МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

V 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

V 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

V 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

V 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

V 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Замена

$26x - x^2 = t$

$$|-t|^{\log_5(12)} + t \geq 13^{\log_5(t)}$$

т.к.

$\log_5(t)$, то $t > 0$ #

$$t^{\log_5(12)} + t^{\log_5(5)} \geq t^{\log_5(13)}$$

при $t \leq 1$

$$t^{\log_5(12)} \geq \cancel{\log_5(13)}\, t^{\log_5(13)} > t^{\log_5(13)} - t^{\log_5(5)}$$

$$t^{\log_5(12)} + t^{\log_5(5)} \geq t^{\log_5(13)} \quad |: t^{\log_5(12)}$$

$$1 + t^{\log_5\left(\frac{5}{12}\right)} \geq t^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)}$$

$$t^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)} - t^{\log_5\left(\frac{5}{12}\right)} \leq 1$$

$$f(t) = t^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)} - t^{\log_5\left(\frac{5}{12}\right)}$$

$$f'(t) = \log_5\left(\frac{13}{12}\right) \cdot t^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)-1} - \frac{\log_5\left(\frac{5}{12}\right)}{t^{1-\log_5\left(\frac{5}{12}\right)}} =$$

$$= \frac{\log_5\left(\frac{13}{12}\right) \cdot t^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)} - \log_5\left(\frac{5}{12}\right)}{t^{1-\log_5\left(\frac{5}{12}\right)}} =$$

~~при $t > 0$~~

$$t^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)} \qquad \frac{-\log_5\left(\frac{5}{12}\right)}{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)} < 1$$

$$= \frac{\qquad}{t^{1-\log_5\left(\frac{5}{12}\right)}}$$

при $t > 1$

$f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) = 1$ имеет 1 решение $t = t_0$, при $t > t_0$ $f(t) > 1$, а при $t \leq t_0$ $f(t) \leq 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$t = 25$

$\left(\frac{13}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 \le 1 \qquad | \cdot 12^2$

$13^2 - 5^2 \le 12^2$

$13^2 \le 5^2 + 12^2$

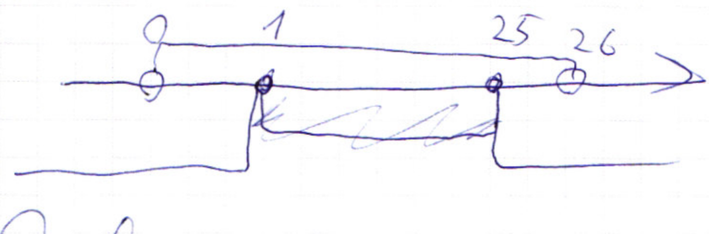
$13^2 = 13^2 \Rightarrow t_0 = 25$

$t \le 25$

Обратная замена.

$\begin{cases} 26x - x^2 \le 25 \\ 26x - x^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 26x + 25 \ge 0 \\ x(26 - x) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-25)(x-1) \le 0 \\ x(26-x) > 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

N5.

$f(2)=f\left(\frac{2a}{a}\right)=f(2a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(2a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(2a)=f(2)+f(a)$

$f(2a)=f(a)$

$f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(x/y)<0$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

Найдём значения функции ~~для от [4, 28~~

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=\left[\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(7)=[7/4]=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

$f(9)=f(3)+f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(\cancel{4}\,6)+f(2)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(5)+f(4)=1$

$f(21)=f(7)+f(3)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(6)+f(4)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(13)+f(2)=3$

$f(27)=f(9)+f(3)=$
$=0$

$f(28)=f(14)+f(2)=$
$=1$

$f(t)$, при $t \in Z$, $t \in [4; 28)$

$f(t)=0$ имеет 9 решений.

$f(t)=1$ имеет 8 решений.

$f(t)=2$ имеет 3 решения

$f(t)=3$ имеет 2 решения

$f(t)=4$ имеет 2 решения

$f(t)=5$ имеет 1 решение.

$f(x) < f(y)$, $x, y \in Z$

$4 \le x, y \le 28$

$f(y)=5$ – 1 вариант, тогда

$f(x)=$ 0 или 1 или 2 или 3 или 4.

