МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 20001939

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

~~найдем пересечение с другой прямой~~ ~~$a=\frac{3}{4}(x+2)$~~

~~$(x-2)^2+($~~

$y=x-1 \Rightarrow y_1=\frac{\sqrt{10}+4}{2}-1 \quad y_2=\frac{4-\sqrt{10}}{2}-1.$

Проверка $\frac{\sqrt{10}+4}{2}>2$ т.к $\sqrt{10}+4>4. \Rightarrow \frac{\sqrt{10}+4}{2}-1>1$ – подходит.

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}<2$ т.к $4-\sqrt{10}<4 \Rightarrow \frac{4-\sqrt{10}}{2}-1<1$ – подходит.

Найдем пересечение с другой прямой: $a=\frac{3}{4}(x+2)$

$(x-2)^2+(\frac{3}{4}x+\cancel{4}\frac{3}{2}-3)^2=25.$

$x^2-4x+4+\frac{9}{16}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}=25$

$\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{4}x-18\frac{3}{4}=0. \quad 25x^2-100x-75\cdot4=0.$

$5x^2-20x-60=0. \to x^2-4x-12=0 \quad \frac{D}{4}=4+12=16.$

$x_1=4+2=6 \quad x_2=-2 \quad$ ~~$y_1=$~~ $y_1=\frac{6+2}{4}=2 \quad y_2=\frac{-2+2}{4}=0.$

$6\geq2 \quad 2\geq1$ подходит. $-2<2 \quad 0<1$ – подходит.

Ответ $x=6\ y=2;\ x=-2\ y=0;\ x=\frac{4+\sqrt{10}}{2}\ y=\frac{2+\sqrt{10}}{2};\ x=\frac{\sqrt{10}-4}{2}\ y=\frac{\sqrt{10}-6}{2}$

Лишнее $\Rightarrow$ пкл=2

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$

заметим, что $x^2+18x>0$, т.к x^2+18x есть в $\log_{12}(x^2+18x)$

Пусть $x^2+18x=a,\ a>0. \Rightarrow 5^{\log_{12}a}+a\geq a^{\log_{12}13}.$

~~$5=a^{\log_a 5}$~~ ~~$5=a^{\log_a 5} \Rightarrow a^{\log_a 5\cdot\log_{12}a}+a\geq a^{\log_{12}13}$~~

$a=12^{\log_{12}a}; \Rightarrow 5^{\log_{12}a}+12^{\log_{12}a}\geq12^{\log_{12}a\cdot\log_{12}13}$

$\Rightarrow 5^{\log_{12}a}+12^{\log_{12}a}\geq13^{\log_{12}a}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001939

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & \text{I} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & \text{II} \end{cases}$$

I. $x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x\geq 2y$, т.к это корень. $(x-2)(y-1)\geq 0$ т.е $x\geq 2$ и $y\geq 1$ или $x\leq 2$ и $y\leq 1$.

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)\to x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2\to x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$(x-y-1)(x-4y+2)=0$ т.е $x=y+1$ или $x=4y-2$.

+2

II. $x^2+9y^2-4x-18y=12.\to x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25\to (x-2)^2+(3y-3)^2=25$.

Пусть $3y=a$ ($y=\frac{a}{3}$) $\to (x-2)^2+(a-3)^2=25$ — уравнение окружности в координатах x, a с радиусом 5., ~~a~~ и $x-1=y$ т.е ~~$3x-3a$~~.

$x-1=\frac{a}{3}\to 3x-3=a$ и $x+2=4y$ $x+2=\frac{4}{3}a$ $a=\frac{3}{4}(x+2)$

Найдем пересечения этих прямых ~~с~~ с окружностью

$(x-2)^2+(a-3)^2=25$, $a=3x-3\Rightarrow (x-2)^2+(3x-6)^2=25$.

$x^2-4x+4+9x^2-36x+36=25$. $10x^2-40x+15=0$ $2x^2-8x+3=0$.

