

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
- [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
- [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

16 (18 - 2) = 16 * 17
b1 = 16, b2 = 17
t1 = 2, t2 = 17

- [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

$\frac{1}{2}; 1, 2, \dots, \frac{1}{52} \dots 300 = 1, 2$

$$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = 13$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 13 \cdot \frac{1}{8}$$

$$1x^2 - x - 1 \quad \hookrightarrow \quad 1,500 \cdot 0,25 \quad \hookrightarrow \quad \text{2e} + 1200 \cdot 1$$

~~$$-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{32}$$~~

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4}$$

⊗

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Искать коэффициенты прогрессии ^{земли} равен k .

$$a = a$$

$$b = ka$$

$$c = k^2 a$$

$$d = k^3 a$$

- d - четвертый член
и k - корень $\Rightarrow d = a \cdot k^3 = 0$

$$a \cdot k^6 a^2 + 2 \cdot ka \cdot k^3 a + k^2 a^2 = 0$$

$$a^3 k^6 + 2a^2 k^4 + 2ak^2 + 1 = 0$$

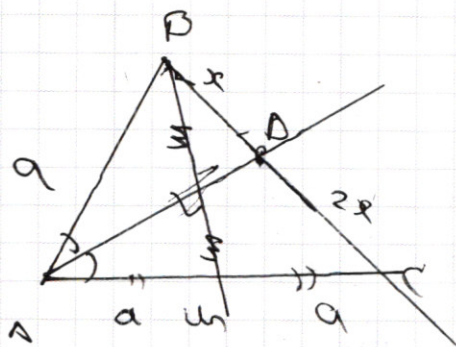
$$\begin{cases} ak^2 = 0 \\ (ak^2 + 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ak^2 = -1 \\ ak^2 = 0 \end{cases}$$

$ak^2 = 0$ - неверно, так тогда
земли прогрессии не будет земли прогрессии

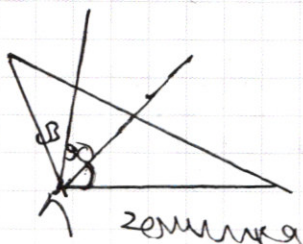
Ответ третий член равен -1

нч



1) $\triangle ABC$ - равнобедренный

следствие из элементарной геометрии
одной вершины не может быть
перпендикулярной, так тогда
треугольник не
будет существовать



$$\begin{cases} \angle A + \angle B = 2 \cdot 90^\circ \\ \angle A > 180^\circ \end{cases}$$

невозможно

Вне зависимости от вида треугольника
и вектора и медиана перпендикулярны

ВМ - медиана, СР - биссектриса
 $\triangle ABC$ - равнобедренный, так биссектриса $\angle C$ совпадает
 с высотой $AM \perp AB \perp AC$
 $AM = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AC = 2a$.

10.

$\frac{CP}{PP} = \frac{2}{1}$ так биссектриса перпендикулярна основанию
 равнобедренного треугольника - биссектриса делит его на
 две равные части.

$BD = x$

$CD = 2x$

~~a~~ $3a + 3x = 1200$ по ПМ

$a + x = 400$

11) перпендикуляр

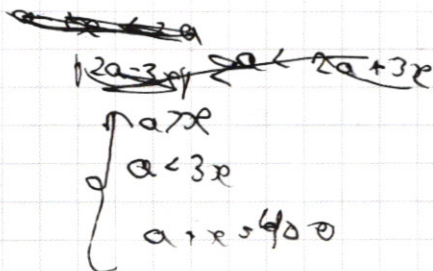
$|a - 3x| < a < a + 3x$

$2a < a + 3x$ из условия C_1

$a < 3x$

$\Rightarrow 3x - a < 2a$

$a > x$



$2a > 400$
 $a > 200$

$4x > 400$
 $x > 100$

$a > 201$ $x > 199$

$a > 202$ $x > 198$

...