~~24 решения~~ 24 варианта

$24 \cdot 1 = 24$ пары

$f(y)=4$ – 2 варианта

$f(x)<4$ $9+8+3+2=22$ варианта

$2 \cdot 22 = 44$ пары

$f(y)=3$ – 2 варианта

$f(x)<3$ $9+8+3=20$ вариантов

$20 \cdot 2 = 40$ пар.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

$f(y)=2$ – 3 варианта

$f(x)<2$ $9+8=17$ вариантов.

$3\cdot 17=51$ пара.

$f(y)=1$ – 8 вариантов

$f(x)=0$ 9 вариантов.

$9\cdot 8=72$ пары

Всего пар:

$24+44+40+51+72=108+123=231$ пара

Ответ: 231

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$

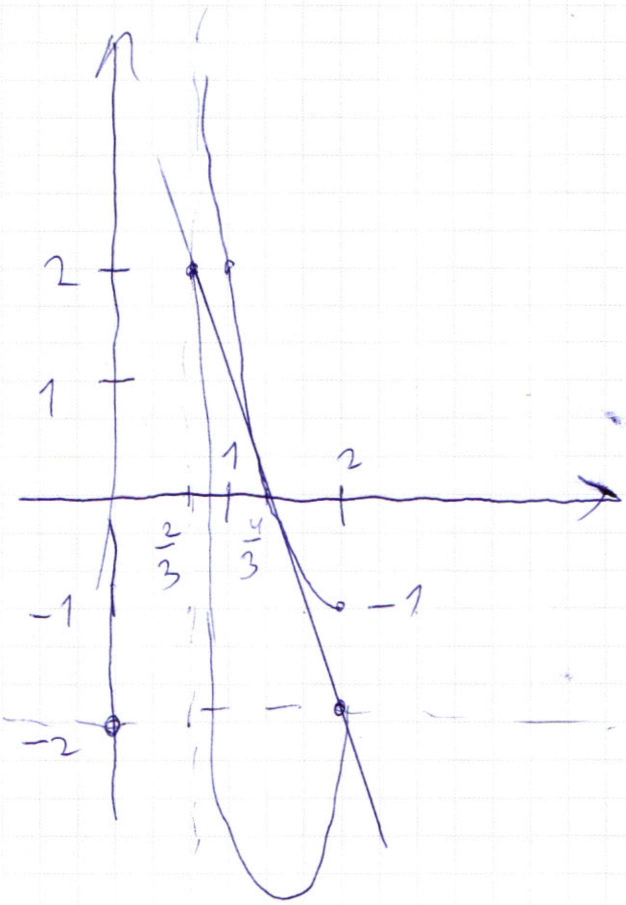
$$y_1=\frac{8-6x}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$$

$y_1(2)=-1$

$y_1(1)=2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$y_2 = 18x^2 - 51x + 28$

$y_2\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{18 + 28 - 51} = 18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 2$

$y_2(2) = 72 - 102 + 28 = -2$

$x_в = \frac{51}{36} = 1\frac{15}{36}$

если $ax+b$ проходит через точки $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$, то

$a\frac{2}{3} + b = 2$ $\qquad \frac{4}{3}a = -4$

$2a + b = -2$ $\qquad a = -3$

$-6 + b = -2$

$b = 4$ $\qquad -3x + 4$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

$$-3x+4 = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

$$6 = \frac{3x(3x-2)+4}{3x-2}$$

т.к. $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$, то $|\cdot 3x-2$

$$18x-12 = 9x^2-6x+4$$

$$9x^2-24x+16=0$$

$$(3x-4)^2=0$$

$x=\frac{4}{3} \Rightarrow$ прямая касается $\frac{4}{3x-2}$

$$ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$\Downarrow$$

при $x=\frac{2}{3}$ $y \geq 2$

при $x=2$ $y \geq -2$

Если ~~$y=kx$~~ $y\left(\frac{2}{3}\right)=2$ и $y(2)=-2$, то $ax+b \leq \frac{8-6x}{3x-2}$ и касается.

