МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР 20001719

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 7 1 9

(заполняется секретарем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$

3

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ✓ ; $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. ✓

2) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha + \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}\right) =$

$= \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1$ $\quad [\sin 2\alpha = t]$

$\pm 2\sqrt{1-t^2} = -t-1$

$\Leftrightarrow 4(1-t^2) = (t+1)^2$

$4-4t^2 = t^2+2t+1 \quad (t\in[-1;1] \Rightarrow t^2\in[0;1])$

$4(1-t)(1+t) = (t+1)(t+1)$

$(4-4t-t-1)(1+t)=0$

$(3-5t)(t+1)=0$

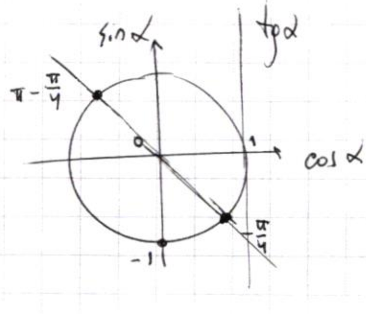
$t=-1;\ \frac{3}{5}$

3) при $t=-1$ $\quad \sin 2\alpha = -1$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

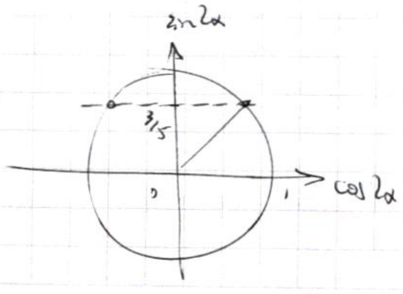
$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$ ✓



4) $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

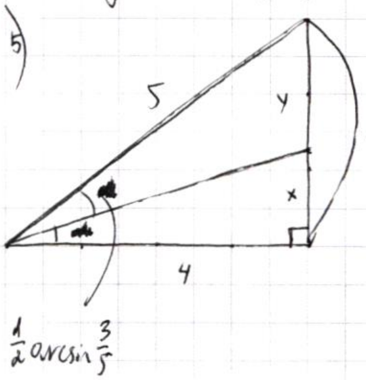
$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\frac{3}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\frac{3}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$



$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi/2 - \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^{\pm 1}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

5)



Двинемся до геометрии,

$$\begin{cases} \frac{y}{5} = \frac{x}{4} \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$x + \frac{5}{4}x = 3$$

$$\frac{9}{4}x = 3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{x}{4} = \frac{1}{3}$$

6) при $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = 3; \frac{1}{3}$

Ответ: $-1; 3; \frac{1}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

4

1) $\exists\ t = 10x - x^2.$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow t > 0; \Rightarrow |-t| = t$

$\hookrightarrow t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

2) $5^{\log_3(t)} = 5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 3}} = \left(5^{\log_5 t}\right)^{\frac{1}{\log_5 3}} = t^{\log_3 5}$

$\hookrightarrow t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

3) ~~рассмотрим~~ $t^{\log_3 n} = t^{\log_t n : \log_t 3} = n^{\log_3 t}$

$\hookrightarrow 3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

Не доказано ($f(x)$ - возр., $g(x)$ - возр. $\not\Rightarrow$

4) $3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t}$ ~~[illegible]~~ убывает монотонно от t; $\not\Rightarrow f(x)-g(x)$ убывает)

при $\log_3 t = 2$ $\hookrightarrow 3^2+4^2-5^2=0$

$\Rightarrow 3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$ при $\log_3 t \leq 2$

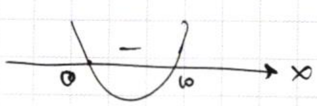
$t \in (0;9]$ ✓

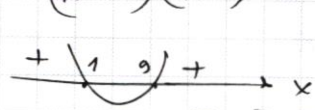
5) $10x - x^2 \in (0;9]$: ~~$10x-x^2$~~

$10x - x^2 > 0$ $\qquad$ $10x - x^2 \leq 9$

$x(x-10) < 0$ $\qquad$ $x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-9)(x-1) \geq 0$





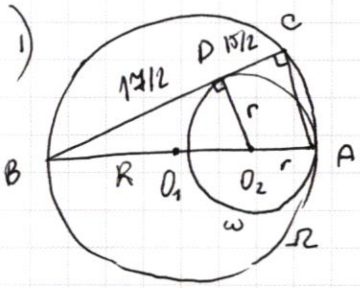
$x \in (0;10)$ $\qquad$ $x \in (-\infty; 1] \cup [9;+\infty)$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0;10) \\ x \in (-\infty;1] \cup [9;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (0;1] \cup [9;10)$

— ответ. ✓

4. 1)



3

1.1) $\angle ABC = \angle O_2BD$ (общ.);

AB – диам. $\Rightarrow \angle BCA = 90°$;

BC – кас. $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\angle BDO_2 = 90°$

$\Rightarrow$ по 2 углам $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

1.2) $BO_1 = O_1A = R$;

$O_2D = O_2A = r$. ($r<R$ – впис. внутр.)