$a > 299$ $x > 101$

99 трехзначных. Все они подходят,

~~a~~ $200 < a < 300$

$400 < 2a < 600$

$303 < 3x < 597$

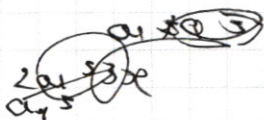
Если какое-то трехзначное,

то

~~$200 < a$~~

~~$400 < 2a$~~

~~$303 < 3x$~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Система каких-то два уравнения имеет решение
~~система~~ $2x + 3y = 1$ $x + 2y = 2$
 $2x + 3y = 1$

$$2x + 3y = 1$$

$$x + 2y = 2$$

$$x = 2 - 2y$$

$$2(2 - 2y) + 3y = 1$$

Что среди них от 2018 до 2019
 $a = 201$ лет, так
 $2 \cdot 201 = 202$

ке трехзначные разности

Ответ: 99 разности трехзначных

№3

$$(y - 2x)^2 + xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$xy > 2x$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + xy - 2x - y + 2$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x

$$D = (y - 2)^2 - 16(y^2 + y - 2)$$

$$D = 5y^2 - 36y + 36 - 16(y^2 + y - 2)$$

$$D = 5y^2 - 36y + 36 - 16y^2 - 16y + 32$$

$$D = -11y^2 - 52y + 68$$

$$x = \frac{8y - 8}{8}$$

$$x = y - 1$$

$$x = \frac{2y + 4}{8} = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$$

$$y = 4x - 2$$

$$x = y - 1$$

логарифмические ~~уравнения~~ в степенях с одинаковыми

$$2(y^2 - 2y + 1) - 4y + 4 - 4y + 3 = 0$$

$$2y^2 - 4y + 2 - 4y + 4 - 4y + 3 = 0$$

$$2y^2 - 12y + 9 = 0$$

$$D = 144 - 36 \cdot 2 = 72$$

$$y_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{72}}{4}$$

$$y_{1,2} = 3 \pm 1,5\sqrt{2}$$

$$y_1 = 3 + 1,5\sqrt{2}$$

$$x_1 = 2 + 1,5\sqrt{2}$$

~~уравнение~~ $y < 2x$ - не подходит

$$y_2 = 3 - 1,5\sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 - 1,5\sqrt{2}$$

подходит

$$y = 4x - 2$$

логарифмические в степенях с одинаковыми

$$2x^2 + (16x^2 - 16x + 4) - 4x - 16x + 8 + 3 = 0$$

$$18x^2 - 36x + 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36 \cdot 6}}{36}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$y_1 = 2x_1 + \frac{4\sqrt{6}}{6}$$

$y_1 > 2x_1$ - подходит

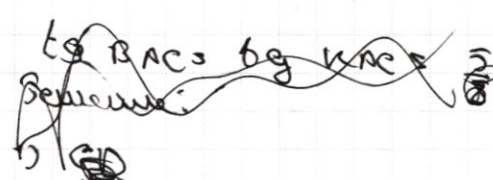
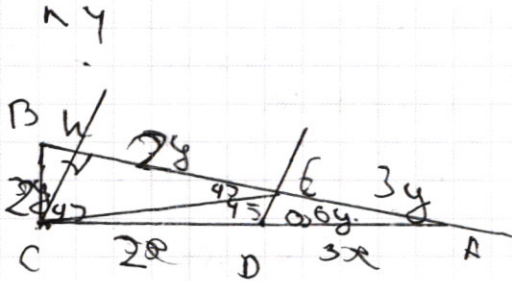
$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$y_2 = 2 - \frac{4\sqrt{6}}{6}$$

$y_2 < 2x_2$ - не подходит

ответ: $(2 - 1,5\sqrt{2}; 3 - 1,5\sqrt{2})$; $(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{4\sqrt{6}}{6})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Приведем векторы CM к широтелу CE и DE , т.к. $DE \parallel AB$ - то AM - медиана $\triangle ADE$

по усл. $AD = 3x$
 $AC = 5x \Rightarrow CD = 2x$

по теореме: $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DA} = 2:3 \Rightarrow CE = 2y, AE = 3y$

~~по теореме...~~

$\triangle ACE$: $\angle ACE = \angle AEC = 45^\circ$, т.к. $DE \parallel AB$, CE - средняя линия $\triangle ABC$

$\triangle KCE$ - равнобедренный $\Rightarrow CK = CE = 2y$

по $BA \cdot AC = BC \cdot KC \Rightarrow \frac{2}{3}$

2) $AC = 5y$
 $\triangle KAC$:

$AC^2 = CK^2 + AK^2$ (по т. Пифагора)

