МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР 2 0 0 0 0 6 5 7

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

ОДЗ:

$2xy - 12y - x + 6 \geq 0$

$x - 12y \geq 0$

1) $x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 =$

$= x^2 + 36y^2 - 12x - 36y + 45$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 - 90 = 0$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

2) $x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 + x - 26xy + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$x^2 + (1-26y)x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$D = (1-26y)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) = 1 - 52y + 676y^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) =$

$= 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24 = 100y^2 - 100y + 25 =$

$= 25 \cdot (2y-1)^2 = (5(2y-1))^2$

$x_{1,2} = \dfrac{26y - 1 \pm (10y - 5)}{2}$ $\quad x_1 = \dfrac{36y-6}{2} = 18y - 3$

$x_2 = \dfrac{16y+4}{2} = 8y + 2$

+2

1 $((18y-3)-6)^2 + (6y-3)^2 - 90 = 0$

$(18y-9)^2 + (6y-3)^2 - 90 = 0$

$(9(2y-1))^2 + (3(2y-1))^2 - 90 = 0$

2 $((8y+2)-6)^2 + (6y-3)^2 - 90 = 0$

$(8y-4)^2 + (6y-3)^2 - 90 = 0$

$(4(2y-1))^2 + (3(2y-1)^2 - 90 = 0$

$$81(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 - 90 = 0$$

$$90(2y-1)^2 = 90$$

$$(2y-1)^2 = 1$$

$$|2y-1| = 1$$

1) $2y-1 \geq 0$, $\underline{y \geq \frac{1}{2}}$

$2y-1=1$

$2y = 2$

$y = 1$ уд. услов.

$x = 15$

2) $2y-1<0$, $y < \frac{1}{2}$

$-2y+1=1$

$2y-1=-1$

$2y=0$

$y=0$ удовл. услов

$x=-3$

$$16(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 - 90 = 0$$

$$25 \cdot (2y-1)^2 = 90$$

$$(2y-1)^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$$

$$|2y-1| = \sqrt{\frac{18}{5}}$$

1) $y \geq \frac{1}{2}$

$2y-1 = \sqrt{3,6}$

$y = \frac{\sqrt{3,6}+1}{2}$ удовл. услов.

2) $y < \frac{1}{2}$

$2y-1 = -\sqrt{3,6}$

$y = \frac{-\sqrt{3,6}+1}{2}$ удовл. услов

Проверка

$x = 18y-3$

$x = 8y+2$

$$\begin{cases} 2xy - 12y - x + 6 \geq 0 \\ x - 12y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot(18y-3)\cdot y - 12y - (18y-3) + 6 \geq 0 \\ 18y - 3 - 12y \geq 0 \end{cases}$$

$y = 1$

$2\cdot(18-3)\cdot 1 - 12 - (18-3) + 6 \geq 0$

$2 \cdot 15 - 12 - 15 + 6 \geq 0$

$15 - 6 \geq 0$

$9 \geq 0$ верно

$6 - 3 \geq 0$

$3 \geq 0$ верно

$\underbrace{y = 1 \text{ — верно}}$

$y = 0$

$0 - 0 + 3 + 6 \geq 0$

$9 \geq 0$ верно

$-3 \geq 0$ неверно

$\underbrace{y = 0 \text{ не удовл. услов}}$

какому условию?

$$\begin{cases} 2(8y+2)\cdot y - 12y - (8y+2) + 6 \geq 0 \\ 8y + 2 - 12y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot(8y^2+2y) - 12y - 8y - 2 + 6 \geq 0 \\ 2 - 4y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16y^2 + 4y - 12y - 8y + 4 \geq 0 \\ y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\underbrace{y = \frac{\sqrt{3,6}+1}{2} \text{ не удовл. услов.}}$

$\frac{-\sqrt{3,6}+1}{2} \leq \frac{1}{2}$ верно

$16y^2 - 16y + 4 \geq 0$

$(4y-2)^2 \geq 0$

$(2y-1)^2 \geq 0$

$2y-1 \geq 0$

$y \geq \frac{1}{2}$

$4y^2 - 4y + 1 \geq 0$

$(2y-1)^2 \geq 0$

какому условию?