пусть $BO_2 = 17x$. Тогда по (1.1) $O_2A = 15x$;

$$\begin{cases} BO_1 + O_1O_2 = 17x \\ O_2A = 15x \\ BO_1 = O_1O_2 + O_2A = \left(\frac{AB}{2} =\right) 16x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BO_1 = R = 16x \\ O_1O_2 = x \\ O_2A = r = 15x \end{cases}$$

1.3) т. Пиф. в $\triangle ABC$:

$\left(\text{из (1.1) } AC = \frac{15+17}{17} r = \frac{32}{17} r = \frac{15}{17} \cdot 32x\right)$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$\left(32x \cdot \frac{15}{17}\right)^2 + 16^2 = (32x)^2$$

$$\cancel{\left(\frac{60x}{17}\right)^2 + 1 = x^2} \qquad \left(\frac{15}{17}x\right)^2 + \frac{1}{4} = x^2$$

$$\left(1 - \frac{225}{289}\right) x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{64}{289} x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{289}{256}} = \frac{17}{16}$$

[Ответ (1):] $R = 16x = 17$; $r = 15x = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16} = 15\frac{15}{16}$

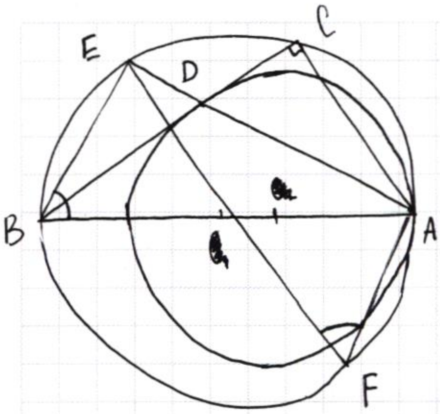
2) 2.1) $\deg_\Omega D = BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$$ED \cdot DA = \frac{15 \cdot 17}{4}$$

2.2) $CA = $ (1.3) $\frac{15}{17} \cdot 32x = \frac{15}{17} \cdot \frac{17}{16} \cdot 32 = 30$

2.3) по т. Пиф. в $\triangle CDA$ ($\angle C = 90°$) $\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 30^2 = AD^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD = 15\cdot\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = 15\cdot\sqrt{\tfrac{17}{4}} = \tfrac{15}{2}\cdot\sqrt{17}$$ ✓

2.4) $\angle AFE = \angle ABE = \frac{1}{2}\angle AO_1E$;

в ΔAO_1E:

$AO_1 = O_1E = R = 17$;

$$AE = AD + DE = \tfrac{15}{2}\cdot\sqrt{17} + \tfrac{15\cdot 17}{4} : \left(\tfrac{15}{2}\cdot\sqrt{17}\right) =$$
$$= \tfrac{15\sqrt{17}}{2} + \tfrac{17}{2} : \sqrt{17} = \tfrac{16}{2}\sqrt{17} = 8\sqrt{17};$$ ✓

~~⇒ по т. кос.~~ 4 $\cancel{2\cdot 17^2 - 2\cdot 17^2\cdot\cos\angle AO_1E = 64\cdot 17}$

$\cancel{17(1-\cos\angle AO_1E) = 32}$

$\cancel{\cos\angle AO_1E = 1 - \tfrac{32}{17} = \tfrac{17-32}{17} = -\tfrac{15}{17}}$

$\cancel{\cos^2\angle AFE = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{15}{17}\right) = \tfrac{1}{17}}$

~~[Ответ (2):]~~ $\cancel{\cos\angle AFE = \tfrac{1}{\sqrt{17}} \quad (\angle AFE \in [0;180^\circ])}$

$\cancel{\angle AFE = \arccos\tfrac{1}{\sqrt{17}}}$

~~3)~~

2.5) по т. син. для ΔAFE: $2R = \frac{AE}{\sin\angle F}$

$$\sin\angle F = \frac{AE}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$ ✓

$\angle AO_1E = 2\angle F \in [0;180^\circ] \Rightarrow \angle F \in [0;90^\circ] \Rightarrow \angle F = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$ [— ответ (2).]

