МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 30 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

2 3 5 7 11 13 17 19

$f(1 \cdot p) = f(1) + f(p)$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f(3) =$ $f(2) = 1$ $f(6) = 2$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$f(6) = 2$

$f(4) = 2$

$f(9) = 2$

$\frac{2}{3}$

f(

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{}$ $f\left(\frac{n}{m}\right) < 0$

$f(n) \cdot$ $f(2,5) + f(1,5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 к - знаменатель прогрессии

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac$

т.к. a, b, c - члены прогрессии:

$a=a$; $b=ak$; $c=ak^2$

$D=4\cdot a^2k^2-4a\cdot ak^2=4a^2k^2-4a^2k^2=0 \Rightarrow$ корень только один

a, ak, ak^2, ak^3

$x=\frac{-2b}{2a}=\frac{-2ak}{2a}=-k$

$ak^3=-k$ $(k\neq 0)$

$ak^2=-1$ - это и есть третий член последовательности, т.к $c=ak^2=-1$

Ответ: -1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$ – разложим на множители выражение ~~слагаемые~~ под корнем

$2x^2+y^2-4x-4y+3=(y-2)^2+2(x-1)^2-3=0$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2=3 \end{cases}$$

введём замену: $a=y-2$; $b=x-1$

$y-2x=a+2-2b-2=a-2b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

$a-2b=\sqrt{ab}$ возведём в квадрат (условия: $ab\geqslant 0$, $a-2b\geqslant 0$)

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

решим квадратное уравнение относительно a

$D=25b^2-16b^2=9b^2=(3b)^2$

$a=\frac{5b\pm 3b}{2} \Rightarrow a_1=4b$; $a_2=b$

рассмотрим оба случая:

I) $a=4b$ $\quad ab=4b^2\geqslant 0$ всегда

$a-2b=4b-2b=2b\geqslant 0 \Rightarrow \boxed{b\geq 0}$

$16b^2+2b^2=3$

$18b^2=3$

$b^2=\frac{1}{6}$

$b=\sqrt{\frac{1}{6}}$, т.к. $b=-\sqrt{\frac{1}{6}}$ не подходит, т.к. $b\geq 0$

$a=\frac{4}{\sqrt{6}}$; $b=\frac{1}{\sqrt{6}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$a = \frac{4}{\sqrt{6}} = y - 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}$;

$b = \frac{1}{\sqrt{6}} = x - 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$;

II) $a = b$ $\quad ab = b^2 \geq 0$ всегда

$a - 2b = b - 2b = -b \geq 0 \Rightarrow \boxed{b \leq 0}$

$b^2 + 2b^2 = 3$

$3b^2 = 3$

$b^2 = 1$

$b = -1$, т.к. $b = 1$ не подходит, т.к. $b \leq 0$

$a = -1$

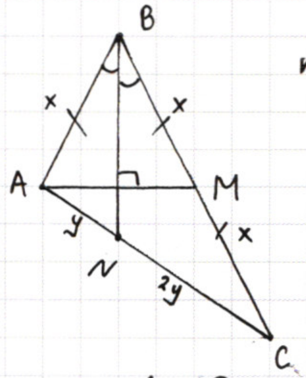
$a = -1 = y - 2 \Rightarrow y = 1$

$b = -1 = x - 1 \Rightarrow x = 0$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} (x = 0;\ y = 1) \\ \left(x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}};\ y = 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right) \end{array} \right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2 рассмотрим треугольник, в котором биссектриса перпендикулярна медиане:



BN - биссектриса, AM - медиана

по свойству биссектрисы:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{NC}{BC}$$

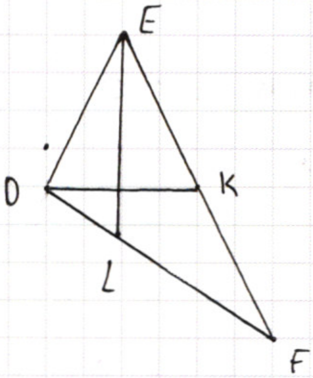
обозначим $BM = MC = x$; $AN = y$

в $\triangle ABM$ биссектриса совпала с высотой =>

=> $\triangle ABM$ - равнобедренный => $AB = BM = MC = x$

• $\frac{AN}{AB} = \frac{y}{x} = \frac{NC}{BC} = \frac{NC}{2x}$ => $NC = 2AN = 2y$