$\frac{D}{4}=16-6=10\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{10}+4}{2}$ ~~$y_1=3\left(\frac{\sqrt{10}+4}{2}\right)$ $y_2=3\left(\frac{\sqrt{10}+4}{2}\right)$~~

~~Заметим, что $\frac{\sqrt{10}+4}{2}\geq 2$ т.к $\sqrt{10}+4>4$ и $\sqrt{10}>0$ и $3\left(\frac{\sqrt{10}+4}{2}\right)\geq 1$~~

~~т.к $\frac{\sqrt{10}+4}{2}\geq 2\Rightarrow 3\left(\frac{\sqrt{10}+4}{2}\right)\geq 1$. Значит эта пара подходит~~

~~$\frac{4-\sqrt{10}}{2}\leq 2$ т.к $4-\sqrt{10}\leq 4$ т.к $-\sqrt{10}\leq 0$, но $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}\right)3>1$ т.к~~

~~$4-\sqrt{10}>\frac{2}{3}$ т.к $\sqrt{10}<3\frac{1}{3}$ т.к $10<\frac{100}{9}$ $90<100\Rightarrow$ эта пара не подх.~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

20001939

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$5^{\log_{12} a} + 12^{\log_{12} a} \geq 13^{\log_{12} a}$. пусть $\log_{12} a = y$.

$5^y + 12^y \geq 13^y$ $\quad 13^y > 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$

Заметим, что $\left(\frac{5}{13}\right)^y$ — убывающая ф-ия по y как и $\left(\frac{12}{13}\right)^y$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y = 1$ решение только 1. и это $y=2$.

$\frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$ $\quad \frac{169}{169} = 1$ и. $\Rightarrow y \in (-\infty; 2]$

$\log_{12} a \in (-\infty; 2] \Rightarrow a \in (0; 144]$

$\Rightarrow 0 < x^2 + 18x \leq 144$

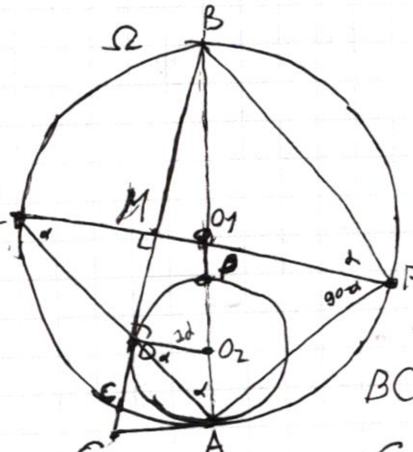
I. $x^2 + 18x > 0$ $\quad x(x+18) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

II. $x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$(x-6)(x+24) \leq 0 \Rightarrow x \in [-24; 6] \Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№4



Найти R, r; $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

$CD = 8$, $BD = 17$.

R-радиус Ω, r-радиус ω, B, A, O_1, O_2 — лежат на одной прямой по св-ву касающихся окружностей

Пусть касательная ~~к A~~ в точке A и BC пересек. в G. Пусть $GC = x$.

Тогда степень точки G отн. окружности $\Omega = GC \cdot GB = GA^2$

т.е ~~x(x+8)~~ $X(X+8+17)=GA^2$ но т.к GA и GD - касательные к ω, то $GA=GD$ по св-ву кас., а $GD=(X+8)$

т.е $X(X+25)=(X+8)^2$

$X^2+25X=X^2+16X+64$ $9X=64$ $X=\frac{64}{9}$. $AB\perp GA$ по св-ву кас.

$\Rightarrow AB^2=GB^2-GA^2$ по т. Пифагора

$AB^2=\left(\frac{64}{9}+25\right)^2-\left(\frac{64}{9}+8\right)^2$

$AB^2=(17)\cdot\left(33+\frac{128}{9}\right)$

$17\cdot\left(\frac{425}{9}\right)$ $AB=\sqrt{\frac{17^2\cdot 25}{9}}$ $AB=\frac{17\cdot 5}{3}=\frac{85}{3}$.