2. 1) $x^2+36y^2-12x-36y=45$

$$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$ — эллипс

0

2) $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

~~x-12y~~ $\begin{cases} x^2-\cancel{\ }24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x-12y\geq 0 \end{cases}$

ОДЗ: $x\geq 12y$

$$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0;$$

$$-\left(x^2+\cancel{\ }+36y^2-36y-12x=45\right)$$

$$-26xy+108y^2+48y+13x=51$$

~~13x(1-2y)+~~ $13x(1-2y)+$

~~26y(...x~~

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. 1) $f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0$ ✓ $\rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a);$ ✓

5

$f(a) = f(a\cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0;$

$f(a^n) = f(a^{n-1}) + f(a) = \ldots = f(a)\cdot n;$ → верно и для $n<0$

2)

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25 ✓
	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

(простые числа: $f(p) = [\frac{p}{4}]$; составные: $f(ab) = f(a) + f(b)$)

3) $f(x/y) \overset{①}{=} f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y);$ ✓ $\quad x, y \in [2; 25] \cap \mathbb{N} \Rightarrow$

$f(y) \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

при $f(y)=0$ $\nexists$ (x,y) : $f(x/y)<0$ → 0 реш

при $f(y)=1$ [7 чисел] $\exists$ 10 ч. x $[f(x)=0]$: $f(x/y)<0$ → 70 реш.

при $f(y)=2$ [3] $\exists$ 7+10 x [0,1] → 51 реш.

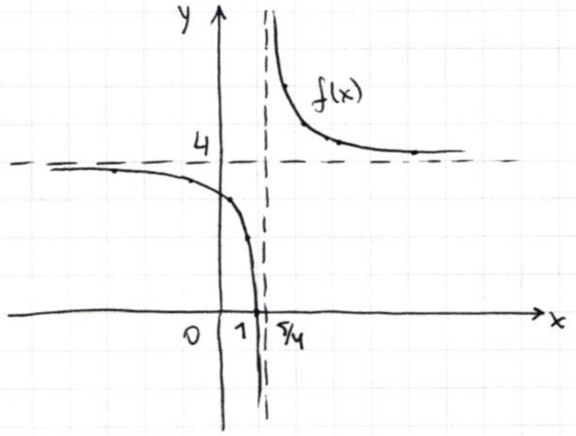
$f(y)=3$ [1] $\exists$ 7+10+3 → 20 реш

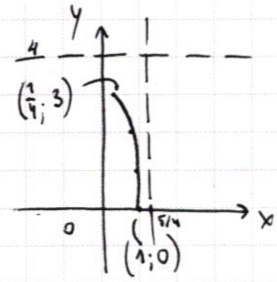
$f(y)=4$ [2] $\exists$ 7+10+3+1 → 42 реш.

$f(y)=5$ [1] $\exists$ 7+10+3+1+2 → 23 реш.

Ответ: 206 пар ✓

6. 1) $f(x)=\frac{16x-16}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} = 4+\frac{1}{x-5/4}$