получается, что в таком треугольнике одна сторона вдвое больше другой. Теперь докажем, что этого достаточно



Дано: $\triangle DEF$, $2ED = EF$

пусть $ED = x$, $EF = 2x$

проведём медиану DK, $ED = EK = FK = x$

$\triangle DEK$ - равнобедренный

~~EL~~ проведем EL-биссектрису $\angle DEK$,

$ED = EK$ => EL - высота => $EL \perp DK$

значит, условия о том, что одна сторона вдвое больше другой, достаточно, чтобы биссектриса была перпендикулярна медиане

В треугольнике стороны: a, $2a$, $1200 - 3a$

если a - целое, то $2a$ и $1200 - 3a$ - целые

чтобы такой треугольник существовал, нужно, чтобы выполнялось неравенство треугольника:

1) $a < 2a + 1200 - 3a$ => $2a < 1200$ => $a < 600$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

2) $1200 - 3a < a + 2a$

$1200 < 6a$

$200 < a$

3) $2a < 1200 - 3a + a$

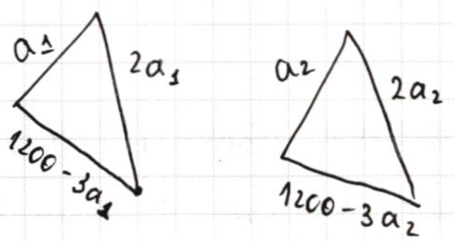
$4a < 1200$

$a < 300$

$$\begin{cases} a < 600 \\ a > 200 \\ a < 300 \end{cases} \Rightarrow a \in (200; 300), \ a \in \mathbb{Z}$$

Значит, a принимает значения от 201 до 299, т.е. всего 99 вариантов

докажем, что для каждого варианта получаются разные треугольники: выберем a_1 и a_2



пусть совпали стороны: $a_1 = 2a_2 \Rightarrow 2a_1 = 1200 - 3a_2$,

$1200 - 3a_1 = a_2$

$2a_1 = 1200 - 3a_2$

$4a_2 = 1200 - 3a_2 \Rightarrow 7a_2 = 1200 \Rightarrow a_2 \notin \mathbb{Z}$

такого быть не может

предположим, что совпали стороны по-другому

$a_1 = 1200 - 3a_2$

$2a_1 = a_2$

$1200 - 3a_1 = 2a_2$

$1200 - 3a_1 = 4a_1 \Rightarrow 7a_1 = 1200 \Rightarrow a_1 \notin \mathbb{Z}$

значит, все треугольники различны, для каждого $a \in [201, 299]$ существует треугольник

Ответ: 99

№7 2 - простое число

$f(2) = f(1 \cdot 2) = f(1) + f(2)$

$f(2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f\left(\frac{k}{m} \cdot \frac{m}{k}\right) = f\left(\frac{k}{m}\right) + f\left(\frac{m}{k}\right) = 0$, где $k, m \in \mathbb{N}$

есть 2 варианта

$f\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ для любых k и $m \in \mathbb{N}$, что неверно, т.к.

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

значит, $f\left(\frac{k}{m}\right) = -f\left(\frac{m}{k}\right)$ для любых k и $m \in \mathbb{N}$

тогда, ~~если~~ для всех чисел вида $\frac{k}{m}$

$f\left(\frac{k}{m}\right) \cdot f\left(\frac{m}{k}\right) < 0$, если $k \neq m$

значит, можно посчитать все возможные пары (x, y), где $x \neq y$ и ровно половина из них будет меньше 0

всего вариантов: $21 \cdot 21$

варианты, где $x = y$: 21

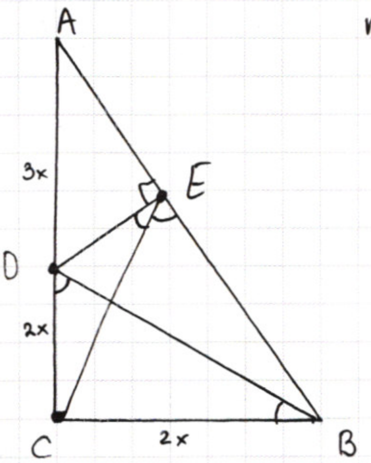
подходящих: $\frac{21 \cdot 21 - 21}{2} = \frac{420}{2} = 210$

