МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

пусть d – IV-ый член прогрессии, k – её коэффициент

$$\left.\begin{array}{l} b = ak \\ c = ak^2 \\ d = ak^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ax^2 + 2bx + c = 0 \\ ax^2 + 2akx + ak^2 = 0 \\ a(x^2 + 2kx + k^2) = 0 \\ a(x+k)^2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ x = -k \end{array}\right.$$

если $a=0$, то все члены $=0 \Rightarrow$ это не прогрессия

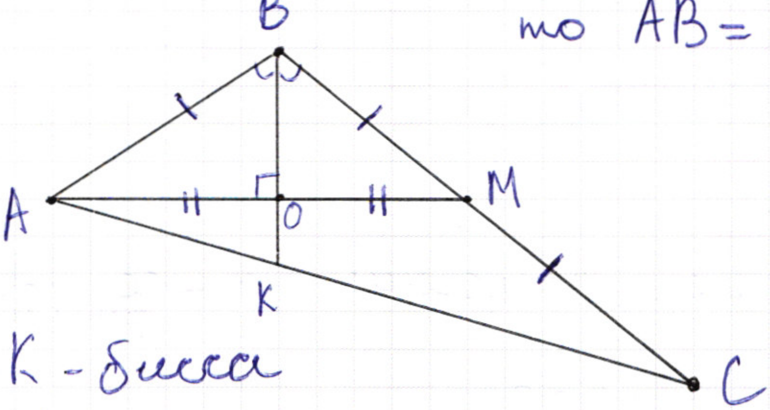
если $x = -k$, то $c = \frac{d}{k} = \frac{-k}{k} = -1$

Ответ: -1

Задача 2

Докажем:

(1) если бисс $\perp$ медиане, то $AB = \frac{1}{2}$ ~~B~~ BC



BK - бисс

AM - медиана

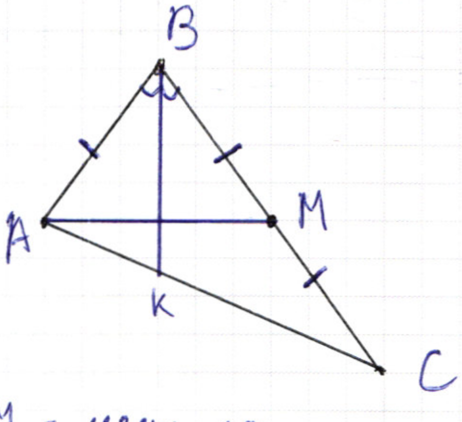
$AB = BM$ ~~B~~

$\Rightarrow BM = \frac{1}{2} BC$

$\triangle ABO = \triangle BOM$ по катету и острому углу

$\frac{AK}{KC}$ как $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ (св-во биссектрисы)

(2) Докажем, что если $AB = \frac{1}{2} BC$, то бисс $\perp$ медиане



$\triangle ABM$ - р/б $\Rightarrow$ в нем бисс BM совпадает с высотой

$\Rightarrow BK \perp AM$

AM - медиана

BK - бисс

Мы доказали необходимость и достаточность.

пусть $AB = x \Rightarrow BC = 2x$

$AC = y$

$y > 300$

$y < 600$

$200 < x < 300$

$$\begin{cases} 3x + y = 1200 \\ 3x > y \\ y + x > 2x \end{cases} \Rightarrow x < y < 3x$$