$\underbrace{y = \frac{-\sqrt{3,6}+1}{2} \text{ не уд. услов}}$

Ответ: $x = 15$, $y = 1$

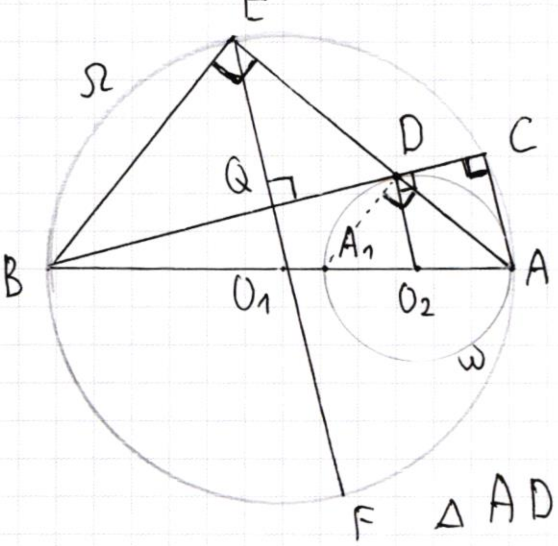
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 0 6 5 7
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 4

Пусть $BC \cap EF = Q$

Проведём BE и AC

т.к. AB - диаметр окр $\Omega(O_1; R)$

, то $\angle BEA = \angle BCA = 90°$

т. $A_1 \in AB$ и т. $A_1 \in$ окр $\omega(O_2; r)$

A_1D (AA_1 - диам $\Rightarrow \angle A_1DA = 90°$)

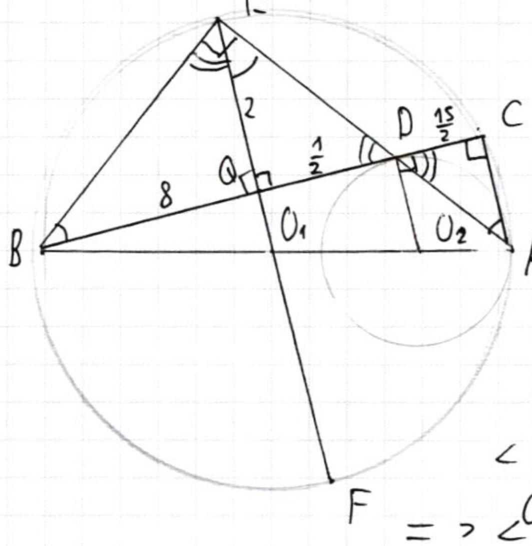
$\triangle ADA_1 \sim \triangle AEB$ ($\angle DAA_1 = \angle EAB$, $\angle A_1DA = \angle BEA = 90°$)

$\left.\begin{matrix} EQ \perp BC \\ DO_2 \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow EQ \parallel DO_2$

$\Rightarrow$ т.к. треуг. подобны и $EQ \parallel DO_2$ ($\triangle AEO_1 \sim \triangle ADO_2$)

$\Rightarrow AB \cap EF = O_1$

$\Rightarrow EF$ - диаметр.



$BD = \frac{17}{2}$ $DC = \frac{15}{2}$

$BC = 16$

т.к. EF диаметр $\Rightarrow BQ = QC = 8$

$QD = 8 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

$\angle CDA = \angle QDE$

$\angle BEQ = \angle CDA$ (по т. о $2^{ух} \perp$)

$\Rightarrow \angle CAD = \angle QED = \angle QBE$

$\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle QED \sim \triangle QBE$

$$\frac{EQ}{QD} = \frac{QB}{EQ} \qquad EQ^2 = QB \cdot QD = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$EQ = 2$$

$\triangle BEQ$: $\quad BE = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$