$AB=2R\Rightarrow R=\frac{85}{6}$. Степень точки B относ. мал. окружности равна $BD^2=BP\cdot BA$ $17^2=(2R-2r)2R$

$17^2=\left(\frac{85}{3}-2r\right)\frac{85}{3}\rightarrow$ $17=\left(\frac{85}{3}-2r\right)\cdot\frac{5}{3}$ $51=\frac{17\cdot 25}{3}-10r$

$10r=\frac{17\cdot 25}{3}-17\cdot 3$

$10r=\frac{17\cdot 25-17\cdot 9}{3}$ $10r=\frac{17\cdot 16}{3}$ ~~10~~ $r=\frac{17\cdot 16}{30}=\frac{17\cdot 8}{15}=\frac{136}{15}$

Пусть $\angle O_2AD=\alpha$. $O_2A=O_2D\Rightarrow$ ~~Δ~~ ΔO_2AD - р/б по определению $\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle O_2DA=\alpha$. $O_2D\perp BC$ по св-ву кас $\Rightarrow\angle EDE=$ ~~9~~ $180-90-\alpha=90-\alpha$

$\Rightarrow\angle FED=180-90+\alpha-90=\alpha$ $\angle BFE=\angle DAE=\alpha$ как опир. на одну дугу. $\angle BFA=90$ как опир. на диаметр.

$\Rightarrow\angle EFA=90-\alpha$. $tg\angle DO_2B$ т.е $tg\angle 2\alpha=\frac{DB}{DO_2}=\frac{17\cdot 15}{136}=\frac{15}{8}$

$\Rightarrow 2\alpha=arctg\frac{15}{8}\Rightarrow 90-\alpha=90-\frac{arctg\frac{15}{8}}{2}$. $\Delta BMO_1\sim\Delta BDO_2$ по 2 углам $\Rightarrow\frac{BM}{BD}=\frac{BO_1}{BO_2}$ $\frac{BM}{17}=\frac{\frac{85}{6}}{\frac{85}{3}-\frac{136}{15}}$ $\Rightarrow BM=\frac{85\cdot 17}{85\cdot 2-\frac{136\cdot 2}{5}}$

~~BM~~ $BM=\frac{85}{10-\frac{8\cdot 2}{5}}$ $BM=\frac{85\cdot 5}{50-16}=\frac{85\cdot 5}{34}=\frac{25}{2}=12,5\Rightarrow MD=4,5$ $=17-12,5=4,5$ по степени точки $CM\cdot MB=EM\cdot MF$ т.е $(8+4,5)\cdot 12,5=EM\left(\frac{85}{3}-EM\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 9 3 9

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$12,5^2 = x\cdot\left(\frac{85}{3}-x\right)$

$12,5^2=\frac{85}{3}x - x^2$

$x^2-\frac{85}{3}x+12,5^2=0$

$3x^2-85x+3\cdot12,5^2=0$ $\quad D=85^2-4\cdot3\cdot12,5^2=85^2-(25\cdot3)^2=85^2-75^2=$

$=10\cdot160=1600=40^2$ т.е $x=\frac{-40+85}{6}=$

$=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}=7,5$ $\quad x=7,5 \Rightarrow \cancel{EM} \Rightarrow \cancel{ED=7,5^2+}\ ED^2=EM^2+CM^2=$

$=7,5^2+12,5^2=\frac{15^2}{4}+\frac{25^2}{4}=\frac{225+625}{4}=\frac{850}{4}\Rightarrow\frac{425}{2}$

$ED=\sqrt{\frac{425}{2}}=5\sqrt{\frac{17}{2}}$ $\quad ED\cdot DA=CD\cdot DB$ по ст. точки

$\Rightarrow 5\sqrt{\frac{17}{2}}\cdot DA=8\cdot17.$ $\quad DA=\frac{8\cdot17}{\sqrt{\frac{17}{2}}\cdot5}=\frac{8\sqrt{17}\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow AE=\frac{8}{5}\sqrt{34}+5\sqrt{\frac{17}{2}}=\frac{16}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}+5\sqrt{\frac{17}{2}}=\frac{41}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}.$

$AF^2=EF^2-AE^2$ по т. Пиф $\Rightarrow \frac{85^2}{9}-\frac{41^2\cdot17}{25\cdot4}=\frac{85^2}{9}-\frac{41^2\cdot17}{100}=$

$=\frac{85^2\cdot100-41^2\cdot17\cdot9}{900}=\cancel{(850)^2-41^2}\ \frac{17(5\cdot85\cdot100-9\cdot41^2)}{900}=$