Ответ: 98

Задача 6

решим графически

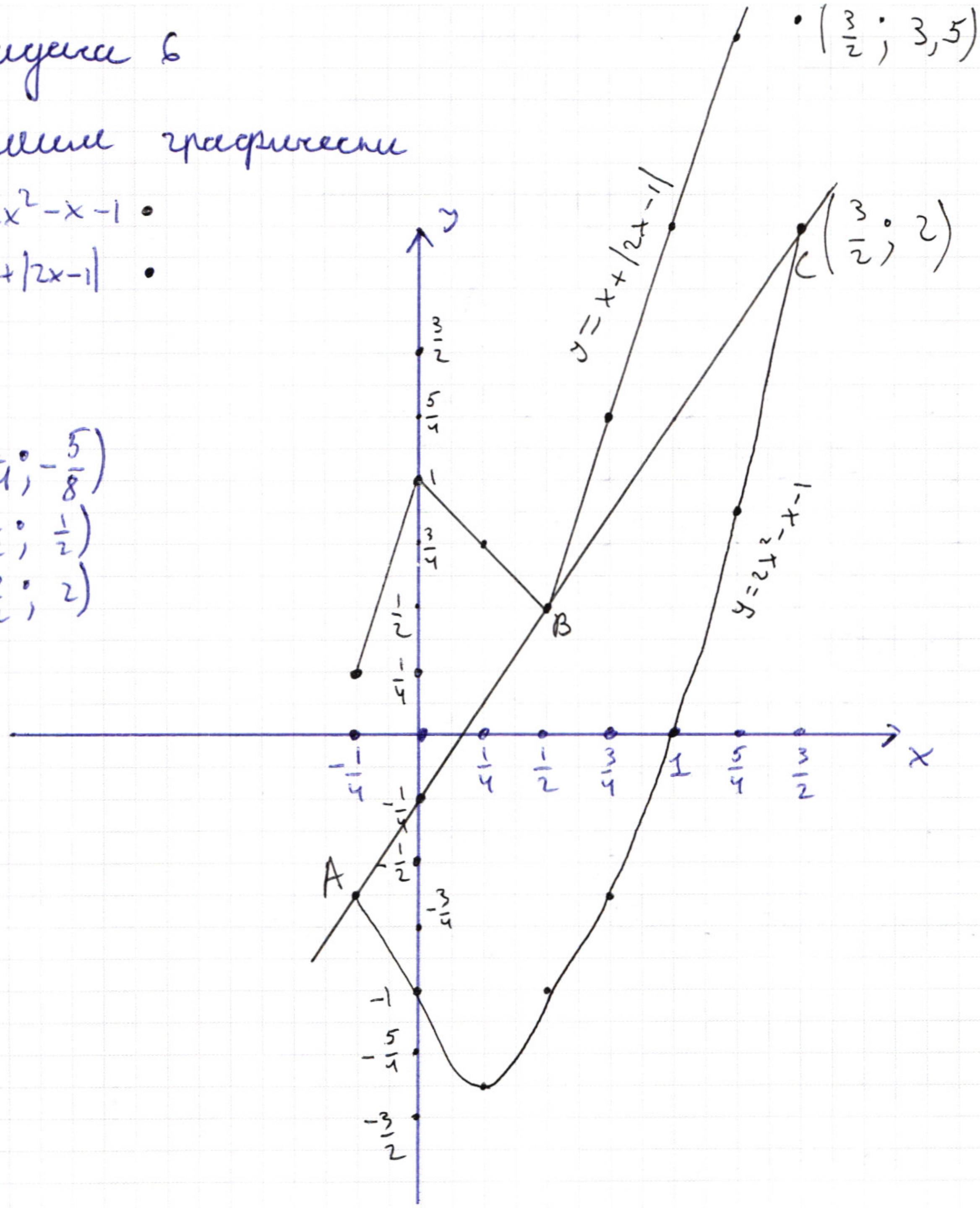
$y = 2x^2 - x - 1$ •

$y = x + |2x-1|$ •

$A\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$

$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$C\left(\frac{3}{2}; 2\right)$



точки A, B, C лежат на 1ой прямой, это и будет единственная подходящая ~~подход~~ прямая вида $ax + b$, $b = -\frac{1}{4}$, т. к. прямая проходит ~~в т.~~ через точку $\left(0; -\frac{1}{4}\right)$. $a = 1{,}5$

уравнение прямой $y = 1{,}5x - \frac{1}{4}$

Ответ: $a = 1{,}5$; ~~[illegible]~~ $b = -0{,}25$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y=2$, $x=1$: $2-2=\sqrt{2-2-1+2}$

$y-2x>0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$\cancel{2x^2+2y^2}$

$6x^2+2y^2-5xy-2x-3y+5=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y>2x$