$\triangle EQD$: $\quad ED = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$

$$\frac{QD}{DC} = \frac{ED}{DA} \qquad AD = \frac{DC \cdot ED}{QD} = \frac{15}{1} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{17} = \frac{15}{2}\sqrt{17}$$

$$AE = AD + DE = 8\sqrt{17}$$

$$AB = \sqrt{BE^2 + EA^2} = \sqrt{4 \cdot 17 + 64 \cdot 17} = \sqrt{68 \cdot 17} = \sqrt{2^2 \cdot 17^2} = 34$$

$$\underbrace{R = \frac{1}{2} AB = 17}$$

$\triangle AEB \sim \triangle ADA_1$ (см. ранее)

$$\frac{AB}{AA_1} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = \frac{AE}{AD} = \frac{8\sqrt{17}}{\frac{15}{2}\sqrt{17}} = \frac{8}{\frac{15}{2}} = \frac{16}{15}$$

$$15R = 16 \cdot r$$

$$r = \frac{15}{16} \cdot R = \frac{15}{16} \cdot 17 = \frac{255}{16} = 15\frac{15}{16}$$

$$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R = 34 \qquad \sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{34} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot AF \cdot \sin\angle AFE = \qquad AF = EB$$

$$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot \cancel{2\sqrt{17}} \cdot \frac{4\cancel{\sqrt{17}}}{\cancel{17}} = 34 \cdot 4 = 136$$

Ответ: $R = 17$, $r = 15\frac{15}{16}$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$S_\triangle = 136$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6

$$\frac{16X-16}{4X-5} \le aX+b \le -32X^2+36X-3 \qquad X \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

Рассм пл-ть XOY

1) $y = \dfrac{16(X-1)}{4X-5}$

крит. точки
$X = 1$
$X = \frac{5}{4}$

y(x) ↓ ↑ ↓, 1, 5/4

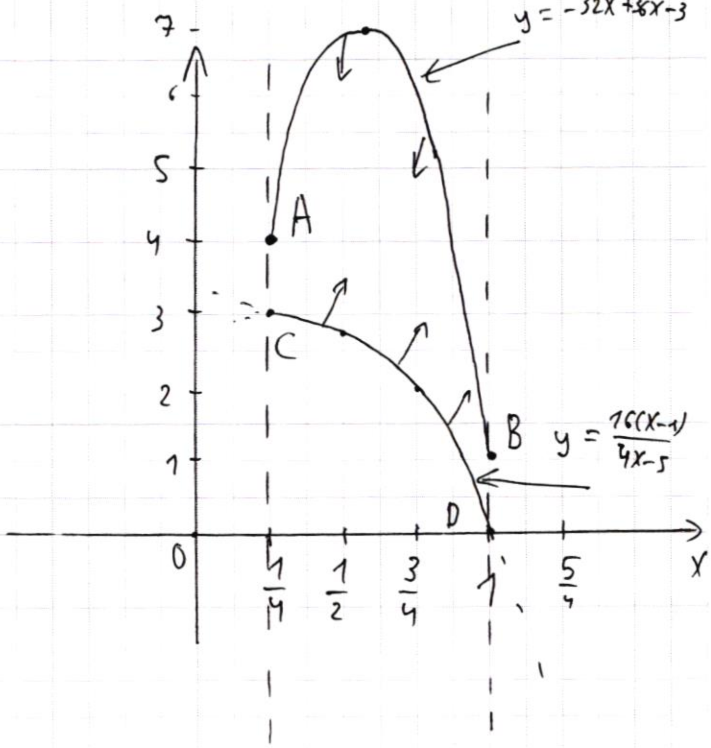
т.к. $\frac{5}{4}$ вне диапоз то не важн

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{2}{3}$

$y\left(\frac{1}{4}\right) = 3$

$y\left(\frac{3}{4}\right) = 2$

$y(1) = 0$



2) $y = -32X^2+36X-3$
парабола ветви вниз

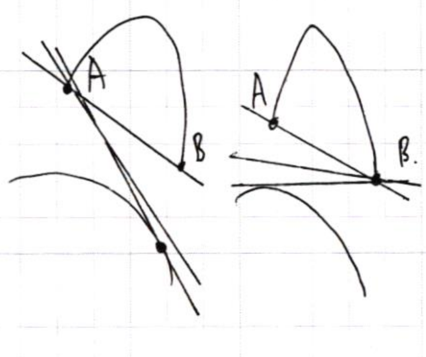
$X_B = \frac{-b}{2a} = \frac{36}{64} \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$y_B = \frac{36^2}{2\cdot 64} - 3 = \frac{1296}{128} - 3 = 10{,}12.. - 3 \approx 7{,}1$

$y(1) = 1$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 7$

$y\left(\frac{1}{4}\right) = 4$



$A\left(\frac{1}{4}; 4\right) \quad B(1; 1)$

$y = ax+b$ – линейн ф.