$25y^2 = 4y^2 + AK^2$

$y^2 = AK^2$

$\frac{ED}{KE} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{5}$ (из $\triangle KAD \sim \triangle KAC$ по 2 углам)

$\therefore ED = \frac{1}{5} AD = \frac{1}{5} \cdot 3x = \frac{3}{5}x$

$\triangle KCE$: $CE = 2y$ как широтелу из т. Пифагора

$5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x = S_{\triangle KED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x \cdot \frac{3}{5}x = \frac{9}{50}x^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(R - 2R) < R - \frac{1}{3}r > 0$$

$$R > 2r$$

$$R > \frac{1}{3}r \quad R > r \text{ по умножению}$$

$$R > 2r$$

$$4R^2 = 4 \cdot R \cdot \frac{R}{2} = 9$$

$$2R^2 = 9$$

$$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CE \cdot \sin \angle C$$

$$BC = 4$$

1) $\triangle BCS$:

$$\cos \alpha = \frac{4}{2R} = \frac{2}{R} = \frac{-4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2) $\triangle PPA$

$\sin \alpha$ по косинусам:

$$AP^2 = 18 + 9 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3$$

$$AP = 27 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 9$$

$$AP = 3$$

3) $DD \cdot DC = AD \cdot DE$ - по теореме о перпендикуляре к хорде

$$ED = 1$$

$$4) \triangle C \text{ с } \frac{4}{3} \text{ и } \sqrt{2}$$

$$\sin \angle ROB = \sin \angle COD = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ так как } \angle APE \text{ - прямой}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ кв см}$$

Ответ:

$$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

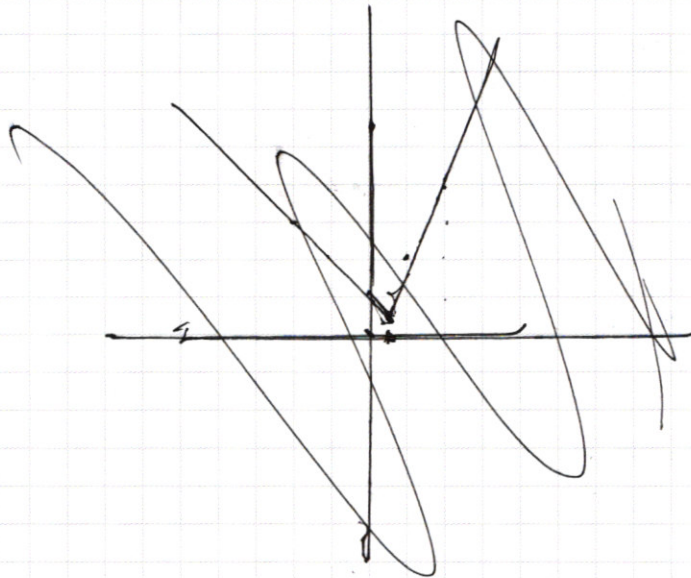
$$S_{\triangle BCS} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Ответ:

$$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$S = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$



$$3x \cdot y$$

$$x \cdot \cos 915 - x \cdot 11$$

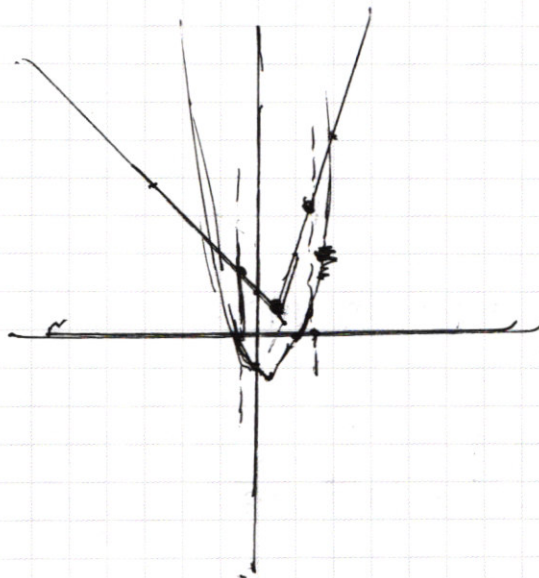
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -1,125$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$



$$\frac{3^2}{2} + 3 \cdot 1 = 3,5$$

$$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$$

$$2 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4} - 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - 1 = -0,875$$