$2x^2-x-1\le ax+b$

☑ черновик ☐ чистовик

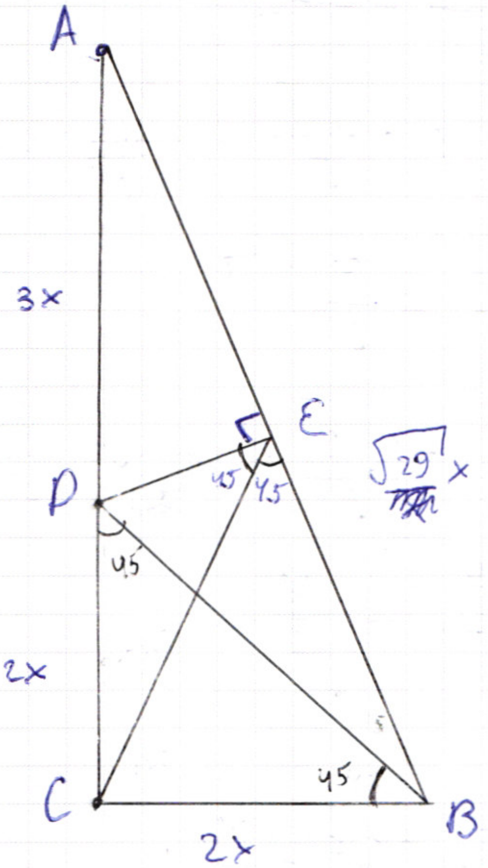
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



пусть $DC = 2x$; $AD = 3x$

$tg\,BAC = \frac{\sin BAC}{\cos BAC} = \frac{BC}{AC}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по 2м углам

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AE}{5x} = \frac{3x}{AB}$

$\cancel{\frac{AD \cdot \cos BAC}{5x} = \frac{3x}{AC \cdot \cos BAC}}$

$\cancel{\frac{3x \cdot \cos BAC}{5x} = \frac{3}{\ }}$

BEDC - описанный четырехугольник ($\angle E = \angle C = 90°$)

$\angle DEC = \angle DBC$ (опир на $\cup CD$) $= 45°$

$\Rightarrow \angle BDC = 45° \Rightarrow DC = CB = 2x$

$tg\,BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0,4$

пусть $AC = \sqrt{29} = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$AB = \sqrt{29x^2} = \sqrt{29}x = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{29}{5}$

$S_{\triangle CED} = \frac{2}{3} S_{\triangle AED}$ т.к. $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$

$\cancel{AE = AD \cdot \frac{5x}{\sqrt{29}x} = \frac{15x^2}{\sqrt{29}x} = \frac{15x}{\sqrt{29}} = \frac{15\sqrt{29}}{\sqrt{29} \cdot 5} = 3}$

~~$AE = 3$~~

~~$AD = 3x = 3\frac{\sqrt{29}}{5}$ m~~

~~$DE = CB \cdot \frac{5x}{\sqrt{29}\,x} = \frac{10x^2}{\sqrt{29}\,x} = \frac{10\sqrt{29}}{\sqrt{29}\cdot 5} = 2$~~

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $k = \frac{3x}{\sqrt{29}\,x} = \frac{3}{\sqrt{29}}$

$AE = AC \cdot k = 5x \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = 3$

$AD = 3x \cdot \cancel{\frac{3}{\sqrt{29}}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$DE = CB \cdot k = 2x \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

$S_{\triangle ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{18}{10}$

$S_{\triangle DCE} = \frac{18}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\operatorname{tg} BAC = 0{,}4$; $S_{\triangle DCE} = \frac{6}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача ~~2~~ 3