нам подойдут линии проходящие через точки A и B ниже верхней крив, но выше нижней кривой.

Р-м прямую проход чер A и B

$y = -4X+5 \qquad a = -4 \quad b = 5$

Проверим есть ли точки касания с $y = \frac{16(X-1)}{4X-5}$

Если точек нет, то опускаем

Если 2 точки пересеч тогда не сущ. прямых

Если 1 точка => касат. => ед. прямая

$y=-4x+5$ $\qquad$ $y=\frac{16x-16}{4x-5}$

Найд точ пер

$$\frac{16x-16}{4x-5}=-4x+5$$

$$\frac{16(x-1)+(4x-5)^2}{4x-5}=0$$

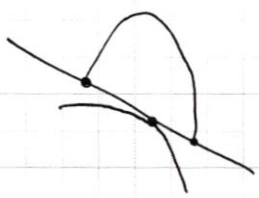
$4x-5\neq0$

$16x-16+16x^2-40x+25=0$

$16x^2-24x+9=0$ $\qquad$ $x_0=\frac{24}{32}=\frac{2}{3}$ – точка касания

$D=24^2-4\cdot16\cdot9=576-576=0$ => 1 точка касан

=> это единственно прямая и ед. коэфф a и b.



Ответ: $a=-4$, $b=5$.

№1

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

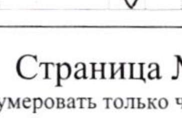
$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\ldots$

№3

Пролог. по основ. 3

№7 точки лежат на одинаковом расст. от центра => центр вписанной окружност



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

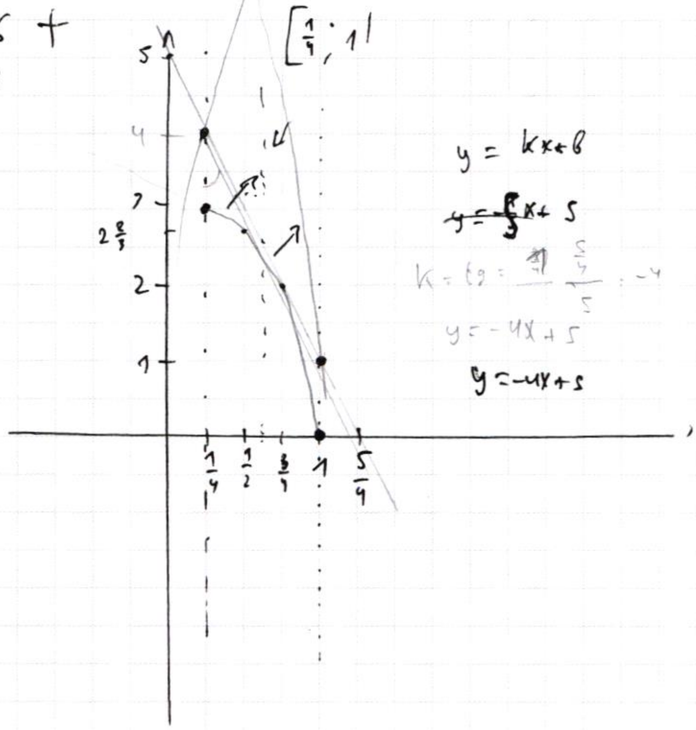
2 0 0 0 0 6 5 7
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6 +

$y = \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$[\frac{1}{4}; 1]$



$y = kx+b$

$y = -5x+5$

$k = tg = \frac{5}{\frac{5}{4}} = -4$

$y = -4x+5$

$y = -4x+5$

$\frac{16(x-1)}{4x-5}$

кр.т. $x=1$

$4(x-\frac{5}{4})$

$x=\frac{5}{4}$

$x=\frac{1}{2}$ $\frac{8-16}{2-5} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$x=\frac{1}{4}$ $\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$