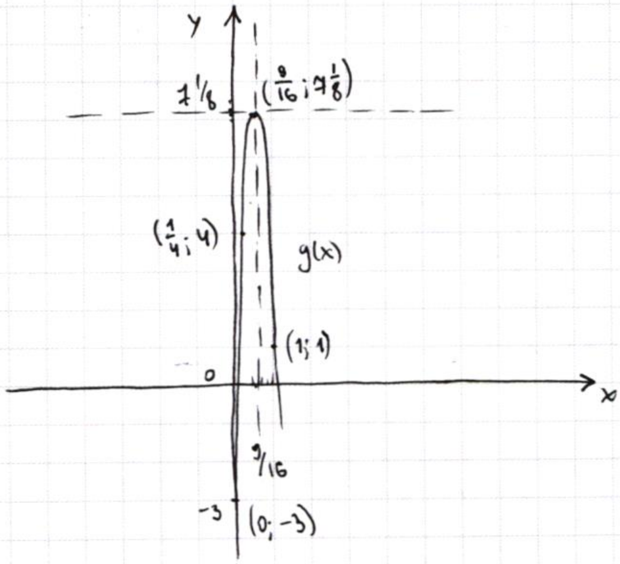


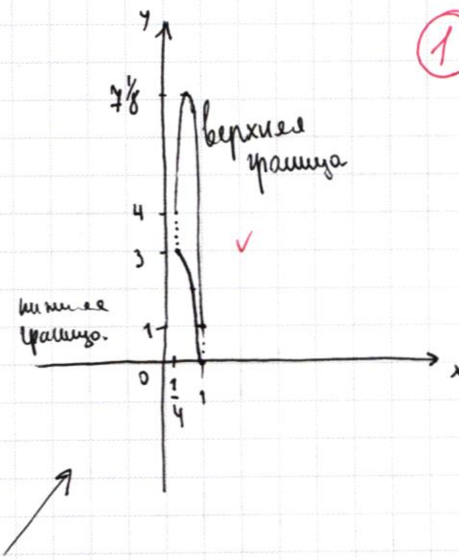


2) $g(x)=-32x^2+36x-3 = -2\left(16x^2-2\cdot\frac{9}{4}\cdot 4x\right)-3 = -2\left(\left(4x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right)-3 =$

$= -2\left(4x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{81}{8}-\frac{24}{8} = -32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{3\cdot 19}{8} =$

$= -32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+7\frac{1}{8}$





1

3) усл. выполн. $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow$ график $ax+b$ "лежит между" графиками (1) и (2) для $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

(верхняя гр.) $f(x)$ выпукл вверх $\Rightarrow$ достаточно рассмотреть границы: $a\cdot\frac{1}{4}+b \le 4$; $a\cdot 1+b \le 1$. (нижняя гр.) $g(x)$ выпукл вверх $\Rightarrow$ кроме границ ($a\frac{1}{4}+b \ge 3$, $a\cdot 1+b \ge 0$) нужно рассмотреть промежуточные значения. [$a<0$, очевидно]

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 7 1 9

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\forall x \in [1/4; 1]$ $\quad 4+\frac{1}{x-5/4} \le ax+b$

$$\frac{4x-5+1}{x-5/4} \le \frac{(x-5/4)(ax+b)}{x-5/4}$$

$$\frac{4x-4-(x-5/4)(ax+b)}{x-5/4} \le 0$$

$x-\frac{5}{4}<0 \Rightarrow$ $\quad 4x-4-(x-5/4)(ax+b) \ge 0$

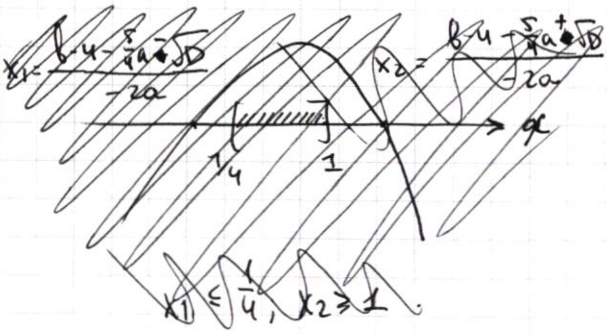
$$4x-4-ax^2-xb+\frac{5}{4}ax+\frac{5}{4}b \ge 0$$

$$-ax^2+x\left(4-b+\frac{5}{4}a\right)+\left(\frac{5}{4}b-4\right) \ge 0,$$ причём

$$D=\left(4-b+\frac{5}{4}a\right)^2-4\cdot(-a)\cdot\left(\frac{5}{4}b-4\right)=(4-b)^2+2(4-b)\left(\frac{5}{4}a\right)+\frac{25}{16}a^2+$$

$$+5ab-16a=16-8b+b^2+10a-\frac{5}{2}ab+\frac{25}{16}a^2+5ab-16a=$$

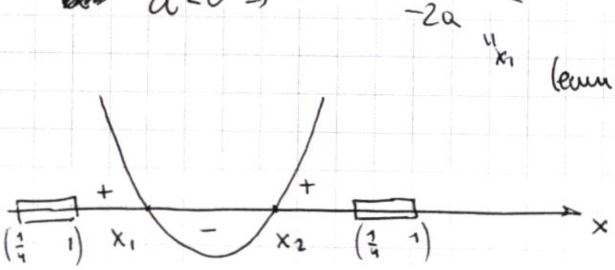
$$=16-8b+b^2+\frac{25}{16}a^2-6a+\frac{5}{2}ab$$



$$\cancel{\frac{b-4-\frac{5}{4}a-\sqrt{D}}{-2a} \le \frac{1}{4}}$$

$$\cancel{\frac{b-4-\frac{5}{4}a+\sqrt{D}}{-2a}}$$

$a<0 \Rightarrow$ $\quad \underset{x_1}{\frac{b-4-5/4a-\sqrt{D}}{-2a}} < \underset{x_2}{\frac{b-4-\frac{5}{4}a+\sqrt{D}}{-2a}}$; парабола ветвями вверх (если $\exists$)



при $D \le 0$ усл. вып.