Ответ: 210

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

а)



пусть $AD = 3x \Rightarrow AC = 5x \Rightarrow CD = 2x$

$\angle CED = 45^\circ$, $\angle DEB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CEB = 45^\circ$

$\angle DEB = 90^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CDEB - вписанный четырёхугольник (сумма противоположных углов равна 180°)

значит, $\angle DEC = \angle DBC$ (опираются на CD)

$\cancel{\angle DB}$ $\angle BEC = \angle BDC$ (опираются на BC)

ΔCDB - равнобедренный ($\angle CDB = \angle CBD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = BC = 2x$

$$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

Ответ: $\frac{2}{5}$

б) $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$25x^2 + 4x^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 29x^2 = \frac{29 \cdot 29}{25} \Rightarrow AB = \frac{29}{5}$

пусть $AE = a$; $BE = \frac{29}{5} - a$

$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AE}{5x} = \frac{5AD}{29}$

$$\frac{a}{5x} = \frac{15x}{29} \Rightarrow 29a = 75x^2 = \frac{75 \cdot 29}{25}$$

$$a = \frac{75}{25} = 3 = AE$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{5DE}{2\sqrt{29}} \Rightarrow DE = \frac{6}{5}$$

запишем теорему косинусов для ΔAEC:

$$AC^2 = EC^2 + AE^2 - 2 \cdot EC \cdot AE \cdot \cos\angle AEC$$

$$\angle AEC = 135^0 \Rightarrow \cos\angle AEC = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$29 = EC^2 + 9 + \sqrt{2} \cdot 3 \cdot EC$$

$$EC^2 + 3\sqrt{2} \cdot EC - 20 = 0$$

$$D = 18 + 80 = 98$$

$$EC = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{98}}{2}$$

т.к. $EC > 0$, $EC = \dfrac{\sqrt{98} - 3\sqrt{2}}{2}$

площадь ΔDEC: $DE \cdot EC \cdot \sin\angle DEC \cdot \frac{1}{2} =$

$$= \cdot 4\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{98} - 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{2}\left(\sqrt{98} - 3\sqrt{2}\right)}{40} =$$

$$= \frac{6 \cdot \sqrt{7^2 \cdot 2^2} - 18 \cdot \sqrt{2^2}}{40} = \frac{6 \cdot 14 - 18 \cdot 2}{40} = \cancel{478}$$

$$= \frac{48}{40} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$ax+b \le x+|2x-1|$$

$x \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$: $ax+b \le x+2x-1$

$$b+1 \le x(3-a)$$

$$x \ge \frac{b+1}{3-a}$$

любой x на промежутке от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$ не меньше $\frac{b+1}{3-a}$ =>

=> $\frac{b+1}{3-a} \le \frac{1}{2}$ => $2b+2 \le 3-a$ => $a \le 1-2b$

$x \in \left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$: $ax+b \le x-2x+1$

$$x(1+a) \le 1-b \Rightarrow x \le \frac{1-b}{1+a}$$

это верно для любого x на промежутке от $-\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ =>

=> $\frac{1}{2} \le \frac{1-b}{1+a}$ => $1+a \le 2-2b$ => $a \le 1-2b$

условие из правого неравенства: $a \le 1-2b$

$$2x^2-x-1 \le ax+b$$

$$2x^2-(a+1)x-(b+1) \le 0$$

$2>0$ - коэффициент при x^2 => ветви параболы вверх =>

=> многочлен принимает значение не больше 0 на ~~интервале~~ отрезке

между корнями (и корнями включительно)

$$D = a^2+2a+1+8b+8 = a^2+2a+8b+9$$

~~$a_{1,2}=$~~ $x_{1,2} = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4} \le -\frac{1}{4}$$

$$a+1-\sqrt{a^2+2a+8b+9} \le -1$$

$$a \le \sqrt{a^2+2a+8b+9} - 2$$

$$\frac{a+1+\sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4} \ge \frac{3}{2}$$