$x=\frac{3}{4}$ $\frac{12-16}{3-5} = \frac{-4}{-2} = 2$

$y = -32x^2+36x-3$

$D = = 36^2 - 4\cdot3\cdot32$

$x=1$

$-32+36-3 = 1$

$x=\frac{1}{2}$

$-32\cdot\frac{1}{4} + 36\cdot\frac{1}{2} - 3 =$

$-8 + 18 - 3 =$

$x=\frac{1}{4}$ $y = -32\cdot\frac{1}{16} + 36\cdot\frac{1}{4} - 3 =$

$= -2 + 9 - 3 = 4$

$x_в = \frac{-36}{-64} = \frac{6^2}{8^2} =$

$y_в = -32\cdot\frac{6^4}{8^4} + 36\cdot\frac{6^2}{8^2} - 3$

$y_в = -32\cdot\frac{36^2}{64^2} + \frac{36\cdot36}{64} - 3$

$y_в = -\frac{36^2}{2\cdot64} + \frac{36^2}{64} - 3$

$y_в = \frac{36^2}{2\cdot64} - 3 =$

$36 \times 36 = 216 + 108 = 1296$

$1296 : 128 = 10{,}12$

$\frac{16x-16}{4x-5} = -5x+5$

$4x^2-9x+5$

$20x^2-45x+25$

$\frac{16x-16}{4x-5} + 5x-5 = 0$

$\frac{16x-16+(5x-5)(4x-5)}{4x-5} = 0$ $\frac{16(x-1)+5(x-1)(4x-5)}{4x-5} = 0$

$\frac{4x^2+5x-9}{4x-5} = 0$

$16 \times 9 = 144 = 12^2$

$169 = 13^2$

$4x^2+5x-9=0$

$D = 25+16\cdot9 = 13^2$

$x_{1,2} = \frac{-5\pm13}{8}$ $x_1 = \frac{-18}{8} = -2\frac{1}{4}$

$x_2 = 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} + 4x-5 = 0$$

$$\frac{16(x-1)+(4x-5)^2}{4x-5} = 0$$

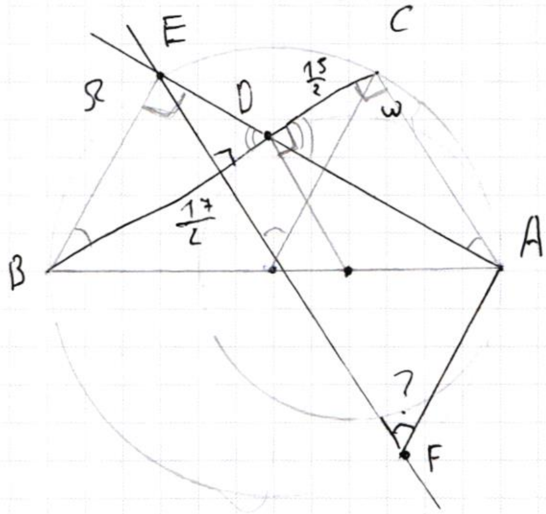
$$16(x-1) + 16x^2 - 40x + 25 = 0$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$D = 24^2 - 4\cdot16\cdot9 = 0$$

$$\Rightarrow 1 \text{ корень}$$

$36 \cdot 16 = 576$ $24 \cdot 24 = 576$ $34 \cdot 4 = 136$



№ 4 +

R_1 и R_2 - ?

$\angle AFE$

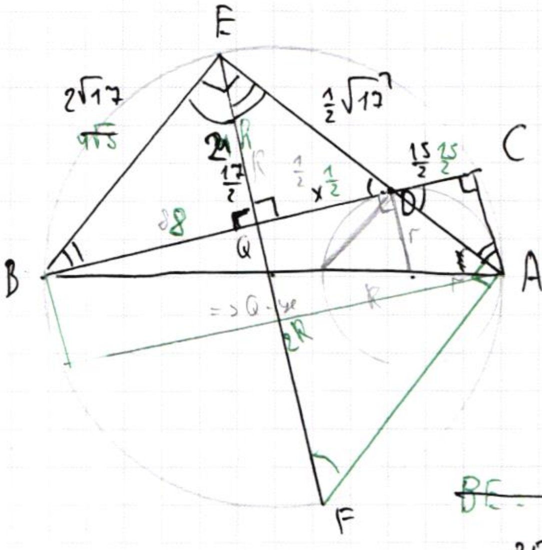
$S_\triangle AEF$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$BC = 16$

