frac{EF^2}{AF^2} = 9x^2\left(\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)}$$

$$2\sqrt{2}x = \frac{DE}{\sin(45^\circ-\alpha)}$$

$$DE = 2\sqrt{2}x\sin(135)$$

$$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{2\sqrt{2}x\sin(45^\circ-\alpha)}{3x\cdot\cos\alpha}.$$

$$tg\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha\right)$$

$$\cos\alpha\cdot tg\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\ldots)$$

$$tg\alpha = \frac{2}{3}(1 - tg\alpha) \Rightarrow tg\alpha = \frac{2}{3(1+\frac{2}{3})} = \frac{2}{3+2} = \frac{3}{5}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)