при $D>0$ усл. вып. при $x_1 \ge 1$ или $x_2 \le \frac{1}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

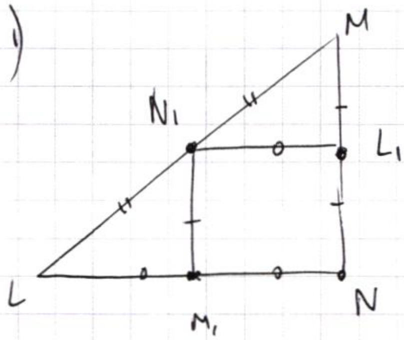
20001719

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

7\. 1)



$\exists$ сфера σ; пл-ть $(LMN) = \alpha$; $\sigma \cap \alpha = \omega_1$.

$L_1, N_1, M_1, N \subset \sigma \cap \alpha = \omega_1$

$\Rightarrow N_1L_1M_1N$ впис.;

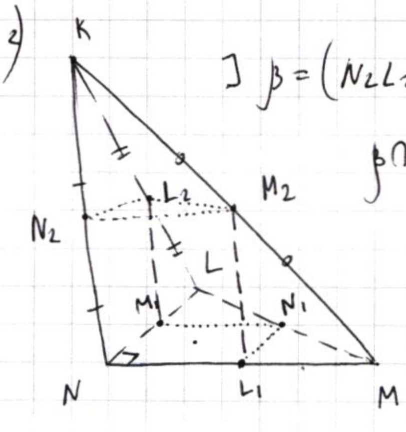
~~[illegible]~~

N_1L_1, N_1M_1 — ср. лин. $\triangle LMN \Rightarrow N_1L_1 \parallel$ и $= M_1N$, $N_1M_1 \parallel$ и $= NL_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_1L_1M_1N$ — пар-м;

$\Rightarrow N_1L_1M_1N$ — прямоуг. (= впис. пар-м); $\exists\ N_1N \cap L_1M_1 = O$ — ц. ω_1.

2)



$\exists\ \beta = (N_2L_2M_2)$; $\beta \cap \sigma = \omega_2$.

L_2M_2 — ср. лин в $\triangle KLM$;
N_2L_2, M_1L_2 — ср. лин. в $\triangle KLN$;
N_2M_2, M_2L_1 — ср. лин в $\triangle KMN$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} L_2M_1 \parallel \text{и} = NN_2 \parallel \text{и} = L_1M_2; \\ N_2M_2 \parallel \text{и} = NL_1,\ NM_1 \parallel \text{и} = N_1L_2,\ L_2M_2 \parallel \text{и} = M_1L_1. \end{cases}$

При этом $\text{Пр}_\beta O =$ ц ω_2.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 7 1 9

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D(f) = \mathbb{Q}_+$

$\forall p \qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (\alpha_i \in \mathbb{Z} / \{0\})$

$f(n) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots +$

$= \alpha_1 \cdot \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots$

$x, y \in \mathbb{N}$

2	3	5	7	11	13	17	19	23
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	1	1	2	3	4	4	5

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \qquad f(x/y) = f(x) - f(y) =$

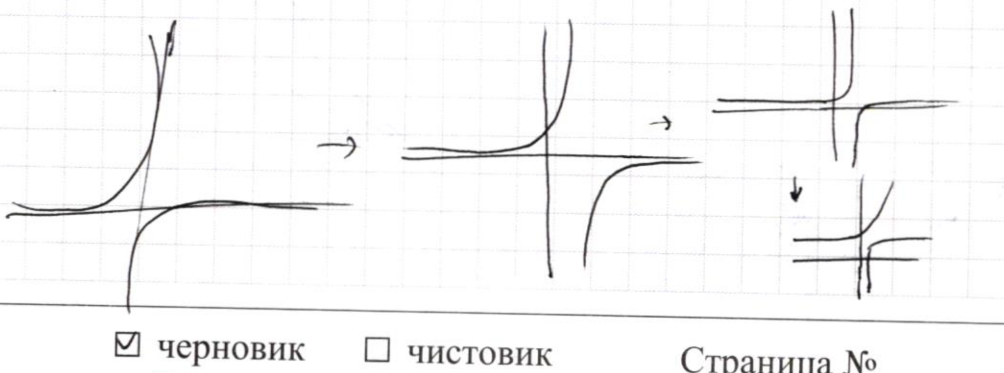
$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