$$a+1+\sqrt{a^2+2a+8b+9} \ge 6$$

$\cancel{a+\sqrt{\ }}$

$$a \ge -\sqrt{a^2+2a+8b+9} + 5$$

~~Заметим, что~~

$$a \in \left[5-\sqrt{a^2+2a+8b+9}\ ;\ \sqrt{a^2+2a+8b+9} - 2\right]$$

$$a \ge 5-\sqrt{a^2+2a+8b+9}$$

$$\sqrt{a^2+2a+8b+9} \ge 5-a$$

I) $5-a \ge 0 \Rightarrow 5 \ge a$

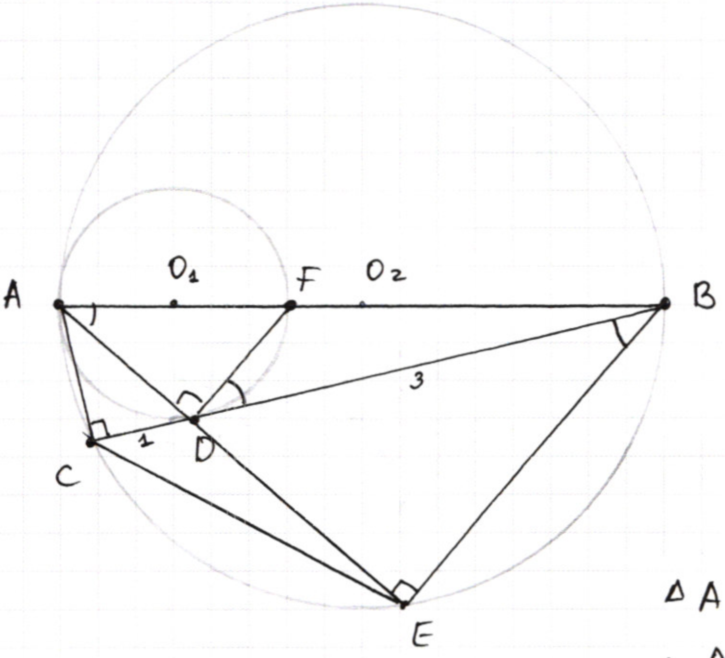
$$a^2+2a+8b+9 \ge 25-10a+a^2$$

$$12a \ge 16-8b$$

$$a \ge \frac{4}{3} - \frac{2}{3}b$$

II) $5-a < 0 \Rightarrow$ $\cancel{5 \ge a}$ $5 < a$

№ 5



AF – диаметр O_1

$\angle ADF = \angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$,

т.к. опираются на диаметр

$AO_1 = O_1F = r$

$AO_2 = O_2B = R$

$\Delta ACB: 4R^2 - 16 = AC^2$

пусть $AC = x$

$4R^2 - 16 = x^2$

$\Delta ACD: x^2 + 1 = AD^2$

$\Delta ADF: x^2 + 1 + FD^2 = 4r^2$

степень точки: $- CD \cdot DB = AD \cdot DE$

$3 = (x^2+1) \cdot DE \Rightarrow DE = \dfrac{3}{x^2+1}$

$- BD^2 = BF \cdot AB$

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$FD \parallel BE \Rightarrow \angle FDB = \angle DBE = \angle FAD$ (между касательной и хордой)

$\Delta FAD \sim \Delta BDE$

$$\frac{BE}{AD} = \frac{DE}{FD} = \frac{BD}{AF}$$

$$\frac{BE}{x^2+1} = \frac{3}{(x^2+1)\,FD} = \frac{3}{2r} \Rightarrow BE = \frac{3(x^2+1)}{2r}$$

$\Delta AEB \sim \Delta DBE$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \frac{DB}{2R} = \frac{3}{2R}$$

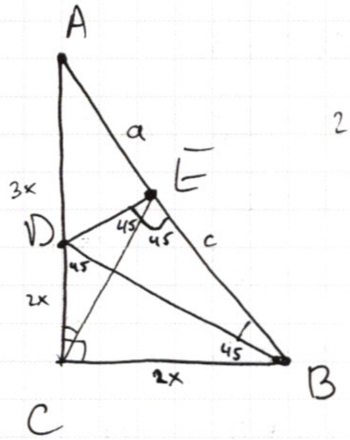
$$\cancel{\frac{3}{(x^2+1)BE} \Rightarrow} \qquad \frac{DE}{BE} = \frac{3}{2R}$$

$$\cancel{DE} = \frac{3 \cdot 2r}{3(x^2+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2R}$$

$$4Rr = 3(x^2+1)^2$$

$$9 = 4R^2 - 3(x^2+1)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$25x^2+4x^2=29x^2$

