МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ Из 1-го ур-ия следует, что $x-2y\geq 0$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ (x-2)^2+9y^2-18y=16 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5xy+x+4y^2+2y^2-2=0 \quad \text{I} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

I $(4y-x-2)(y-x+1)=0$

$\left(y-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)(y-x+1)=0$ $\quad \boxed{x\geq 2y}$

$\begin{cases} x\geq 2y \\ y-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}=0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ (x-2)^2+9\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=25 \end{cases} \Big| \cdot 16$

$\begin{cases} x\geq 2 \\ \cancel{16}(x-2)^2+\cancel{9}(x-2)^2=\cancel{25}\cdot 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq 2 \\ (x-2)^2=16 \end{cases} \Rightarrow x-2=\pm 4 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=2$

$\begin{cases} x\geq 2y \\ y=x-1 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ 10(x-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2=\frac{25}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x-2=\pm\frac{5}{\sqrt{10}} \Rightarrow x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\Downarrow$ $\frac{1}{5} + \cos^2(2\alpha+2\beta) = 1 \Rightarrow \underline{\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}}$.

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta} + \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta -$

$\cancel{- \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)} = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$

$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm \cos^2\alpha \mp \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

1) $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \ \Big|:\cos^2\alpha$ (т.к. $tg\,\alpha$ - существ.)

$4\,tg\,\alpha + 2 = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \ \Big|:\cos^2\alpha$

$4\,tg\,\alpha + 2\,tg^2\alpha = 0 \Rightarrow 2\,tg\,\alpha(2 + tg\,\alpha) = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0;\ tg\,\alpha = -2$

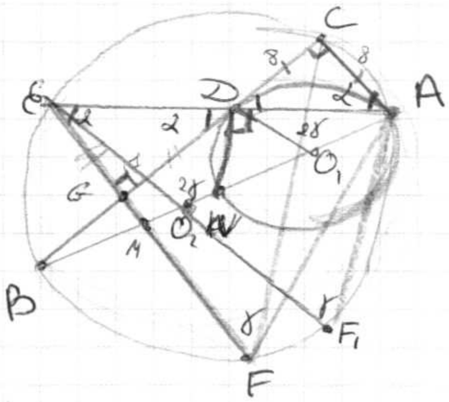
Ответ: $tg\,\alpha = -\frac{1}{2};\ 0;\ -2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



$CD = 8$
$BD = 17$

1) $CD = AC = 8$ (отрезки кас-ых)

2) $\angle C = 90^\circ$ (AB – диаметр)

3) $\angle\alpha = 45^\circ$ (в ΔACD $\angle C = 90^\circ$; $AC = CD$)

4) $\angle EGD = 90^\circ$ (дсп.); $\angle EDG = 45^\circ$ (верт.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle DEF = 45^\circ$ и $EG = GD$.

5) ~~В ΔABC $BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow 25^2 + 8^2 = (2R)^2 \Rightarrow 2R = \sqrt{689}$.~~

~~$R = \frac{\sqrt{689}}{2}$~~

6) AN – диам ω (окр. кас-тся $\Rightarrow$ общ. линия центров)

7) ~~По т. о сек. и касательной: $BD^2 = BH \cdot AH$~~

~~$289 = (\sqrt{689} - AH) \cdot AH$~~

~~$AH^2 - \sqrt{689}\,AH + 289 = 0$~~

8) $\Delta ADN \sim \Delta AEB \Rightarrow$

$EN \parallel O_1D$ (СЗ) $\Rightarrow$ N и O_2 совпадают

9) $\Delta BDO_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R - r}{2R} \Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{2R - r}{2R}$

$17 \cdot 2R = \cancel{25R} \; 50R - 25r$

$25r = 16R \Rightarrow r = \frac{16R}{25}$

10) В ΔBDO_1 $BD^2 + \cancel{BO_1}\,O_1D^2 = BO_1^2$

$289 + r^2 = (R + r)^2 \Rightarrow 289 = R^2 - 2Rr \Rightarrow 289 = R^2 - 2R^2 \cdot \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 289 = 17R^2 \Rightarrow R = \sqrt{17} \Rightarrow r = \frac{16\sqrt{17}}{25}$.

⑤

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, где p_i - простое; $\alpha_i = \overline{0, +\infty}$.