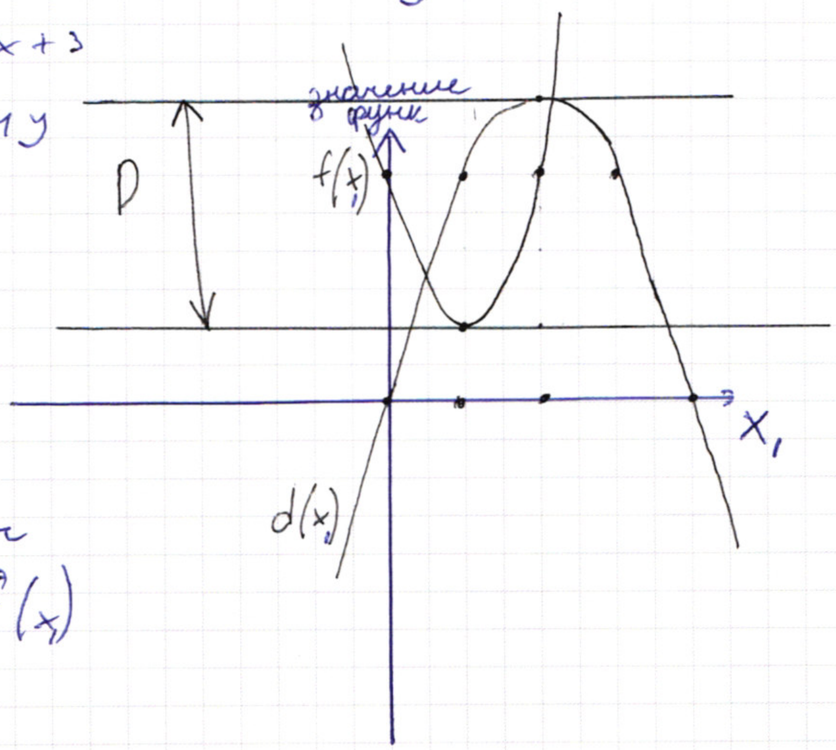
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y \geqslant 2x$

$\Rightarrow 2x^2-4x+3=-y^2+4y$

пусть $f(x)=2x^2-4x+3$

$d(y)=-y^2+4y$



D – диапазон, где при некоторого знач аргумента $d(x_1)=f(x_1)$

Ответ: $x_1=0$
$y_1=1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$y - 2x$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

если числити

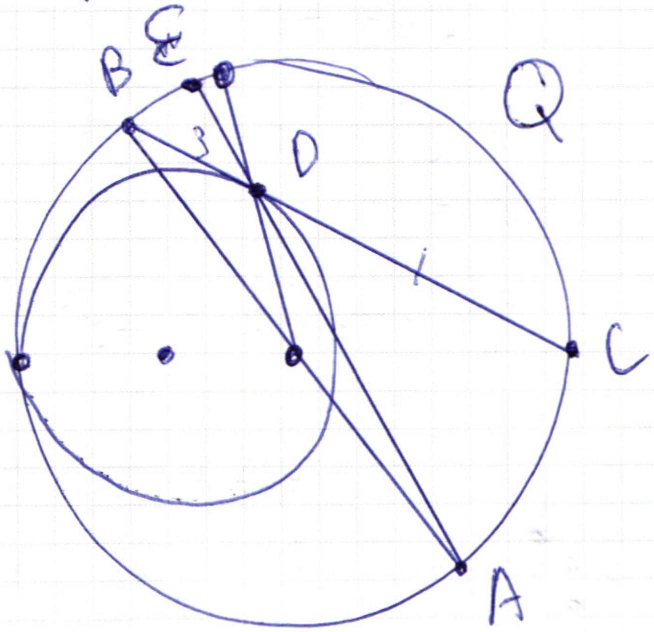
$x - p$

$\frac{p}{y} = \frac{p}{a_1} + \frac{p}{a_2} + \frac{p}{a_3}$

$f\left(\frac{1}{21}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{42}\right) = \cancel{1} + f\left(\frac{1}{42}\right)$

$f\left(\frac{22}{21}\right) = f\left(\frac{22}{3}\right) + f\left(\frac{22}{7}\right) = f($

$f($



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{17}{11}\right) = f(17) + f\left(\frac{1}{11}\right)$