$\frac{a}{5x}=\frac{3x}{a+c}$

$\cancel{15x^2=a^2}$

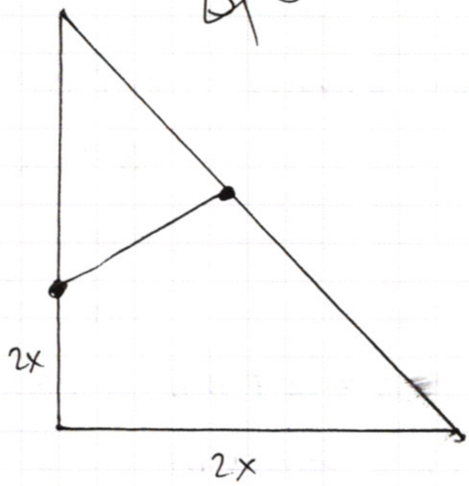
$14 \times 6 = 84$

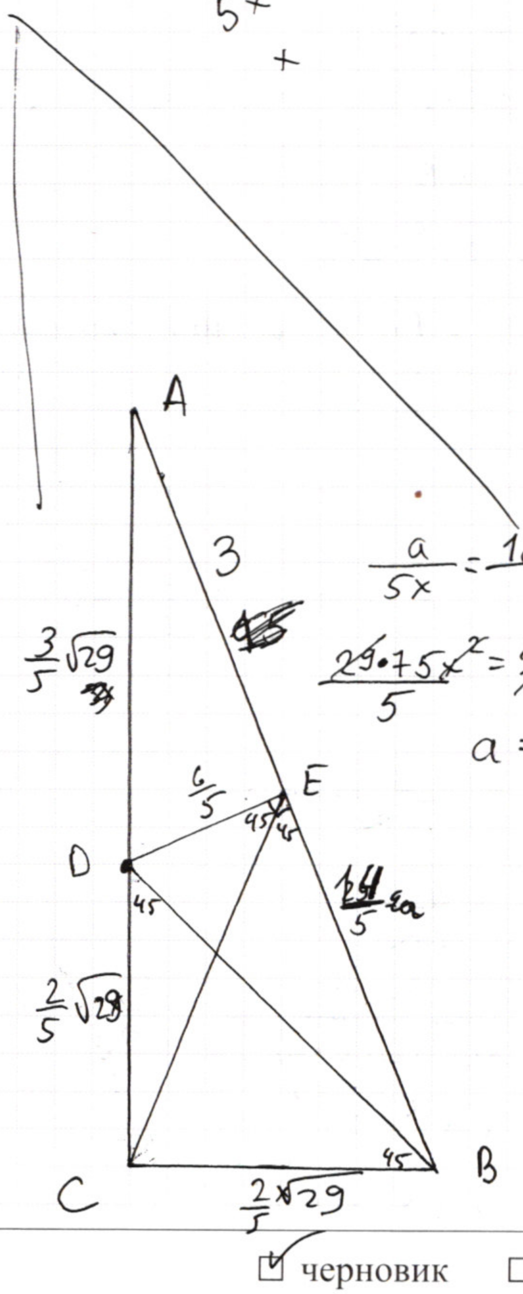
$18 \cdot 2 = 36$

$84 - 36 = 48$

$5x=\sqrt{29}$

x





$\frac{a}{5x}=\frac{15x}{29}$

$\cancel{\frac{29\cdot 75x^2}{5}=29a}$

$a=15$

$\frac{3}{\sqrt{29}}=\frac{5DE}{2\sqrt{29}}$

$\frac{6}{5}=DE$

$EC^2+9+\sqrt{2}\,3EC=29$

E

$49\cdot 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle AFD \sim \triangle ABE$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AB} = \frac{DF}{BE}$$

$$\left(\frac{x^2+1}{AE}\right)^2 = \left(\frac{2r}{2R}\right)^2 = \frac{(4r^2-x^2-1)\cdot 4r^2}{9(x^2+1)^2}$$

$\cancel{\frac{(4R^2-15)^2}{AE^2}}$ $\quad AE^2 = x^2+1+\frac{9}{(x^2+1)^2}+6$

$$\frac{(x^2+1)^2}{x^2+7+\frac{9}{(x^2+1)^2}} = \frac{(4r^2-x^2-1)4r^2}{9(x^2+1)^2}$$ — зависимость ~~x от r~~ r от x