верно $\forall\ x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

График

$4 + \frac{4}{4x-5}$

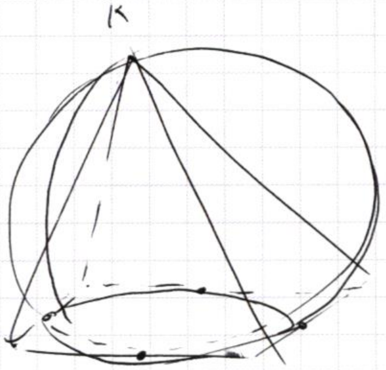
$4\left(1 + \frac{1}{x-5}\right)$

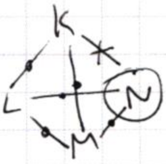


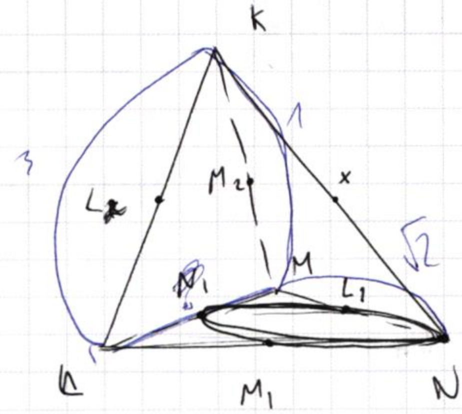
$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$

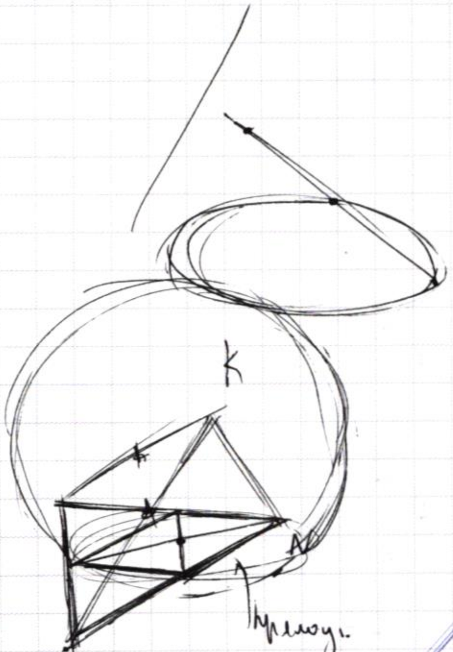
$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

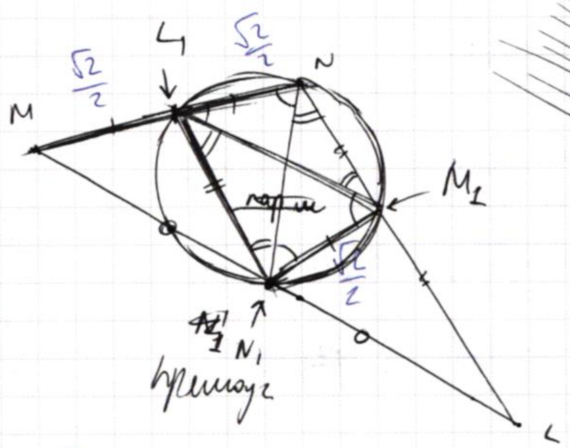
2	0	
3	0	
4		2 2
5	1	
6		2 3
7	1	
8		2 2 2
9		3 3
10		2 5
11	2	
12		2 2 3
13	3	
14		2 7
15		3 5
16		2 2 2 2
17	4	
18		2 3 3
19	4	
20		2 2 5
21		3 7
22		2 11
23	5	
24		2 2 2 3
25		5 5