$=\frac{17\cdot(42500-1681\cdot9)}{900}=\frac{17\cdot(42500-15129)}{900}$

$\Rightarrow S=\dfrac{\frac{\sqrt{17(42500-15129)}}{30}\cdot\cancel{\sqrt{}}\ \frac{41}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}{2}=\dfrac{\frac{\sqrt{17\cdot27371}}{30}-\frac{41}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}{2}$

Ответ: $r=\frac{136}{15}$, $R=\frac{85}{6}$; $\angle=\dfrac{90-\operatorname{arctg}\frac{15}{8}}{2}$; $S=\dfrac{\frac{\sqrt{17\cdot27371}}{30}-\frac{41}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}{2}$

№5 $f(ab)=f(a)+f(b)$, $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ заметим, что $f\left(\frac{ax}{a}\right)=f(x)$, и $f\left(\frac{ax}{a}\right)=$

$=f(ax)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f(a)+f(x)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f(x) \Rightarrow f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$

$\Rightarrow$ ~~$f(a)=-f$~~ $f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$ Заметим, что ~~$f(2)=0$ т.к.~~

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ $f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$ $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$,

$f(13)=13$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$

$f(1\cdot x)=f(x)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

~~$f(4)=f(2)+f(2)$~~ Любое число ~~состоящее~~ из $x=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$

его $f(x)=$ ~~$f($~~ $\alpha_1 f(p_1)+\ldots+\alpha_n f(p_n)$ т.к мы можем

последовательно раскладывать. $\Rightarrow$

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(4)=0$, $f(5)=1$, $f(6)=0$, $f(7)=1$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(11)=2$,

$f(12)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$, $f(19)=4$,

$f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$.

чисел $\overset{f(x)}{=}0$ их 11, $\overset{f(x)}{=}1$ их 7, $\overset{f(x)}{=}2$ их 2, $\overset{f(x)}{=}3$ их 1, $=4$ их 2, $\overset{f(x)}{=}5$ их 1

Значит если $f(x)=0$, то $f(y)>0 \Rightarrow$ у нас $11\cdot 13$ вариантов

если $f(x)=1$, то $f(y)>1$, у нас $7\cdot 6=42$ вар

если $f(x)=2$, то $f(y)>2$ у нас $2\cdot 4=8$ вар

$f(x)=3$, $f(y)>3$ всего $1\cdot 3=3$ вар

$f(x)=4$, $f(y)>4$ всего $2\cdot 1=2$ вар

Всего: $2+3+8+42+143=55+143=198$ вар.

Ответ: 198 вариантов

5

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

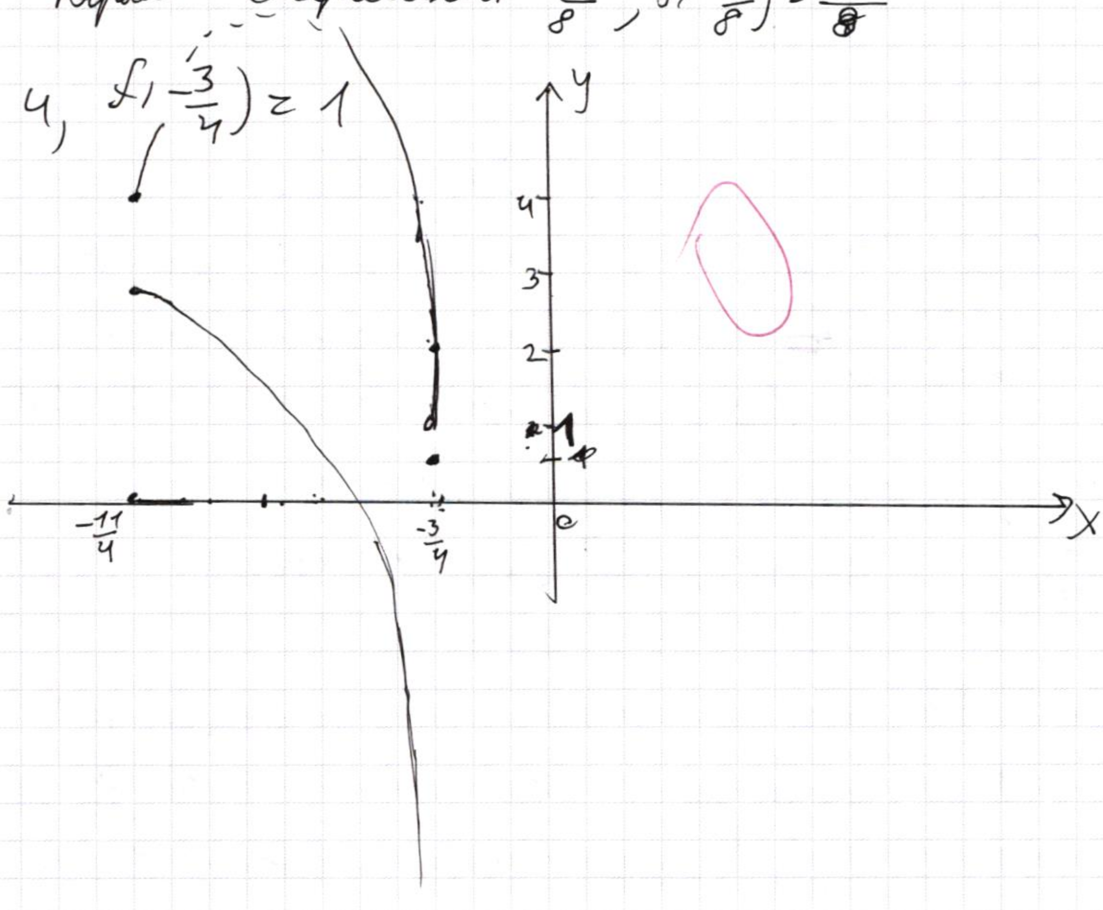
№6 $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$ – убывающая на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$f(-\frac{11}{4}) = 3+\frac{2}{-8} = 2{,}75$ $f(-\frac{3}{4})$ ~~не~~определено => график выглядит так:

$-8x^2-30x-17$ – парабола с вершиной $-\frac{15}{8}$, $f(-\frac{15}{8}) = \frac{89}{8}$

$f(-\frac{11}{4}) = 4$, $f(-\frac{3}{4}) = 1$



№1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$, $tg\alpha$-? $\frac{\sin\alpha}{\sin}$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-?

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta =\frac{24}{8}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta=\frac{4}{5}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=a$, $\sin 2\beta=b$.

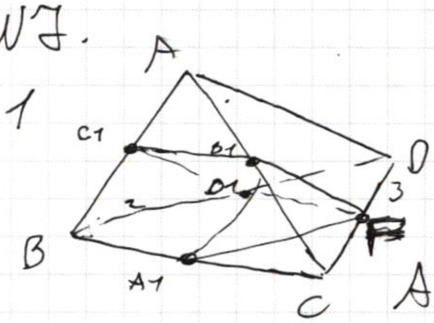
$\cos 2\alpha=\pm\sqrt{1-a^2}$ $\cos 2\beta=\pm\sqrt{1-b^2}$

(I) $a\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}\,b=-\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\sqrt{1-b^2}+\frac{2}{\sqrt5}b+a=-\frac{4}{5}$

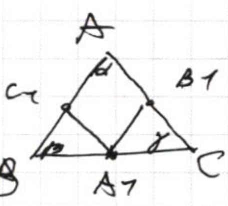
б

№7.



$AB=1, BD=2, CBD=3$

$A_1C_1AB_1$ лежат на одной сфере причем эти точки лежат в пл-ти $ABC \Rightarrow A_1C_1AB_1$ - вписанный четырехуг.



$\angle BA_1C_1=\angle C=\gamma$ по св-ву ср. линии

$\angle B_1A_1C=\angle B=\beta$ по св-ву ср. линии.

$\Rightarrow \angle C_1A_1B_1=180-\gamma-\beta$

1

а по св-ву вп. четырехуг. $180-\gamma-\beta+\alpha=180$

$\Rightarrow \alpha=\gamma+\beta$, а $\alpha+\beta+\gamma=180 \Rightarrow 2\alpha=180 \Rightarrow \alpha=90 \Rightarrow \angle A=90°$

Заметим, что C_1, B_1, F, D_1 лежат в одной плоскости и эти точки принадлежат окружности $\Rightarrow FD_1C_1B_1$ - вписанный (они лежат в одной пл-ти т.к $B_1F \parallel AD$ и $C_1D_1 \parallel AD$ по св-ву ср. линии)