$$-0,875 < -\frac{1}{4}a + b \leq 1,125$$

$$2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3,5$$

$$-1,25 \leq \frac{1}{4}a - b \leq 0,75$$

$$2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3,5$$

$$-1 \leq 0,5a + b \leq 0,5$$

$$-\frac{1}{4} + 1,125 = 1,125$$

$$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$$

$$\frac{3}{2} + 3,5 = 3,5$$

$$2 \cdot 0,25 - 0,5 - 1 = -1$$

$$= -1$$

$$-3,5 \leq -\frac{3}{2}a - b \leq -2$$

$$-1 \leq 0,5a + b \leq 0,5$$

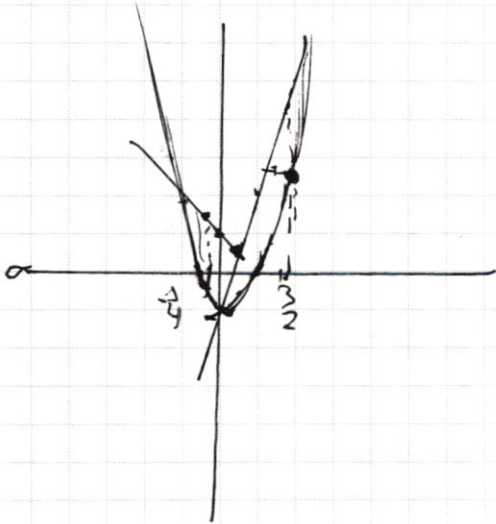
$$-4,5 \leq a \leq -1,5$$

$$2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3,5$$

$$-0,5 \leq 0,5a - b \leq 1$$

$$1,5 \leq a \leq 4,5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Положе пер-ства можем определить,
если у точек $g(x) = ax + b$

$g(x = \frac{1}{4})$ удовлетворяет
критерий

$g(x = \frac{3}{4})$ удовлетворяет критерий

$g(x = \frac{1}{2})$ удовлетворяет
критерий

~~$g(x = \frac{1}{2})$ - точка~~

$x = \frac{1}{2}$ - точка, где происходит
изменение знака

~~$1) -1,25 \leq \frac{1}{4}a - b \leq 0,75$~~
 ~~$2) 2 \leq \frac{3}{4}a + b \leq 3,5$~~
 ~~$3) -1 \leq 0,5a + b \leq 0,5$~~
 ~~$-3 \leq a \leq 3$~~

$0,75 \leq 2a \leq 4,25$
 $0,375 \leq a \leq 2,125$
 a , которые удовлетворяют
 (I) и (II)

$-1,25 \leq \frac{1}{4}a - b \leq 0,75$ (I)
 $2 \leq \frac{3}{4}a + b \leq 3,5$ (II)
 $-1 \leq 0,5a + b \leq 0,5$ (III)

Решаем II; III

~~$1) -3 \leq a \leq 3$~~
 $2 \leq 1,75a + b \leq 3,5$
 $0,5 \leq -0,5a - b \leq 1$
 $1,5 \leq a \leq 4,25$

Решаем I; IV

$-2,25 \leq 0,75a \leq 7,25$

$-\frac{9}{4} \leq \frac{3}{4}a \leq \frac{29}{4}$
 $-3 \leq a \leq \frac{29}{3}$

Решаем I; II

~~$\frac{3}{8} \leq a \leq \frac{17}{8}$~~ ~~$\frac{17}{8} \leq a \leq \frac{17}{8}$~~

$0,75 \leq 1,75a \leq 4,25$

~~$0,75 \leq a \leq 2,5$~~
 $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}a \leq \frac{17}{4}$

$\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{17}{9}$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{17}{9} \\ -3 \leq a \leq 3 \\ 3,5 \leq a \leq 4,5 \end{cases}$$

$$\frac{17}{9} > \frac{17}{3} > \frac{17}{9}$$

$$a \in [1,5; \frac{5}{3}]$$

~~$$-1 \leq a \leq 1$$~~

~~$$-1 \leq a \leq 1$$~~

$$\begin{cases} -0,5 \leq \frac{1}{4}a + b \leq 1,25 & \text{I)} \\ 2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3,5 & \text{II)} \\ -1 \leq 0,5a + b \leq 0,5 & \text{III)} \end{cases}$$