~~Если $y\left(\frac{2}{3}\right)>2$ или $y(2)>-2$, то~~

~~$ax+b=\frac{8-6x}{3x-2}$ ~~касает~~~~

$ax+b\le\frac{8-6x}{3x-2}$

$x=\frac{4}{3}$

$$\begin{cases}\frac{4}{3}a+b\le 0 & (1)\\ \frac{2}{3}a+b\ge 2 & (2)\\ 2a+b\ge -2 & (3)\end{cases}$$

$(2)+(3)$

$\frac{8}{3}a+2b\ge 0$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{3}a+b\ge 0\\ (1)\ \frac{4}{3}a+b\le 0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{4}{3}a+b=0$$

$4a=-3b$

$(2)\ \frac{-3b}{3\cdot 2}+b\ge 2$

$\frac{b}{2}\ge 2$

$b\ge 4$

$(3)\ -1{,}5b+b\ge -2$

$0{,}5b\le 2$

$b\le 4$

$b=4$

$4a=-3b=-12$

$a=-3$

Ответ: $a=-3$; $b=4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Замена №1

$2\alpha + 2\beta = \varphi$

$$\begin{cases} \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\varphi - 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (2) \end{cases}$$

(2)

$$\sin 2\varphi \cos 2\alpha - \cos 2\varphi \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = 1 - \frac{2}{17} = \frac{15}{17}$$

$$\cancel{\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \sqrt{1-\cos\varphi} = 2\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi} = -\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\frac{16}{17}} = -\frac{8}{17}}$$

$$\sin^2 2\varphi = 1 - \cos^2 2\varphi = \frac{8^2}{17^2}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{8}{17} \qquad \sin 2\varphi = -\frac{8}{27}$$

$$\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{17} = -\frac{2}{17} \qquad -\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \frac{2}{17} = -\frac{2}{17}$$

$$\sin 2\alpha = -1 - 4\cos 2\alpha \qquad \sin 2\alpha = -1 + 4\cos 2\alpha$$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ Замена:

$\cos 2\alpha = x$; $\sin 2\alpha = y$

(1) $y = -1 - 4x$

$17x^2 + 8x + 1 = 1$

$x = 0$

$x = -\frac{8}{17}$

~~$\sin 2\alpha =$~~

$y = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{15}{17}$

~~$tg\, 2\alpha = x\ x = 0$~~

$tg\, 2\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{15}{8}$

(2) $y = -1 + 4x$

$17x^2 - 8x + 1 = 1$

$x = 0$

$x = \frac{8}{17}$

$y = -1 + 4 \cdot \frac{8}{17} = \frac{15}{17}$

$tg\, 2\alpha = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$

$\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

$\cos 2\alpha = 0$ $\quad \sin 2\alpha = -1$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

~~$y = -1$~~ $\quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$tg\alpha = -1$

~~$\sin$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{8}{17} \\ tg 2\alpha = \frac{15}{8} \end{cases} (2) \\ \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{8}{17} \\ tg 2\alpha = -\frac{15}{8} \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

(2) $tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ | Замена: $tg\alpha = t$

$$-\frac{15t^2}{8} + \frac{15}{8} = 2t$$

$$15t^2 + 16t - 15 = 0$$

$$D = 256 + 900 = 4(8^2 + 15^2) = 4 \cdot 17^2 = 34^2$$

$$\cancel{tg\alpha} \ t_1 = \frac{-16 + 34}{30} = \frac{18}{30} = 0{,}6$$

$$t_2 = \frac{-16 - 34}{30} = -\frac{50}{30} = -\frac{5}{3}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha > 0}{2\cos^2\alpha > 0} \Rightarrow tg\alpha > 0$$

$$tg\alpha = 0{,}6$$

(3) $tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\quad \Big|\ tg\alpha = t$