$f\left(\frac{17}{11}\right) = \quad f\left(\frac{1}{11}\right) =$

$\boxed{2x^2 - 4x + 3 = -y^2 + 4y}$

$D = b^2 - 4ac =$

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$

$y_b = 2 - 4 + 3 = 1$

$-y^2 + 4y$

$x_b = \frac{-4}{-2} = 2$

$y_b = -4 + 8 = 1$

$1 - 0 = 0 - 1 + 2$

$2x^2 - 4x = -y^2 + 4y - 3$

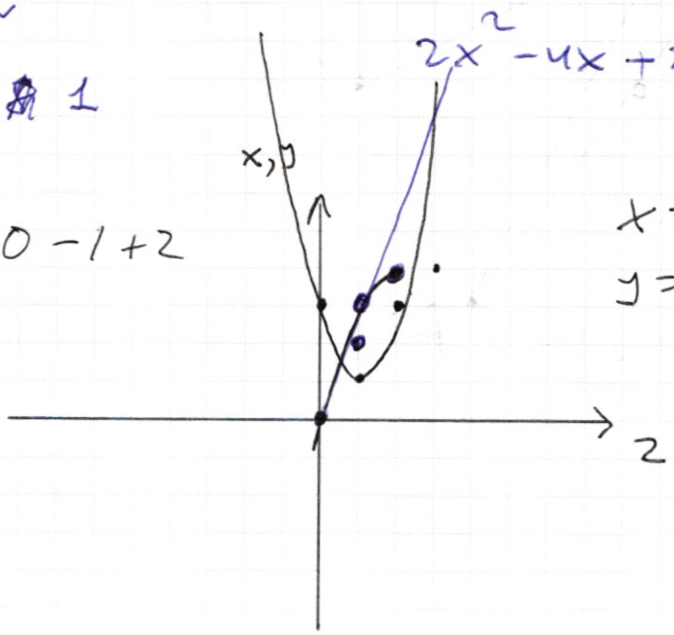
$x_b = \frac{+4}{4} = 1$

$y_b = -2$

$-y^2 + 4y - 3 = 0$

$D =$

$2x^2 - 4x + 2 = -y^2 + 4y + 1$



$x = 1$

$y = 3$

$3 - 2 = \sqrt{3 - 2 - 3 + 2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac$

$x_{12} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2}$

$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$

пуст коэф $= k$

$\frac{1}{2} +$ $1 - 1$

$ax^2 + 2akx + ak^2 = 0$

$a(x^2 + 2kx + k^2) = 0$

$a = 0$ или $\cancel{x^2 + 2kx + k^2 = 0}$ $(x+k)^2 = 0 \Rightarrow x = k$

$\cancel{x^2 \quad k^2} \; 2k$ $x = \frac{b}{a}$

1 ak

2 ak

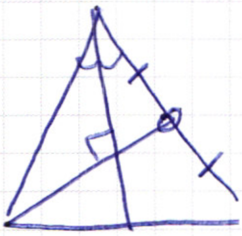
3 $ak^2 = \frac{k}{k} = 1$

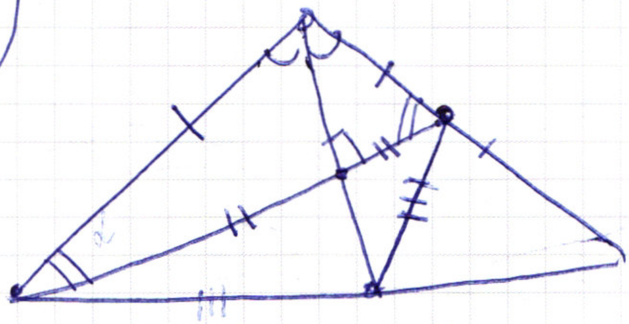
4 $ak^3 = k$

1200

$\frac{3}{2} + \frac{\cancel{}}{2}$

II



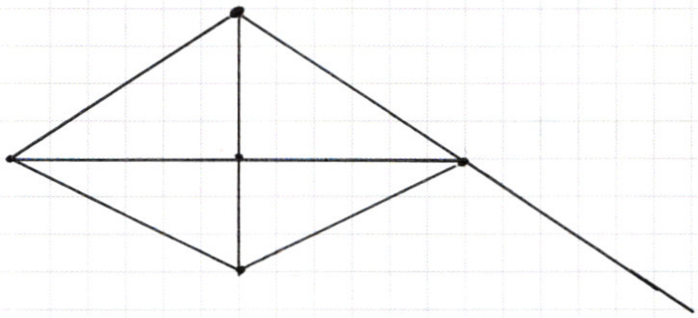


$\frac{9 \cdot 29}{25} = \frac{261}{25}$ $2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{5}{4} - 1$