Решим I; II

$$\begin{cases} -4,5 \leq -1,5a + 1,5b \leq 7,5 \\ 2 \leq 1,5a + b \leq 3,5 \\ -2,5 \leq 2,5b \leq 1,5 \\ -1 \leq b \leq \frac{23}{5} \end{cases}$$

Решим II; III

$$\begin{cases} 2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3,5 \\ -1,5 \leq -1,5a - 3b \leq 3 \\ 0,5 \leq -2b \leq 0,5 \\ -3,25 \leq b \leq -0,25 \end{cases}$$

Решим I; III

~~$$-0,25 \leq a \leq 1,25$$~~

$$-1,5 \leq -0,5a + 2b \leq 2,5$$

$$-1 \leq 0,5a + b \leq 0,5$$

$$-2,5 \leq 3b \leq 3$$

$$-\frac{5}{6} \leq b \leq 1$$

Решим все элементы:

$$a \in [1,5; \frac{5}{3}]$$

$$b \in [-\frac{5}{6}; -0,25]$$

Ответ: все ^{пары} a и b из промежутков

~~$$a \in [1,5; \frac{5}{3}]$$~~

$$a \in [1,5; \frac{5}{3}]$$

$$b \in [-\frac{5}{6}; -0,25]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$d^2 = 16 - 8 \cdot (y^2 - 4y + 3)$$

$$D = 16 - 8y^2 + 32y - 24$$

$$D = -8y^2 + 32y - 8 \Rightarrow -8(y^2 - 4y + 1)$$

$$D = 16 - 4 \cdot (2x^2 - 4x + 3)$$

$$D = 16 - 8x^2 + 16x - 12$$

$$D = 8x^2 + 16x + 4 = 4(2x^2 + 4x + 1) =$$

$$D = -4x^2 - 4xy + y^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$4x^2 - x(5y - 2) + y^2 + y - 2 = 0$$

$$D = 25y^2 - 20y + 4 - 16(y^2 + y - 2) = 9y^2 - 4y + 36$$

$$9y^2 - 4y + 36 = 0$$

$$9(y - 2)^2 = 0$$

$$x = \frac{5y - 2 \pm 3(y - 2)}{4}$$

$$2 + 4 - 4 - 8 + 3 = 3 = 0$$

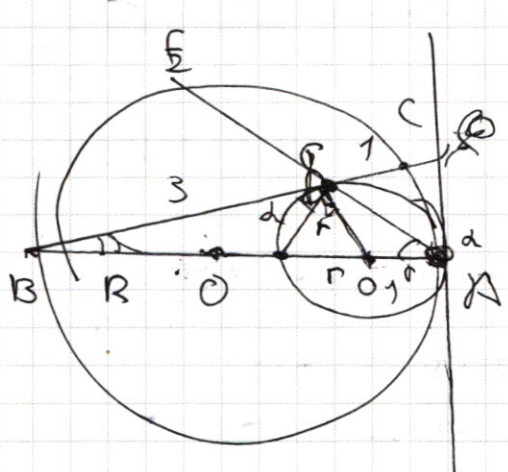
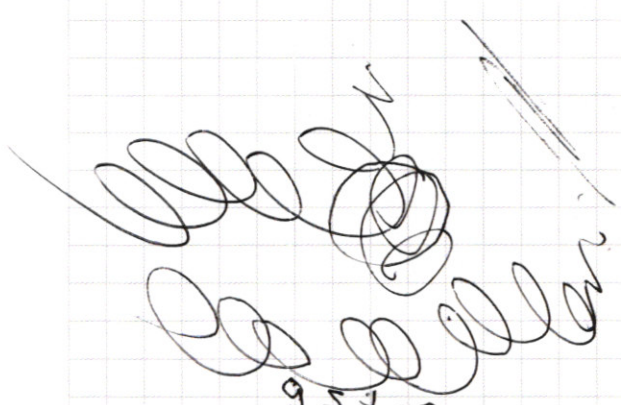
$$D = 18^2 \cdot 4 - 60 \cdot 18$$