$17 \cdot 15 = 255$ $255 : 16$



$\triangle CAD \sim \triangle QED \sim \triangle QBE$

$$\frac{CD}{QD} = \frac{\frac{15}{2}}{x} =$$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$$\frac{h}{8} = \frac{\frac{1}{2}}{h} \quad h^2 = 4 \quad h^2 = 16 \quad h = 4$$

~~$EQ = 4$~~

$h = 2 \quad EQ = 2$

~~$BE = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = \sqrt{4\cdot4\cdot5} = 4\sqrt{5}$~~

$$BE = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = \sqrt{2\cdot2\cdot17} = 2\sqrt{17}$$

$$ED = \sqrt{4+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{17}}{AD}$$

$$2R = AB = \sqrt{64\cdot17+64\cdot17} = \sqrt{68\cdot17} = \sqrt{4\cdot17\cdot17} = 2\cdot17 = 34$$

$R = 17$

$AD = \frac{15}{2}\sqrt{17}$

$\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{17}\cdot\frac{15}{2}$ $AD = \frac{15}{2}\sqrt{17}$

$AE = 8\sqrt{17}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta -$

$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\sin\beta +$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$2\alpha+2\beta = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})$ $\quad 2\alpha+2\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos$

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$(\sin 2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5}$

$tg\,\alpha - ?$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta =$

2) $\sin(2\alpha+4\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \cos2\alpha\cdot\sin4\beta = \oplus$

1) $= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta) + (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta =$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\underbrace{\cos^2\beta}_{=\frac{1+\cos\beta}{2}} - 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,\underbrace{\sin^2\beta}_{=\frac{1-\cos\beta}{2}} + 2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\underbrace{\cos^2\alpha}_{=\frac{1+\cos\alpha}{2}} - 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\underbrace{\sin^2\alpha}_{=\frac{1-\cos\alpha}{2}} =$

$= 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha) - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta) =$

$= 2\cdot\underbrace{(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)}_{=\sin(\alpha+\beta)}\underbrace{(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)}_{=\cos(\alpha+\beta)} = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) =$

$= \sin(2(\alpha+\beta))$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos}{2}$

$\sin^2\alpha\ \frac{1-\cos}{2}$

$= (\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\beta) - (\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta) + (\cancel{\sin\beta\cdot\cos\beta} + \sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha) - (\cancel{\sin\beta\cdot\cos\beta} + \sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha$

2) $\oplus = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\underbrace{(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)}_{=\cos2\beta} + \underbrace{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}_{=\cos\alpha}\cdot2\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta =$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^4\beta-\sin^4$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha = 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta(\sin\alpha+\sin\beta)$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\Big(\overbrace{\frac{1+\cos2\beta}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}}^{\cos2\beta}\Big) + \Big(\overbrace{\frac{1+\cos\alpha}{2}-\frac{1-\cos\alpha}{2}}^{\cos\alpha}\Big)\cdot2(2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta)\cdot\underbrace{(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}_{\frac{1+\cos\beta}{2}-\frac{1-\cos\beta}{2}} =$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\beta + \cos\alpha\cdot2\cdot2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\beta =$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\underbrace{(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}_{\frac{1+\cos\beta}{2}-\frac{1-\cos\beta}{2}} + 4\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\beta = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2\cdot2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta =$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta(1+2\cdot\cos\beta)$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} = \frac{-\sqrt5}{5}$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2\cdot2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\,(1+2\cdot\cos\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta\,(\sin\alpha+\sin\beta) = -\frac{\sqrt5}{5} \qquad 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta = -\frac{\sqrt5}{5}\cdot\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

$$2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\,(\sin\alpha+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta) = -\frac{2}{5} \qquad = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$$

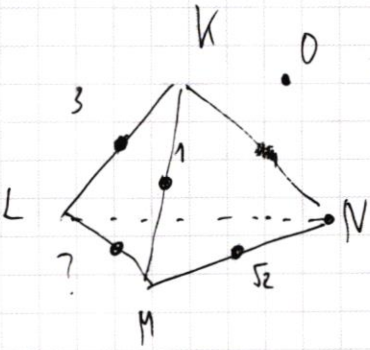
~~6+5~~ 3h

16

$$-\frac{\sqrt5}{5}\cdot\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\beta}$$

