ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & 1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-5xy+3x-2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

1) $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

1) $x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

1) $(x-2y)^2=(y-1)(x-2)$

1) $x^2-4xy+4y^2=xy-2y-x+2$

1) $x^2+4y^2-4xy-xy+2x+x-2=0$

1) $x^2+4y^2-5xy+3x-2=0$

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-17$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

возведём 1-ое уравнение в квадрат, получим:

$(x-2y)^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

Данное условие равносильно следующему:

$(x-y-1)(x-4y+2)=0$ при условии $x \geq 2y$

Подставим эти условия во второе:

$x^2+9(x-1)^2-4x-18(x-1)=12$

$10x^2-40x+15=0$

$x = 2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

$y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

Для второго условия получаем:

$25x^2-100x-300=0$

$x=-2$; $x=6$

$y=0$; $y=2$

Проверим найденные пары и подставим их неравенство.

Условия удовлетворяют только $(6;2)$ и $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Ответ: $(6;2)$, ~~2~~ $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№3

Обозначим $x^2+18x=12^t$

Получим:

$5^t+12^t \cancel{\geq} 13^t$

поделим на 13^t и получим:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1$$

слева функция монотонно убывает, значит равенство может быть не более одного раза. Заметим, что оно достигает точки $t=2$. Значит t ~~меньше~~ ≤ 2

Получим неравенство $x^2+18x \leq 144 <=> x \in$ [-24; 6]

~~НЕ~~ ИЕ ОДЗ $x^2+18x>0 <=> x<-18$ или $x>0$ пересекаем получаем ответ

Ответ: $[-24;-18)$ и $(0;6]$

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

Преобразим второе, тогда получим, что

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{2}{5}$

Отсюда x из первого $\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

~~первое~~ преобротаем первое: $\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot$

$\cdot\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $+\sin(2\beta)\cdot$

Возможно 2 варианта из основного тождества

$\sin(2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Подставляем, получаем:

$\sin(2\alpha)\pm 2\cdot\cos(2\alpha)=-1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ABK = 90°$, значит $\angle KAB = 90° - \angle AKB = \alpha = \angle CAB$, откуда $CE = BE$, тогда 5 действие: EH ~~EH~~ высота между биссектрисами в р.б $\triangle CEB$, серединный перпендикуляр к хорде.

CB проходит через центр большой ω – FE проходит через O_1

6 действие. тогда $\angle EAF = 90°$, ~~тогда~~

$\angle AFE = 90° - \alpha = \angle ADC = \angle EDB$

7 действие: $CB = 8$, $BD = 17$, $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{25}{2} = DH = \frac{9}{2}$

8 действие: $EH = \sqrt{BH \cdot DH} = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$

9 действие: по теореме об отрезках хорд:

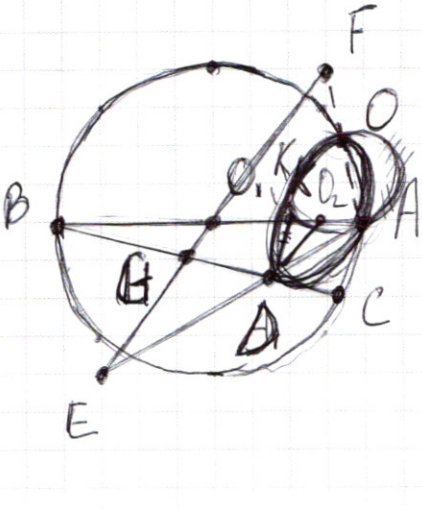
$FH = CH \cdot BH / HE = \frac{25}{2} \cdot \frac{25}{15}$

Значит, ~~два~~ на отрезке от 1 до 24 S принимает значение „0" 11 раз, „1" 7 раз, „2" 2 раза, „3" 1 раз, „4" 2 раза, „5" 1 раз. Заметим что $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$, то есть $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Тогда разделим все пары на (x, y) и (y, x). Из них либо для обеих $f = 0$, либо ровно для одной f принимает отриц. значение. Соответственно ~~Необходимо~~ вычесть из общего кол-во пар (x, y) для которых $f(x) = f(y)$, а оставшееся кол-во разделить на 2. Это и есть искомое кол-во пар.

Получаем $(24 \cdot 23 - 11 \cdot 10 - 7 \cdot 6 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) /$
$/ \, 2 = (552 - 110 - 42 - 4) / 2 = 198$

Ответ: 198



№4

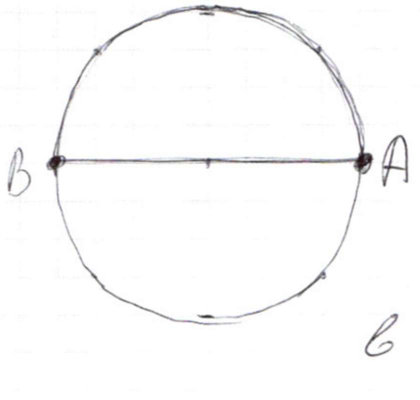
$BO_1 = r_1$, $O_1O_2 = r_1 - r_2$

1 действие: $\triangle BO_2D$: $(r_1 + r_1 - r_2)^2 = 17^2 + r_2^2$

2 действие: Пусть $FE \cap BC = G$.
$\angle ABC = \angle BDE = \alpha$, $\angle AEB = 90°$
значит $\angle DBE = 90° - \alpha$, $FE \perp BC$,
значит $\angle BEG = 90°$, $\angle AFE = \angle ABE$,
как вписанный

3 действие: так как угол $\angle AEF = \angle ABE$, то $AF = CE$

4 действие $\angle ABC = \angle AKB$, как вписанный в угол между касательной и хордой



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm 2\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = -1$$

$$2\cdot tg\alpha \pm 2(1-tg^2\alpha) = -1 - tg^2\alpha$$

Если бы $\sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ был равен только одному из этих чисел, то tg был бы максимум 2. Значит sin может принимать оба этих значения и нам соответственно нужно найти ~~мы нашли~~ корни этих уравнений: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$; $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = \frac13$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$; $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = \frac13$

№5

Посчитаем значение в простых числах: $f(2), f(3) = 0$; $f(5), f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17), f(19) = 4$; $f(23) = 5$

Зная данные значения и соотношения $f(ab) = f(a) + f(b)$ можно посчитать значения во всех натуральных числах: $f = 0$ в 1 (т.к $f(1\cdot1) = f(1) + f(1)$), 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24; $f = 1$ в 10, 14, 15, 20, 21, 21;

$f = 2$ в 22;