Тогда: $f(x) = \alpha_1 \cdot f(a_1)$ Перебирая значения $f(p)$:

$f(\frac{1}{x}) = \alpha_n \cdot f(\frac{1}{a_n})$ $\quad f(p) = f(p^2) + f(\frac{1}{p})$

$-f(p) = f\frac{1}{p}$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

Переберем подходящие зн. функции для x и y в заданном диапазоне.
(раскладыв на простые сомн и высчитыв. зн-ия)

$f(a)$	a
0	1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24
1	5; 7; 10; 14; 15; 20; 21
2	11; 22
3	13
4	17; 19
5	23

$]$ $f(\frac{x}{y}) = 0$: $\quad 11 \cdot 13 = 143$

$f(\frac{x}{y}) = 1$: $\quad 7 \cdot 6 = 42$

$f(x) = 2$: $\quad 2 \cdot 4 = 8$

$f(x) = 3$: $\quad 1 \cdot 3 = 3$

$f(x) = 4$: $\quad 2 \cdot 1 = 2$

Ответ: 208

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11) $EF_1A = EBA = \gamma$ $\quad \angle FAD = 180 - 2\alpha$

$EO_1A = DO_1A = 2\gamma$ $\quad \angle CBA = 2\alpha - 90^\circ$

$\sin \angle DBA = \frac{r}{2R - r} = \frac{16\sqrt{17}}{25} : 2\sqrt{17} - \frac{16\sqrt{17}}{25} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

$\sin \angle DBA = -\cos(2\gamma) \Rightarrow \frac{8}{17} = -(1 - 2\sin^2 \gamma) \Rightarrow$

$= \frac{25}{17} = +2\sin^2\gamma \Rightarrow \sin^2\gamma = \frac{25}{34} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\gamma = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$

12) $AE = EF_1 \cdot \sin\gamma = 2R \cdot \sin\gamma = \frac{2\sqrt{17} \cdot 5}{\sqrt{34}} = 5\sqrt{2}$.

$AF = EF_1 \cdot \cos\gamma = 2R \cdot \cos\gamma = \frac{2\sqrt{17} \cdot 3}{\sqrt{34}} = 3\sqrt{2}$.

13) $S = AE \cdot AF \cdot \sin \angle FAD = 30 \cdot \sin \angle FAD =$

$= \frac{30 \cdot 15}{17}$.

Ответ: $R = \sqrt{17}$; $r = \frac{16\sqrt{17}}{25}$; $\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$;

$S_{\triangle AEF} = \frac{30 \cdot 15}{17}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(3)

$x^2+18x>0$

$\exists\ x^2+18x=t: \qquad 5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$t>0 \Rightarrow |t|=t:$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$12^{\log_5 t}+t \geq 12^{-\log_t 13}$ Возьмем лог. по осн. 12:

$\log_5 t - \log_{12} t \geq \log_t 13$

$\frac{1}{\log_t 5} - \frac{1}{\log_t 12} \geq \log_t 13$

$\frac{\log_t \cancel{60}\frac{5}{12}}{\log_t 5 \log_t 12} \geq \log_t 13$

$\frac{\log_t \cancel{60}\frac{5}{12} - \log_t 5 \log_t 12 \log_t 13}{\log_t 5 \log_t 12} \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

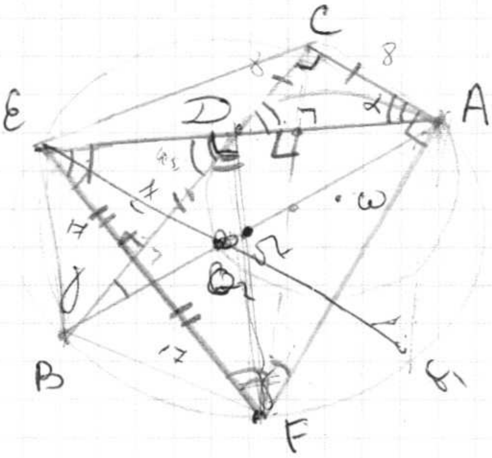
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = 8$

$BD = 17$

~~FC - биссектр.~~

$\times \begin{array}{r}13\\11\end{array}$ $\begin{array}{r}13\\13\\143\end{array}$

1) $CD = AC$ (отр. касательн.)