$9 = 4R^2 - 3(x^2+4)^2$ — зависимость R от x

$9 = (2R-2r)2R$ — зависимость R от r

~~за эт~~ из этой системы можно найти R и r

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

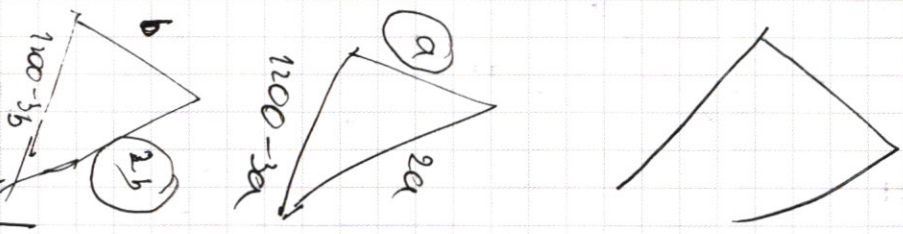
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac$

$x_1 = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a}$



a $\quad b = \underbrace{ak}$ $\quad c = ak^2$

$\frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = ak^3$

$\frac{-ak + \sqrt{a^2k^2 - a^2k^2}}{a} = \frac{-ak}{a} = -k$

$-\frac{1}{k^2} \quad -\frac{1}{k}$

$ak^3 = -k \qquad ak^2 = -1$

$a = -\frac{1}{k^2}$

a $\quad$ ak $\quad ak^2 \quad ak^3 = -k$

$-\frac{1}{k^2} \quad -\frac{1}{k} \quad -1 \qquad a = -\frac{1}{k^2}$

$7b = 1200 \quad b \in \mathbb{Z}$

$4b = 1200 - 3b$

$2a = 1200 - 3b$

$1200 - 3a = b$

$a = 2b$

a

201 - 299

$a \cdot k^2 + 2b \cdot (-k) + c = 0$

$ak^2 - 2ak^2 + ak^2 = 0$

$2 - 8 + 3$

$+ \frac{9}{16} + \frac{9}{2}$

$\frac{9}{4} +$

$1 \quad 2 + \frac{\sqrt{6}}{4} - 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

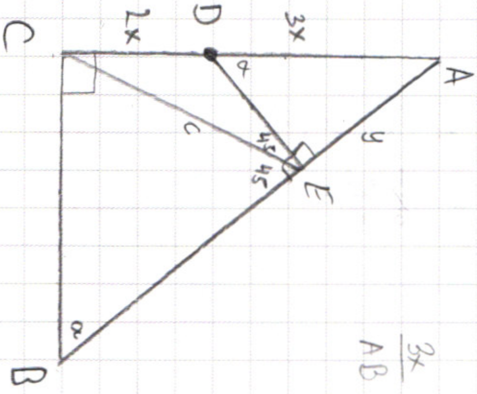
(Нумеровать только чистовики)

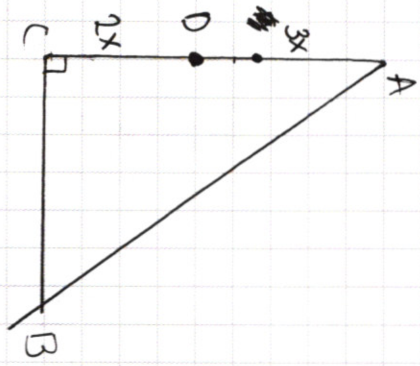
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc$

$25x^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$

$2b^2 + \cancel{a^2} + \cancel{c^2} - \sqrt{2}(bc + ab) = \cancel{a^2} + \cancel{c^2} + 2ac$



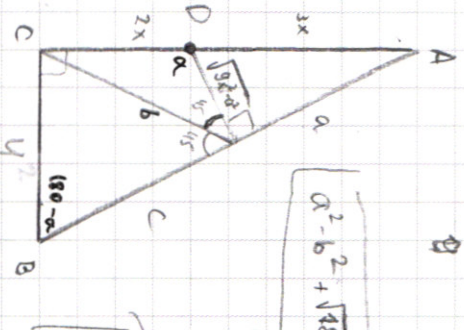


$\frac{3x}{AB} = AE$

$\frac{BC}{AC}$

$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$5a^2 - 5b^2 + 5b\sqrt{18x^2 - 2a^2}$