$-\frac{15}{8} + \frac{15}{8}t^2 = 2t$

$15t^2 - 16t - 15 = 0$

$t_1 = -0,6$, нельзя, т.к. $\sin 2\alpha > 0$

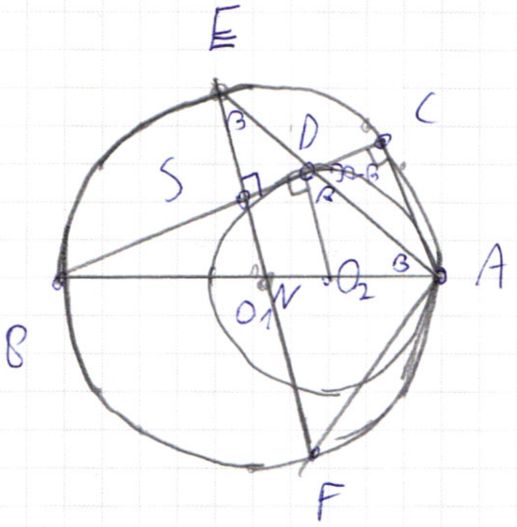
$t_2 = +\frac{5}{3}$

$tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

Ответ: $0,6$; $\frac{5}{3}$; -1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4



Дано: $EF \cap AB = т. N$

$CD = 12$, $BD = 13$

AB-диаметр.

Найти:

$R = O_1A$, $r = O_2A$

$\angle AFE$, $S_\triangle AEF$

1) O_2D - радиус, BD - кас. $\Rightarrow \angle BDO_2 = 90^\circ$

2) AB - диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$

$\angle ABC$ - общ. $\Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle O_2BD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{O_2B} \Rightarrow \frac{25}{13} = \frac{2R}{2R - r}$

$2R \cdot 25 - 25r = 2R \cdot 13$

$2R = \frac{25r}{12} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{25}{24}$

$R = 25x$, $r = 24x$

2) $O_2B = AB - O_2A = 2R - r = 50x - 24x = 26x$

$O_2D = r = 24x$

$\angle O_2DB = 90^\circ \Rightarrow$

$$O_2B^2 = O_2D^2 + BD^2$$

$$(26^2 - 24^2)x^2 = 13^2$$

$$100\,x^2 = 13^2$$

$$x = \frac{13}{10}$$

$R = 25x = \dfrac{25 \cdot 13}{10} = 32{,}5$

$r\ \cancel{R} = 24x = \dfrac{24 \cdot 13}{10} = 31{,}2$

3) $\angle O_2AD = B$

$O_2A = O_2D \Rightarrow \triangle O_2AD$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2AD = \angle O_2DA = B$

$\angle O_2DC = 90^\circ = \angle O_2DA + \angle ADC$

$\angle ADC = 90 - B$

$\angle EDB = \angle ADC = 90 - B$ (вертикальные)

$\angle ESD + \angle EDB + \angle S\cancel{DE}ED = 180^\circ$

$\angle SED = B$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

4) $\angle O_2AD = \angle SED = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow NA = NE$

$NA \cdot NB \overset{\text{как хорды}}{=} NE \cdot NF$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow NB = NF$

$NA = NE$ (док.) } $\Rightarrow AB = EF \Rightarrow$

$\Rightarrow EF \overset{\text{диаметр}}{=} 2R = 65 = \cancel{8}$

EF - диаметр. $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA = 90 - \beta = \angle ADC$

$\cancel{\sin \angle ADC =} \ tg \angle ADC = \frac{AC}{DC} =$

$= \cancel{\frac{\sqrt{AB^2 - BC^2}}{}} \quad \frac{O_2D \cdot \frac{AB}{O_2B}}{DC} =$

$= \frac{\cancel{34}\ 24x \cdot \frac{50}{26}}{12} = \frac{100}{26} x = \frac{100}{26} \cdot \frac{13}{10} =$

$= 5$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) б) $\frac{AE}{AF} = tg\angle AFE = 5$

$AE^2 + AF^2 = EF^2$

$26\,AF^2 = 65^2$

$AF = \frac{65}{\sqrt{26}}$

$AE = \frac{65\cdot 5}{\sqrt{26}}$

$S_{\triangle AFE} = \frac{AE\cdot AF}{2} = \frac{65^2\circ 5}{52} = \frac{13^{\cancel{2}}\cdot 5^3}{\cancel{13}\cdot 4} =$