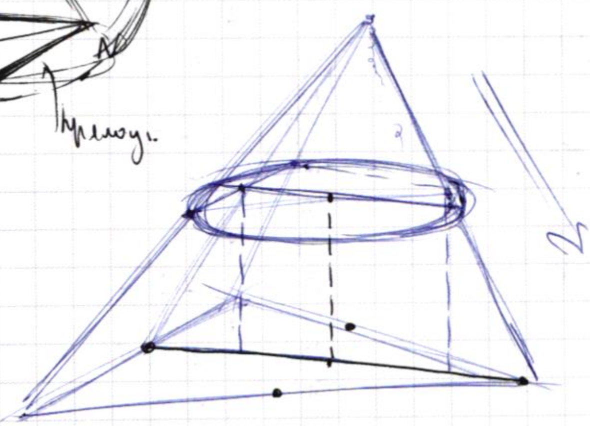






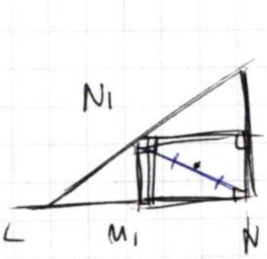


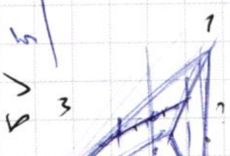




17*/33

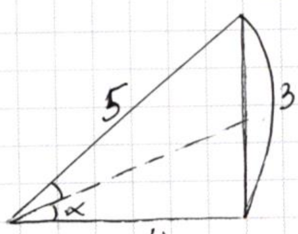
1 ✓ 3
2 ✗ 0
3 ✓* 4 6 ✗* 1 . 2
4 2/3 3 7 ✗* 1
5 ✓ 5





Хм... ошибка

sin 2α =



1: 2 > 1
3: 7 > 5
27: 27 + 64 < 125

5; 6.1
6.2*; 0
3.1*; 4.1
4.2*; 0
7.1*; 0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001719

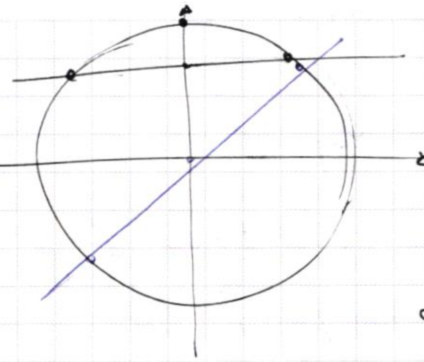
ШИФР

(заполняется секретарём)

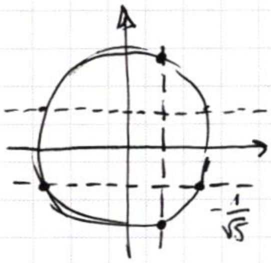
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$



пересекает ли FF BC в середине?



$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

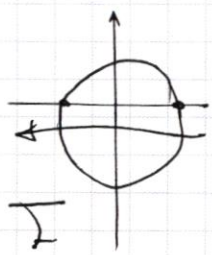
$-\frac{2}{5} = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos(2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta +$

$+\cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha +$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$+\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

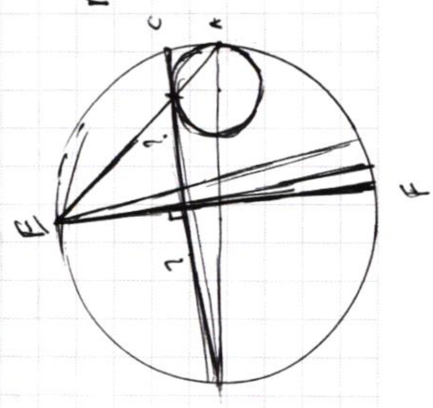


$x \pm 2\sqrt{1-x^2} = -1$

$\pm 2\sqrt{1-x^2} = -1-x$

$4(1-x^2) = (1+x)^2$

$4(1-x)(1+x) = (1+x)(1+x)$



$(1+x)(4-4x-1-x) = 0$

$(1+x)(3-5x) = 0$

$x = -1, \ +\frac{3}{5}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2}+2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{4}+\pi k$

$tg\alpha = 1$

где потерела половину корней?