$25x^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab$

$\boxed{a^2 - b^2 + \sqrt{18x^2 - 2a^2}\, b = 5x^2}$

$30x^2 = 2a^2 + b\left(\sqrt{2}a + \sqrt{18x^2 - 2a^2}\right)$

$\frac{a}{5x} = \frac{3x}{a+c}$

$15x^2 = a^2 + ac$

$ac = \frac{\sqrt{2}}{2} b\left(a + \sqrt{9x^2 - a^2}\right)$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$2x^2 - x - 1 - ax - b \le 0 \quad \Rightarrow D \le 0$

~~$2x^2 - (a+1)x - (b+1)$~~

~~$D = (a+1)^2 + 8(b+1)$~~

$2x - 1 \ge 0 \quad x \ge \frac{1}{2}$

$x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

$ax + b \le x + 2x - 1$

$ax + b \le 3x - 1$

$\cancel{(a-3)x \le}$ $\quad b + 1 \le (3-a)x$

$x \ge \frac{b+1}{3-a}$

$\frac{\cancel{X}}{AD} = \frac{1}{FD} = \frac{AD}{2r}$

$\frac{BE}{AE} \quad \frac{DE}{BE} \quad \frac{BD}{2R}$

$R \to x$

$\frac{x^2}{AD^2} = \frac{1}{FD^2} = \frac{AD^2}{4r^2}$

$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{4r^2} = \frac{1}{4r^2 - x^2 - 1}$

$x^4 + 2x^2 + 1 = 4r^2x^2$

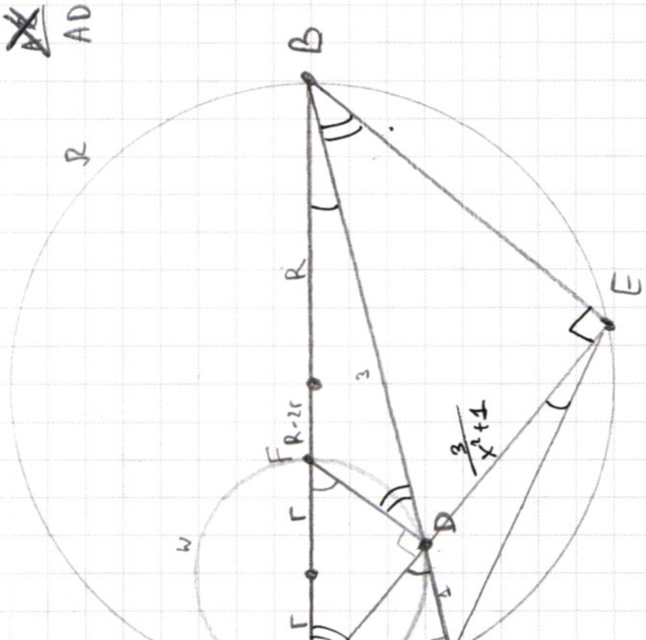
$4r^2x^2 - x^4 - x^2 = x^2 + 1$

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 4r^2$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 16 = x^2$

$(2R - 2r)2R = 9$



$4R^2 - 16 = x^2$

$x^2 + 1 = AD^2$

$x^2 + 1 + FD^2 = 4r^2$

$(x^2+1)DE = 3$

$\frac{FD}{BE} = \frac{r}{R}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$$\frac{k}{m} \cdot \frac{m}{k}$$

$$f(1) = f\left(\frac{k}{m}\right) + f\left(\frac{m}{k}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{k}{m}\right) = -f\left(\frac{m}{k}\right)$$

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(4)=2$

$f(6)=2$

$f(9)=2$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-2$

$f\left(\frac{1}{6}\right)=-2$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=-2$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$

$$f(4) = -f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$

$$f(6) = -f\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\cancel{f(2) =} -f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -4 = -2$$

$f(p_1 \cdot p_2 \ldots p_n) =$

$= p_1 + f($

$\frac{x}{y}$ $21 \cdot 21$

21

2^0

$1 - 21$

$21^2 - 21$

$1 - 21$

420

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ -21 \\ \hline 420 \end{array}$$