$\Rightarrow B_1F \parallel C_1D_1$ и они равны $\frac{1}{2}AD \Rightarrow C_1B_1FD_1$ - параллелограмм

и он вписанный $\Rightarrow$ противоположные $\angle$ в Σ 180° и они равны $\Rightarrow$ это прямоугольник

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ $\quad \log_{13}(5^y+12^y) \geq \log_{13}13^y$

y

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

В. $5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$. $\quad 1+a^{\log_{12}\frac{12}{5}} - a^{\log_{12}\frac{13}{5}} \geq 0 \quad \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$

$1+x^{\log_{12}\frac{12}{5}} - x^{\log\frac{13}{5}} \geq 0$

$x^2+18x>0 \Rightarrow a>0$

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$ $\quad 2u+bz=1$

$a = 12^{\log_{12}a \cdot \log_{12}13}$

при $a=12$ $\quad \log_{12}5^2+12^2$

13

$5^{\log_{12}a} + a - a^{\log_{12}13} \geq 0$ $\quad \log_{12}\sqrt{5^2+12^2}$ $\quad a = 12^{\log_{12}a} + 5^{\log_{12}a} \geq$

$5^{\log_{12}a} = \left(a^{\log_a 5}\right)^{\log_{12}a}$

$a=$

$a^{\log_a 5 \cdot \log_{12}a} + a^1 - a^{\log_{12}13} \geq 0$ $\quad 5 = 12^{\log_{12}5}$

$a\left(a^{\log_a 5 \log_{12}a - 1} + 1 - a^{\log_{12}13-1}\right) \geq 0$ $\quad 12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12}a}$

a

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\quad \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

$\log_a 5 \cdot \log_{12} a = \log_{12} 5$

$c=b$

$a^{\log_{12}5} - a^{\log_{12}13} + a \geq 0$

~~log~~ $a^{\log_{12}5} + a^{\log_{12}12} \geq a^{\log_{12}13\sqrt{5^2+12^2}}$.

$a^{\log_{12}5}\left(1+a^{\log_{12}12-\log_{12}5} - a^{\log_{12}13-\log_{12}5}\right) \geq 0$

№4.

$33\cdot 9 = 270 + 27$

$1681 \cdot 9 = 15129$

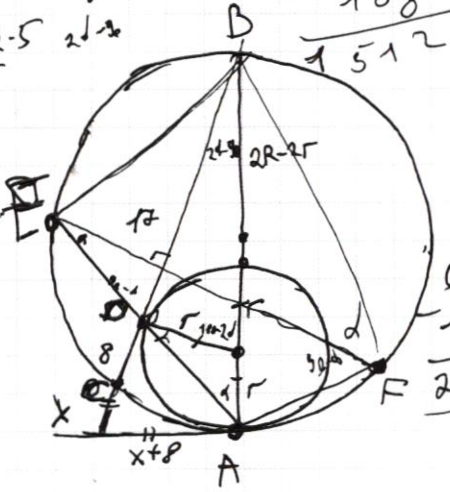
$17^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$297 + 128 = 425$

$289 = \left(\frac{85}{3} - 2r\right)\frac{85}{3}$

$16810 - 1681 = 15129$

$17^2 = \left(\frac{17\cdot 5}{3} - 2r\right)\frac{17\cdot 5}{3}$



r окр.

$\angle AFE,\ S_{\triangle AEF}$

$CD = 8,\ BD = 17$

$17 = \frac{17\cdot 5}{3}$.