~~2) $\angle AFC = \angle ABC$~~

По т. о сек и кас $ED \cdot AD = 64$

$17^2 = BG \cdot AG$ ← диам. ω

$a^{\log_b c}$

$\angle C = 90^\circ;\ \alpha = 45^\circ$

$143 + 42 = 185$; $185 + 8 = 203$; $203 + 3 = 206$; $206 + - = 208$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5^t + \log_{12} x^2 + 18x \geq 13^t$

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_{12} t}$

$\cos 2\gamma = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin^2\gamma = 1 - \frac{64}{289} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$

$289 - 64 = 225$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{(12x+9)+2}{4x+3} = \boxed{3 + \frac{2}{4x+3}}$

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$y_0 = -8 \cdot \frac{15^2}{8^2} + \frac{30 \cdot 15}{8_4} - 17 = -15^2 + \frac{15^2}{4} - 17 = \frac{-3 \cdot 15^2}{4} - 17$

$\log_{3} 9$

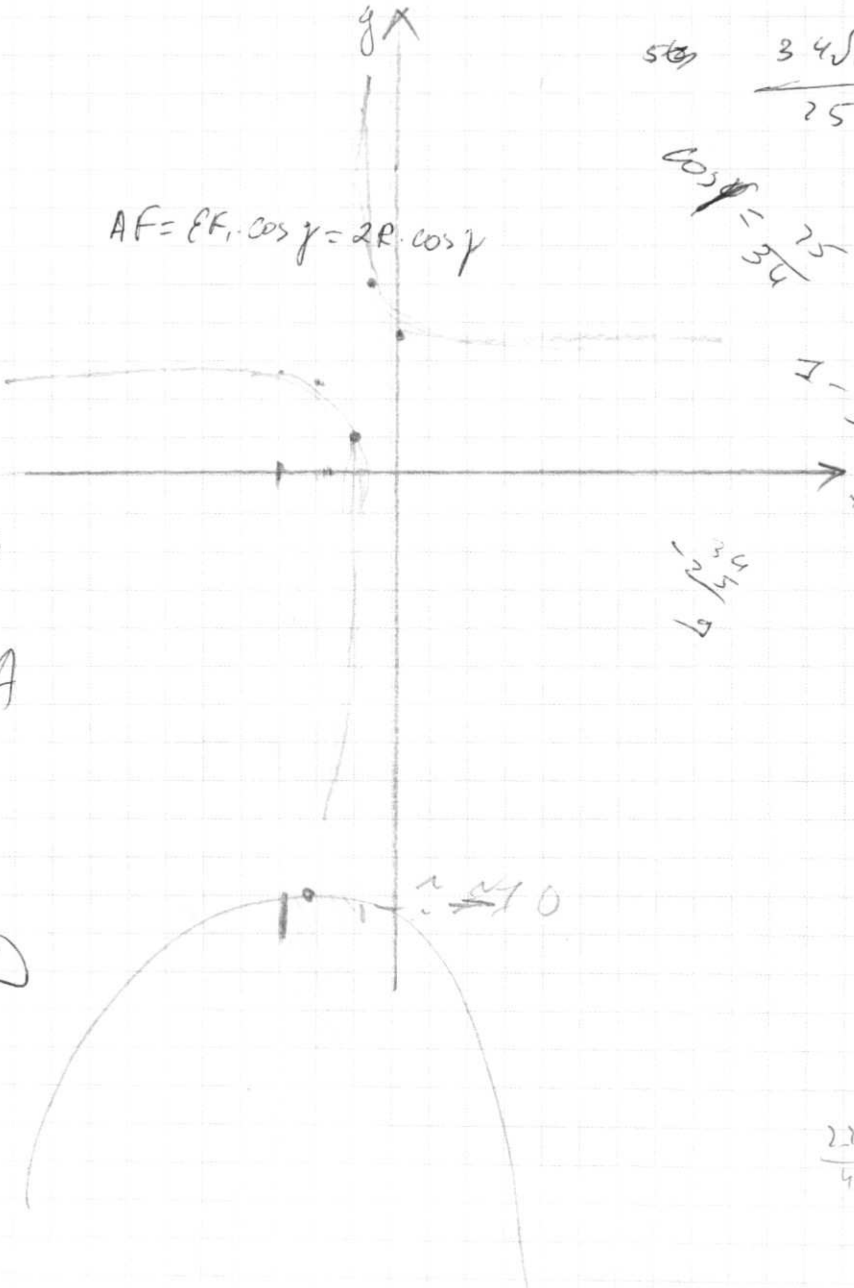
$AF = FF_1 \cdot \cos\gamma = 2R \cdot \cos\gamma$