$$18(82 - 60) = 18 \cdot 22 =$$

$$9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$27 \cdot 8$$

$$216$$



$$g \cdot (2R - 2r) \cdot 2R$$

$$r^2 + (2R - r)^2 = g$$

$$g \cdot (2R - 2r) \cdot 2R$$

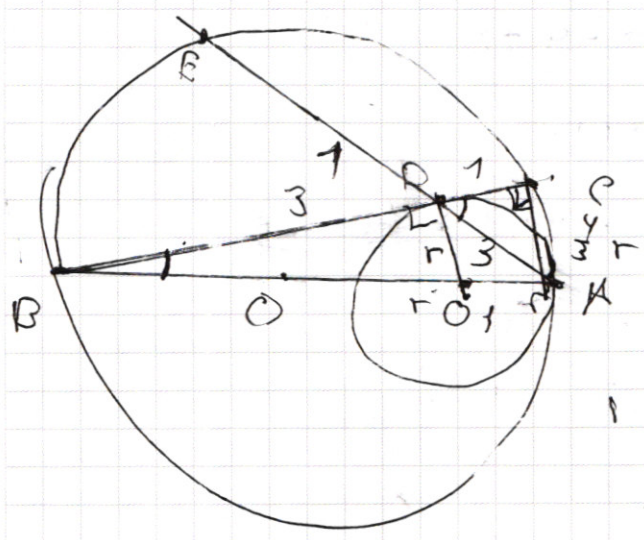
$$r^2 + 4R^2 - 4Rr + r^2 = g$$

$$g + r^2 = (2R - r)^2$$

$$2r^2 - 4Rr + 4R^2 = g$$

$$g = 4R^2 - 4Rr$$

$$4R^2 - 4Rr = g$$



$$16R^2 - 16Rr + 36$$

$$g = 4R^2 - 4Rr$$

$$4R^2 - 4Rr = g$$

$$16 + \frac{16}{9}r^2 = 4R^2$$

$$4 + \frac{4}{9}r^2 = R^2$$

$$36 + 4r^2 = 9R^2$$

$$g = 4R^2 - 4Rr$$

$$16R^2 - 16Rr + 36$$

$$16r^2 + 36 = 9R^2$$

$$9R^2 - 4r^2 = 16R^2 - 16Rr$$

$$4R^2 - 16Rr + 4r^2 = 0$$

$$4R^2 - 4Rr = g$$

$$81 = 36R^2 - 36Rr$$

$$16r^2 + 36R^2 - 36Rr = 36R^2$$

$$16r^2 - 36Rr = 0$$

$$r(16r - 36R) = 0$$

$$0 = 16r - 36R \Rightarrow r = \frac{9R}{4}$$

$$t_2 = \frac{16 \pm 12}{14}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 < 1$$

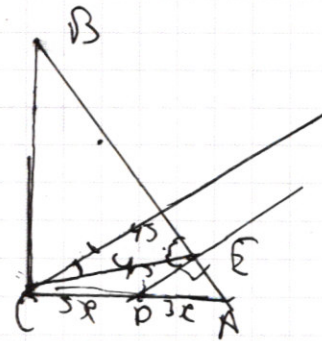
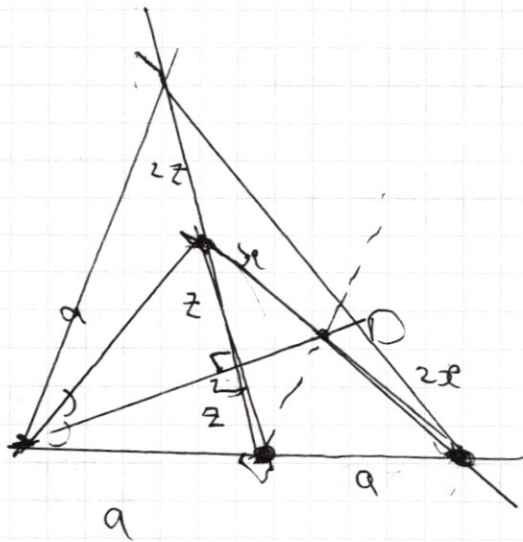
$$4R^2 - 2R^2 = g$$

$$2R^2 = g$$

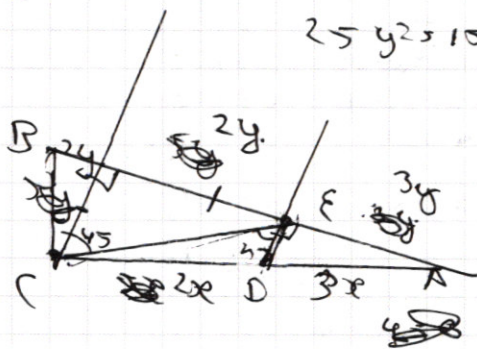
$$R = \frac{g}{2} = \frac{36R}{2}$$

Handwritten signature or mark.