$= \frac{1625}{4} = 400\frac{25}{4} = \cancel{406,25}\ 406,25$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$; $\angle AFE = arctg5$;

$S_{\triangle AFE} = 406,25$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

Замена

$a = x - 1$

$b = y - 6$

$$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq 6a \\ b^2 - 12ab + 36a^2 = ab \quad (2) \\ b^2 + 9a^2 = 90 \quad (3) \end{cases}$$

$(2) - (3)$

$27a^2 - 12ab = ab - 90$

$13ab = 90 + 27a^2$

$$\begin{cases} b^2 = 13ab - \cancel{1}36a^2 \\ b^2 = 90 - 9a^2 \end{cases}$$

$3b^2 = 360 - \cancel{1}3ab$

$13ab = 360 - 3b^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

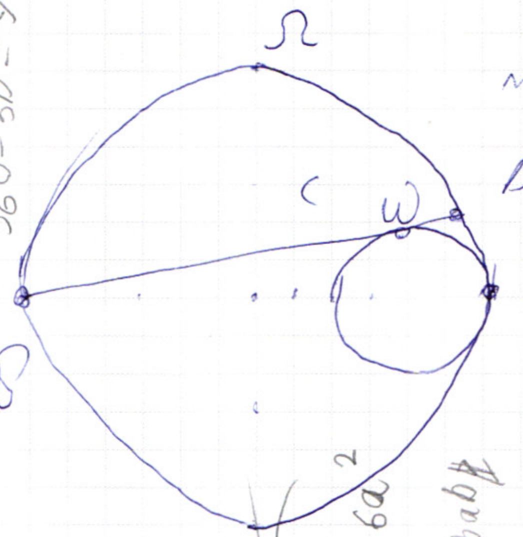
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$360-3b^2=90+27a^2$



№4

$13a(b-6a)=90+27a^2-78a^2-51a^2$

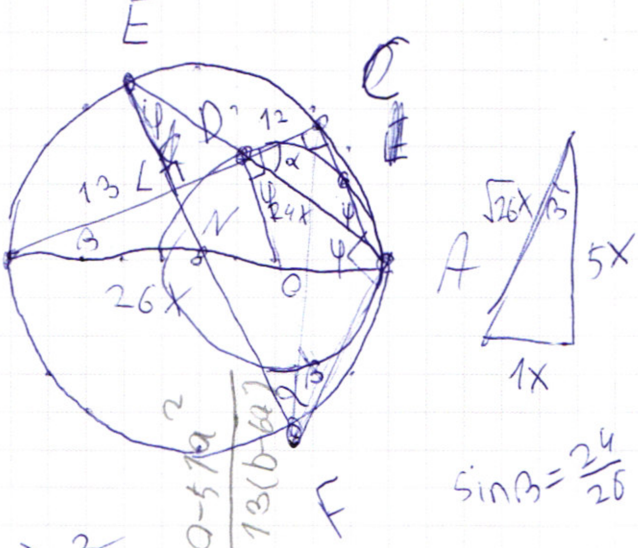
$13ab$

$\geq 6a^2$

$b=6a+ab$

$a=\frac{120-b^2}{b}$

$13ab=120-b^2$



$a=\frac{90-51a^2}{13(b-6a)}$

$\cancel{x^2}$

$2R \quad 4R^2$

$\sin\beta=\frac{24}{26}$

$\triangle AOD$-р/д.)

$tg\alpha=x$

$AC=\cancel{12x}\ 5x$

$AD=13x$

$\angle ADO=\angle DEL$

$\triangle DAE=\angle NEA \Rightarrow$

$\Rightarrow NA=NE$

$\cancel{\triangle BOD}$

$3b^2=360-39ab$

$b^2=120-13ab$

$ab=120-b^2$

$\triangle ABC \sim \triangle BOD$

$\frac{2R}{2R-r}=\frac{25}{13}$

$\triangle ACD$-прямоуг.

$AC^2=\frac{24^2\cdot169}{100}-144$ произв. хорд.

$tg\alpha$

$BN=FN$

$\alpha<ADC$

EF-диамет.