$17 = \frac{17\cdot 25}{9} - \frac{10}{3}r$

$42500 - 15129 = 27371$

$\frac{\ldots}{9} = \frac{136}{9}$

$9\cdot 8 = 72$

$\frac{10}{3}r = 17\cdot\frac{25}{9} - 17$

$\frac{10}{3}r = \frac{17\cdot 16}{9}$

$r = \frac{17\cdot 16}{30}$

$2R-2r$

$x(x+25) = (x+8)^2$

$\cancel{x^2} + 25x = \cancel{x^2} + 16x + 64$

$9x = 64$

$x = \frac{64}{9} = \frac{81-17}{9}$

$r^2 + 17^2 = (2R-r)^2$

$\cancel{r^2} + 17^2 = 4R^2 - 4rR + \cancel{r^2}$

$17^2 = 4R^2 - 4rR$

$\frac{64+72}{9}$

$9 - \frac{17}{9} + 25 =$

$= 34 - \frac{17}{9} = 34 - 2 + \frac{1}{9} = 32\frac{1}{9}$

$32\cdot 9 = 270 + 18 = 288 +$

$\left(\frac{289}{9}\right)^2 -$

$\left(\frac{17}{3}\right)^2 - \left(\frac{136}{9}\right)^2 = \left(\frac{289}{9} - \frac{136}{9}\right)\left(\frac{289+136}{9}\right)$

$289 - 136 = 153$

$\frac{153}{9}\cdot\frac{425}{9}$

$425 : 17 = 25$, $425 - 34 = 85$

$289 + 136 = 425$

$17\cdot\frac{425}{9}$

$\sqrt{\frac{17^2\cdot 25}{9^2}}$

$\frac{17\cdot 5}{3}$

$\frac{85}{3} = 2R \Rightarrow R = \frac{85}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001939
(заполняется секретарем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

любое $f(x)$ раскладывается на простые $\Rightarrow$

$f(\frac{p_1}{p_2}$

опонопеотр

$f(p_1)$ $f(\frac{1}{y})$ $f(\frac{10}{2}) =$

$f(10) = f(2) + f(5) =$ $f(\frac{ax}{a}) = f(ax) + f(\frac{1}{a})$

$f(a) + f(x) +$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24,$

5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23

$22 - 17 = 4$

$\frac{4 \cdot 11}{2}$

$-\frac{30}{8 \cdot 16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7{,}5}{4}$

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$-8 \cdot (\frac{11}{4})^2 + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 =$

$= -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 =$

$= \frac{15 \cdot 11 - 11 \cdot 11}{2} =$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$3 \quad \frac{2}{4x+3} = -8x^2 - 30x - 20$

$\frac{1}{4x+3} = -4x^2 - 15x - 10$

$x = -\frac{11}{4}$ $3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{2}{8}$ $4x+3$

$x = -\frac{3}{4}$

$x = -1$

$3 - \frac{1}{4}$

$1 = (-4x^2 - 15x - 10)(4x+3)$

$1 = -16x^3 - 12x^2 - 60x^2 - 45x - 40x - 30$

$-16x^3 - 72x^2 - 85x - 31 = 0$

$+16 + 85 - 72 - 31$ $10 \cdot 103$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{15^2}{8} - 17$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -8x^2 - 30x - 17$$

$-\frac{8 \cdot 15^2}{8} + 30 \cdot \frac{15}{8}$

$12x + 11 = -(4x+3)(8x^2 + 30x + 17)$

$-8\frac{15^2}{8^2}$

$12x + 11 = -(32x^3 + 120x^2 + 68x + 24x^2 + 90x + 51)$

$\frac{225 - 80 \cdot 136}{8}$

$12x + 11 = -(32x^3 + 144x^2 + 158x + 51)$

$64 + 25$

$+32x^3 + 144x^2 + 170x + 62 = 0$

$\frac{89}{8}$

9.

$16x^3 + 72x^2 + 85x + 31 = 0$

$27 \cdot 16$

$-\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

2

43

$16 \cdot (-8) + 72 \cdot 4 - 85 \cdot 2 + 31$

$-\frac{1}{8}$

$-8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 =$

$-128 - 170 + 288 + 31$

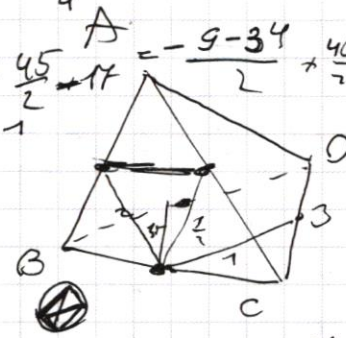
$-\frac{16}{8} =$

$-4{,}5 + \frac{45}{2} - 17 = \frac{-9-34}{2} + \frac{45}{2}$

$\frac{-16}{8} + \frac{72}{4} + 85$

$\frac{16}{} - \frac{1}{4} + \frac{72}{16} + \frac{85}{4} + 31$

$\frac{89}{8}$



$-\frac{84}{4} + \frac{18}{4} + 31$

$\frac{7{,}5}{4}$

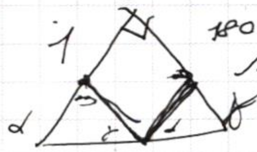
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le 2x + 8 \le -8x^2 - 30x - 17$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$