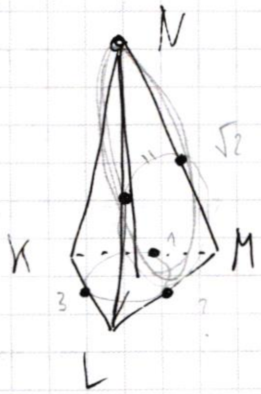
$$\frac{\sqrt5\cdot(\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\beta) = 2(\sin\alpha+\sin\beta)}{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\beta)}$$

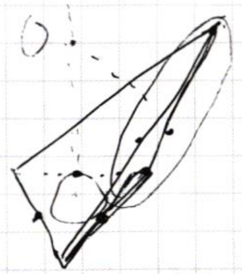
N 7

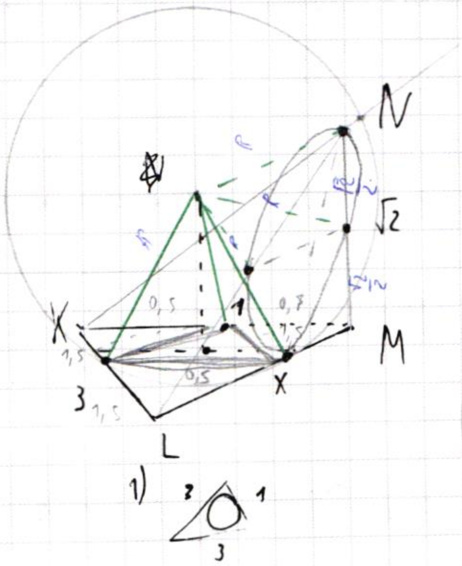


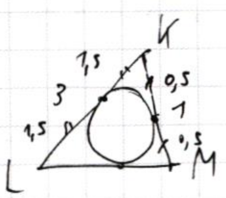
LM-?

R_{min}-?





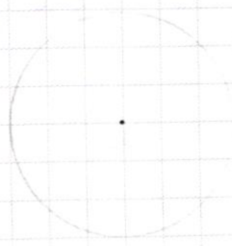




$$S = p\cdot r$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{3+1+x}{2} = 2+\frac{x}{2}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 0 6 5 7

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=0$$

$$(x-6)^2 = x^2-12x+36$$

$$(6y-3)^2 = 36y^2-36y+9$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=0$$

$$x=6 \qquad y=\frac{1}{2}$$

$$6-6 = \sqrt{2\cdot 6\cdot \frac{1}{2}-6-6+6}$$

$$x=6 \quad y=\frac{1}{2}$$

N 3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$\log_3(10x)+\log_3 4\cdot \log_3|x^2-10x| \geq \log_3(x^2)+\log_3(10x-x^2)\cdot \log_3 5$$

$26 \times 26 = 156 + 52 = 676$

$144 \times 4 = 576$

$$144y^2+(12-26x)y+x^2+x-6=0$$

$$(12y-2x)^2 = 144y^2-$$

N2

N4

$$\left(12y+\frac{1}{2}\right)^2 = 144y^2+12y+\frac{1}{4}$$

N6

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}$$

$$(\ )^2+(\ )^2-26xy-6,5=0$$

$$-6,5\cdot(4xy)-1)=0$$

$$x^2-10x<0$$

$$x(x-10)<0$$

$+ \quad - \quad +$; 0, 10

$$10x-x^2>0$$

$90 : 5 = 18$

$$x^2+(1-26y)x+144y^2+12y-6=0$$

$$D=(1-26y)^2-4\cdot(144y^2+12y-6)=$$

$$=1-52y+676y^2-576y^2-48y+24=$$

$$=100y^2-100y+25=25(4y^2-4y+1)$$

$$25(2y-1)^2$$

$$5(2y-1)$$

$$x_{1,2}=\frac{26y-1\pm(10y-10)}{2}$$

$$\frac{18}{5}=3,6$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)