$$R = 2r$$



$$25y^2 = 15y^2$$



~~500~~ ~~500~~ ~~500~~ ~~500~~

$$2 \cdot -430$$

$$210 \quad 420 \\ 570$$

y^2

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 =$$

$$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 6 + 3 = 0$$

$$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

~~$$y^2 - 4xy + 4x^2 =$$~~

$$4x + 4y - 3 + 2x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$$

$$2x^2 + 6x + 5y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c d
a ka k²a
k³a

a > x
a > 3x

$$a \cdot k^6 a^2 + 2 = ka \cdot k^3 a + k^2 a = 0$$

2a > 400
a > 200

$$a^3 k^6 + 2k^4 a^2 + k^2 a = 0$$

400 < x < 400
x > 100

$$k^2 a + a^2 k^4 + 2k^2 a + 1 = 0$$

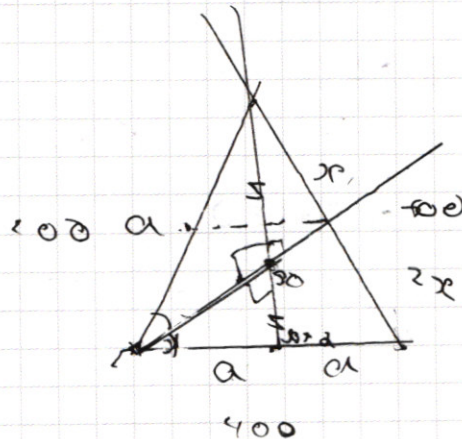
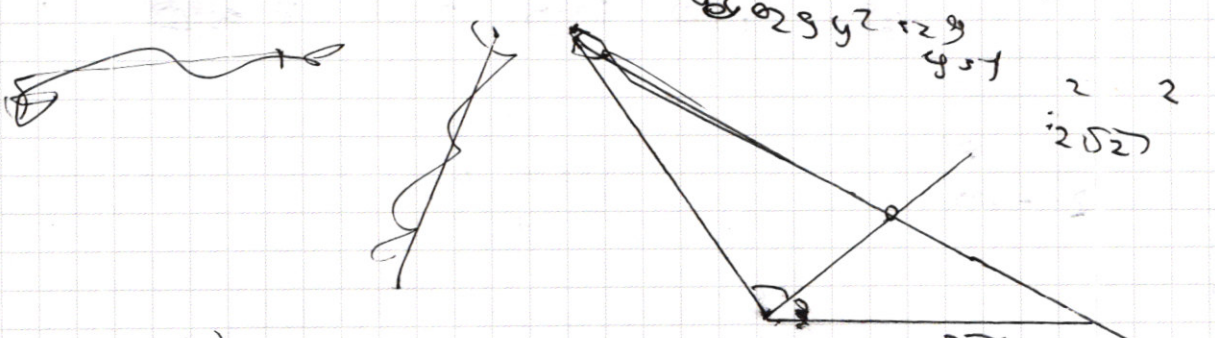
a < 239 x < 101
a < 298 x < 102
a < 297 x < 103

$$(ak^2 + 1)^2 \cdot k^2 a = 0$$

a < 201 x < 199

250 < 450
500

3 < 199



$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = 1$$

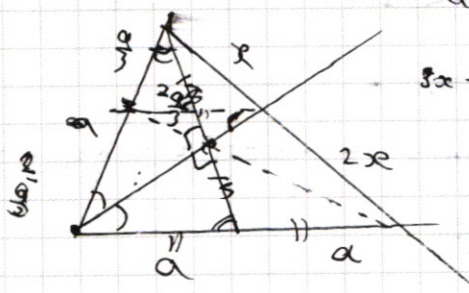
x = 2

$$3a + 3x = 1200$$

$$a + x = 400$$

$$(1200 - 3a)^2 = 3a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos \alpha$$

$$3x - 2a < a < 3x + 2a$$



$$3x - a < 2a < 3x + a$$

$$a < 3x$$

$$3x - a < 2a$$

a > x

$$a < 3x < 3a$$

$$a < 3x$$

a > x