$\frac{50}{16} - \frac{20}{16} - \frac{16}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

$9 + \frac{36}{25}$

$2\frac{9}{4}$ $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$



$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y-2x\geq 0$

$y\geq 2x$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-4x+2=-y^2+4y-4\quad +3$

$2(x-1)^2=-(y-2)^2+3$

~~$y\geq 2x$~~

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\frac{DE}{BC}=\boxed{\frac{AE}{5x}=\frac{3x}{AB}}$$

$$\frac{AB\cdot \overset{\cos}{\cancel{\sin}}x}{5x}=\frac{3x}{AC:\cos x}$$

$\checkmark$ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

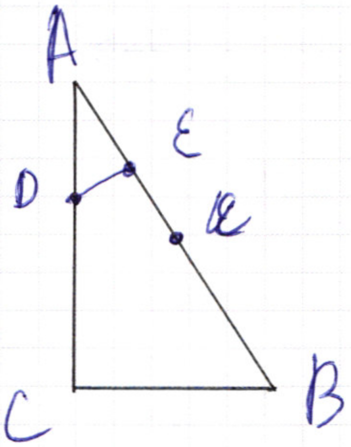
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

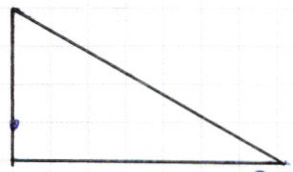
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

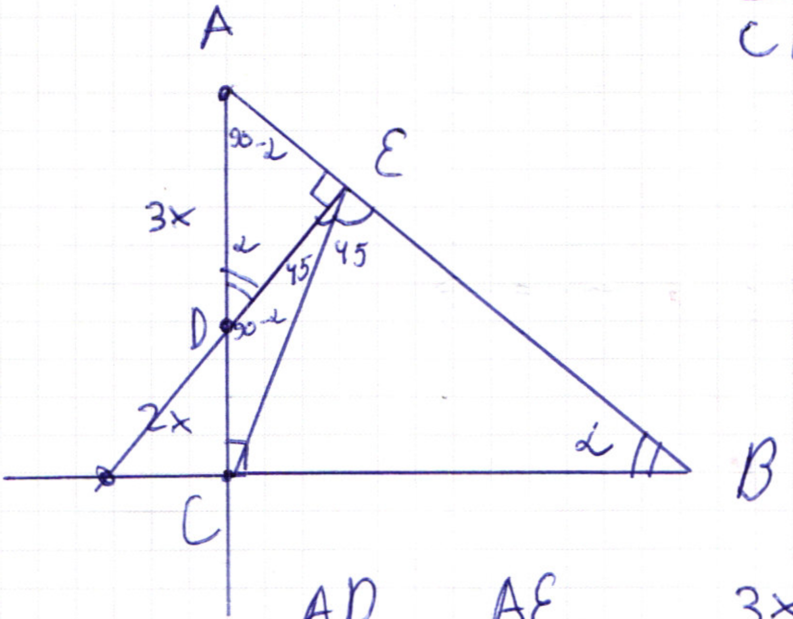
$$\frac{9\cdot 29}{25} = 3^2 + 2^2 = 13$$





$$tg\ BAC = \frac{\sin BAC}{\cos BAC} = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{DE}{CB} =$$



$$\boxed{13\cancel{5} - \alpha + 180 - \cancel{90} + \alpha - \cancel{45} = \\ =}$$

$AB =$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{\cancel{AE}} \quad AE$$

$$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$$

$180 - 180 - \alpha - 45$

$\alpha - 45$

$135 - \alpha$

$135 - \alpha + \alpha - 45 = 90$