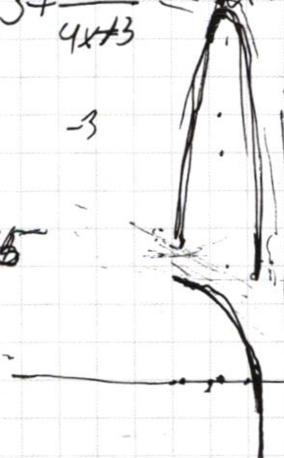
$180 - \alpha - \gamma + \beta = 180$

$\beta = \alpha + \gamma$

$\beta = 90^\circ$

$3 + \frac{2}{-11+3} = -3$

$= 3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = 2{,}75$



$2\sqrt{1+x^2}$

$\frac{2}{4x+3} = -3$

$2 = -12x - 9$

-11

$11 = -12x \quad x = -\frac{11}{12}$

$-8\left(\frac{121}{16}\right)$

$-\frac{121}{2} + 30 \cdot \frac{11}{4} = \frac{15 \cdot 11}{2} -$

$\frac{24 \cdot 11}{2}$ 22 $- 17 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

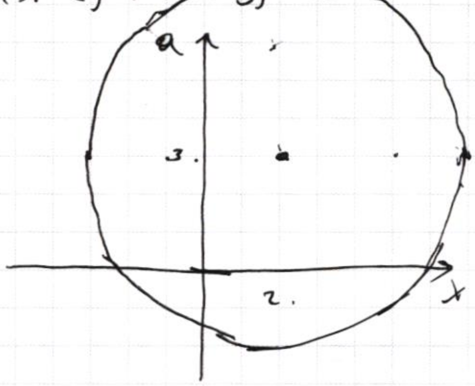
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$ $\quad 3y=a \quad y=\frac{a}{3}$

$(x-2)^2+(a-3)^2=25$



$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$(x-y-1)(x-4y+2)$

$(x-y-1)(x-4y+2)=x^2-4xy+2x-xy+4y^2-2y-x+4y-2=$

$=x^2+4y^2-5xy+x+2y-2.$

$18\cdot 4=72+3=75$

$18\cdot 4=40+32=$

$(x-y-1)(x-4y+2)=0$

$x=y+1$ либо $x=4y-2.$

$x=\frac{a}{3}+1 \qquad x=\frac{4}{3}a-2 \qquad a=\frac{3(x-2)}{4}$

$a=3x-3$

$(x-2)^2+(3x-6)^2=25$

$x^2-4x+4+9x^2-36x+36=25$

$10x^2-40x+40=25$

$2x^2-8x+8=5$

$2x^2-8x+3=0 \quad \frac{D}{4}=16-6=10 \quad x=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 9 3 9

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1, №2, №3, №4, №5, №6, №7.

$3+4+5+5+5+5+6 = 33$ max

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$tg\,\alpha - ? = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

I. $-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} + \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{h}{7+x} = h$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

9

$x > 2y$.

~~$y(x-2) - (x-2)$~~

$(y-1)(x-2)$

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2$

~~$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 5^2$~~

$x^2 - 4yx + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$.

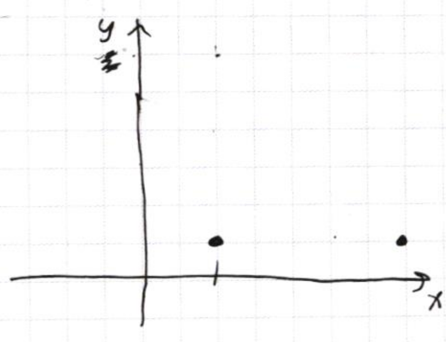
$3y - 3 = 5$

$3y = 8 \quad 3y =$

$y = \frac{8}{3}$

$(7+x)(9-x)$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$



75:3 = 15

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)