$2R\cdot13=25\cdot2R-25r$

$25r=12\cdot2R$

$\frac{R}{r}=\frac{25}{24}$

$R=25x$

$r=24x$

$\triangle BOD$

$(26x)^2-24^2x^2=169$

$x^2\cdot50\cdot2=169$

$x=\frac{13}{10}$

$b^2=36a^2+13ab$

$b^2=90-9a^2$

$b\geq6a$

36

$\sin\angle AFE=$

$=\frac{12}{24x}=\frac{1}{2x}=$

$=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-\frac{15}{8} = \frac{2x}{1-x^2}$ $x^2 \frac{15}{8} - \frac{15}{8} \cancel{+} 2x = 0$

$\cancel{\sin 2B + \frac{4}{\sqrt{17}}}$ $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos > 0$ $15x^2 - 16x - 15 = 0$

$x = \frac{16 \pm}{30}$

$256 + 900 =$

$= 1156 = 34$

$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi =$

$\sin(2\varphi - 2\alpha) + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}$

$= 1 - \frac{2}{17} = \frac{15}{17}$

$225 + 64 = 34$

$x = \frac{16 \pm 34}{30}$

$\sin 2\varphi \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\varphi + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}$

$\cos > 0$

$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha - \frac{15}{17} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-15x^2 + 16x + 15 = 0$

$15x^2 + 16x - 15 = 0$

$-\frac{8}{17} \cos 2\alpha + \frac{2}{17} \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$x = \frac{-16 \pm 34}{30}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = 1$

$x = 1 - 4y$

$x = 4y + 1$

$\sin 2\alpha = y$

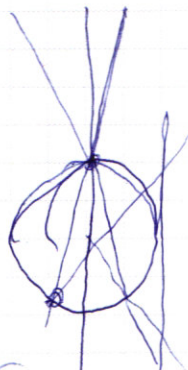
$x^2 + y^2 = 1$

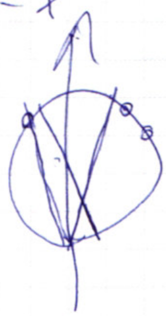
$\cancel{\sin} \cos 2\alpha = x$

$17y^2 + 8y + 1 = 1$

$y = 1 + 4x$

$17y^2 + 8y + 1 = 1$





$17y \pm 8 = 0$

$y = \pm \frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = \pm \frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = -\frac{15}{17}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \pm \frac{15}{8}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{15}{8}$

$\operatorname{tg}\alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\varphi = 2\alpha + 2\beta$

~~sin~~

$\sin(\varphi + 2\beta) = \sin\varphi \cos 2\beta + \cos\varphi \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos\varphi = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\cos 2\beta \pm 4 \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

~~sin 2α cos~~ $\sin 2\alpha = \frac{\cos 2\beta \pm 4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} - \frac{2}{17}$

$\cos^2\varphi = \frac{16}{17}$

$\underset{x}{tg\, 2\alpha} = \frac{2\,\underset{t}{tg\alpha}}{1 - tg^2\alpha}$

~~$\sqrt{3} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}$~~

~~2x~~ $2xt$

$tg\,2\alpha x^2 + 2x - 2tg\,2\alpha = 0$

$D = 4 - 8tg^2 2\alpha = 0$ $tg^2 2\alpha = \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overset{0}{f(2)} = f(2a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=13$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(10)=1$

$\frac{90}{3} \cdot 4 = 120$

$169a^2b^2 = 90^2 \cdot 4 - 270b^2 + 270\cdot 36a^2 - 8\cdot 10a^2b^2$

$2500a^2b^2 + 270b^2 = 90^2 \cdot 4 + 270 \cdot 36a^2$

$b^2(2500a^2 + 270)$

$f(2)=0$

f	знач.	f	знач.
2	0		
3	0		
4	0		
5	1		
6	1		
7	1		
8	0		
9	0		
10	1		

$f(x/y) < 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

~~$x=2a$~~

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(2a)$

$f(x) - f(2y) < 0$

$f(2y) = \overset{0}{f(2)} + f(y)$

$f(x) - f(y) < 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)