$2\sin\alpha\cos\alpha = -1, \ +\frac{3}{5}$

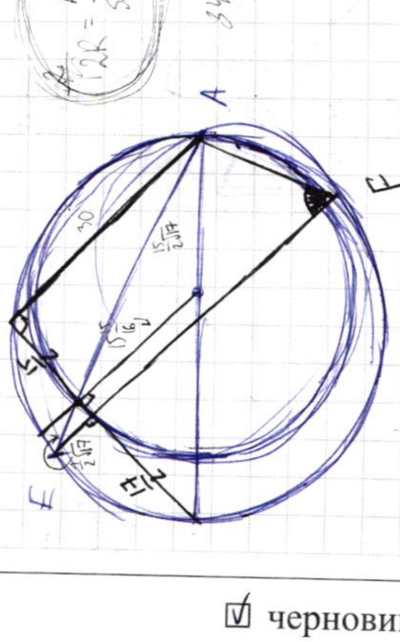
$\frac{AE}{\sin\angle F} = 2R$

$34 = \frac{8\sqrt{17}}{4\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

$\cos 2\alpha = x$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = x$

$\cos^2\alpha = \frac{x+1}{2}$



$\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$(x-12y)^2 = x^2-24xy+144y^2$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-12x+36 \underline{-36} + 36(y^2-y+\frac{1}{4}) \underline{-9} = \underline{45}$

$(x-6)^2+36(y-\frac{1}{2})^2=90$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$[x-12 \geq 0]$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y\underbrace{-x+6}_{-(x-6)}$

$x^2+(x-6)=26xy-12y-144y^2$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

~~$|t|^{\log_3 4} \geq t+5^{\log_3(-t)}$~~

~~$(-t)^{\log_3 4} \geq$~~

~~$t=x^2-10x$~~

~~ОДЗ: $-t>0$~~

$t=10x-x^2 \quad (t>0)$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

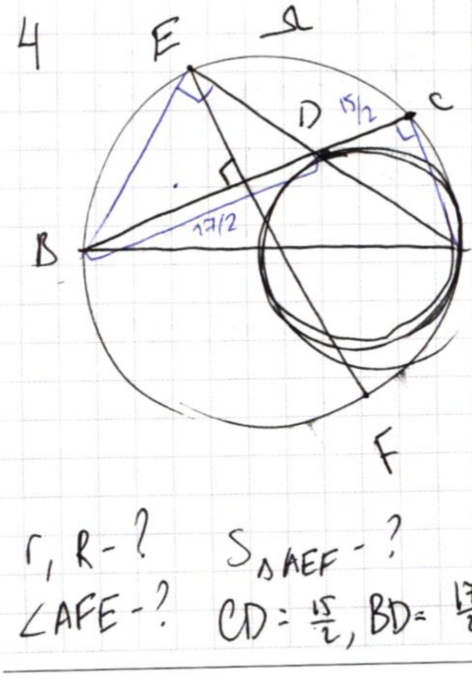
$\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

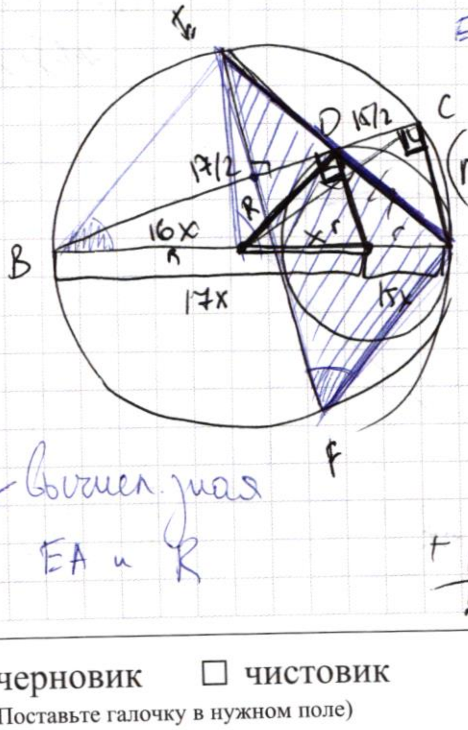
$5^{\log_3 t} = 5^{\log_5 t \cdot \frac{1}{\log_5 3}} =$

$= t^{\log_3 5}$

$16^2=256$

4 E Я





$ED \cdot DA = \frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}$

DA вычислить

$(r \cdot \frac{17+15}{17})^2 + 16^2 = (32x)^2$

$r=15x$ (?)

$R=16x$

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +17\ \ \\ \hline 289 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 15 \\ \hline 85 \\ +17\ \ \\ \hline 255 \end{array}$

← вычисл. зная EA и R

$r, R - ?$ $S_{\triangle AEF} - ?$

$\angle AFE - ?$ $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)