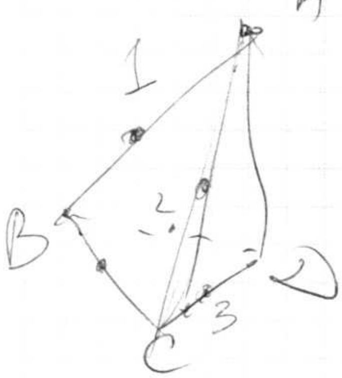
$\frac{34\sqrt{17}}{25}$

$\cos\varphi = \frac{15}{34}$

$R^2 - \frac{32}{25} R^2$

$\frac{32 - 25}{17}$





$\frac{225}{4} \approx 57$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{25}(x-2)^2=\cancel{25}\cdot 16$$

$$x-2=\pm 4 \Rightarrow x=\cancel{6};\ 2 \qquad x\geq 2$$

$$x=6;\ y=2$$

$$10(x-2)^2=25$$

$$x-2=\pm\sqrt{\frac{25}{10}} \Rightarrow \boxed{x-2=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}} \Rightarrow x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$y=$

$$y-x+1=0 \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$289 \cdot 4 = 1156$

$27 \cdot 27 = 189 \; 54 \; 729$

$615 \cdot 64 = 689$

---

(5) $f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)$

19

23

$$f(p)=f(p^2)+f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$f(p)=2f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f(p)=f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$p(x)=a_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\alpha_n}$, где a_i – простое

тогда $f(x)=\alpha_1\cdot f(a_1)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha_n\cdot f\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$$

k	$f(k)$
2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24	0
	1 – 5 7 10 14 15 20 21
	2 – 11 22 25
	3 – 13
	4 – 17 19
	5 – 23

$3(4x+3)=$

$=12x+9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2+18x>0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$ $\quad t>0 \Rightarrow |t| = t.$

$\cancel{4}5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

t4 $\quad 12^{\log_5 t} + t \geq 12^{\log_t 13}$

$\log_5 t + \log_{12} t \geq \log_t 13$

$\frac{1}{\log_t 5} + \frac{\varepsilon}{\log_t 12} \geq \log_t 13$

$\frac{\log_t 12 + \log_t 5}{\log_t 5 \log_t 12} \geq \log_t 13$

$\frac{\log_t 60}{\log_t 5 \log_t 12} \geq \log_t 13$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+2y+x-2=0$

$(y+1)^2 \quad (x+\frac{1}{2})^2 - 2{,}25$

$x-2y\geq 0$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$(4y-x-2)(y-x+1)=0$

$(y-\frac{x}{4}-\frac{1}{2})(y-x+1)=0$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2+9y^2-18y-16=0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2-25=0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y\geq 0\\ y-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}=0\end{cases}\\ \begin{cases}y-x+1=0\\ x-2y\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y\geq 0\\ y-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow\\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 2y\\ y-x+1=0\\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25\end{cases}\end{array}\right.$$

$y=x-1$

$x-2y=0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\ (x-2)^2+9(\frac{x}{4}-\frac{1}{2})^2=25\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 2\\ (x-2)^2+9(x-2)^2=25\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$16(x-2)^2+9(x-2)^2=25\cdot 16$

$10(x-2)^2=25 \Rightarrow (x-2)^2=\frac{25}{10} \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{\frac{25}{10}}$

$x-2=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq \cancel{\log} 13^{\log_{12}|x^2+18x|} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 13^{\log_{12}|x^2+18x|} \geq -x^2-18x$$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt5} + x^2 = 1$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\Downarrow$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) \cancel{+\sin 2\alpha}\ \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt5} \cancel{\pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta} - \frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} \cancel{\mp \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta} = -\frac{4}{5}$

$\frac{-2\cos 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$ $\qquad \pm\frac{4}{5}; \pm\frac{2}{\sqrt5} =$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\qquad \frac{2\cancel{4}\cdot\sqrt5}{\cancel{5}\cdot\cancel{2}}$ $\quad \sqrt5$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \;\Big|\; \cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm 2\sin^2\alpha \mp 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$ $\qquad tg\alpha=-1$, $tg\alpha=\frac{1}{3}$

1) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \;|: \cos^2\alpha \Rightarrow 2tg + 3tg^2 - 1 = 0$

2) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \;|: \cos^2\alpha$

$2tg + 3 - tg^2 = 0 \Rightarrow tg\alpha = -1; 3$