МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 2 0 0 0 1 1 0 2

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

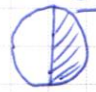
N1.

$$(1)\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$tg\,\alpha - ?$

$\Rightarrow 2\alpha+2\beta \in [2\pi k+\pi; 2\pi k+2\pi]$

$2\beta \in [2\pi z-\frac{\pi}{2}; 2\pi z+\frac{\pi}{2}]$



$\Rightarrow 2\alpha$ где угодно

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2)\quad \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$2\beta = \pm \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

1 случай. $2\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi l$.

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

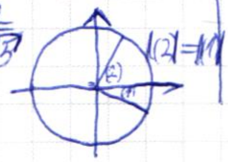
$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z} \\ &2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

1.1.
$$2\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi l$$
$$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi n$$
$$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n - 2\pi l$$
$$\cos 2\alpha = \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\frac{2}{\sqrt5}\right) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \frac45 - \frac15 = \frac35$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\frac{2}{\sqrt5}$$



1.2.
$$2\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi l$$
$$2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi n$$
$$2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n - 2\pi l$$
$$\cos 2\alpha = \cos\left(\pi - \left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + \arccos\frac{2}{\sqrt5}\right)\right) =$$
$$= -\left(\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \left(-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = -\left(\frac45 + \frac15\right) = -1$$

$$-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - tg^2\beta}{1 + tg^2\beta}$$

$$\frac35 = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$
$$\Updownarrow$$
$$tg^2\alpha = \frac14$$
$$|tg\alpha| = \frac12, \quad tg\alpha = \pm\frac12$$

$$-1 = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$
$$-1 - tg^2\alpha = 1 - tg^2\alpha$$
нет реш.

2 случай. $2\beta = -\arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi l$
$$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi n$$
$$\cos(2\alpha) = \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + \arccos\frac{2}{\sqrt5}\right)$$
$$\cos 2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \frac45 + \frac15 = 1$$

$$2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi n$$
$$\cos(2\alpha) = -\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)\right) =$$
$$= -\left(\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}\right) =$$
$$= -\frac35$$

$$1 = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} \Rightarrow tg\alpha = 0$$

$$-\frac35 = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$
$$-\frac35 - \frac35 tg^2\alpha = 1 - tg^2\alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac25 tg^2\alpha = \frac85, \quad tg^2\alpha = 4$$
$$tg\alpha = \pm 2$$

Ответ: $tg\alpha = \pm\frac12$; $tg\alpha = \pm 2$; $tg\alpha = 0$.

1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 1 0 2
(заполняется секретарем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=12+4+9=25$$

1) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\Downarrow$ $\Updownarrow$ при $x-2y\geq 0$

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$x^2+x-2+2y-5xy+4y^2=0$

$(x+ay+b)(x+cy+d)=x^2+x-2+2y-5xy+4y^2$

$b=-2$, $d=1$

Проверяем.

$\begin{cases} ac=4\\ a-2c=2 \end{cases}$

$a=4$

$c=1$

$(x+4y-2)(x+y+1)=$

$=x^2+xy+x+4xy+4y^2+4y-$

$-2x-2y-2=x^2+x-2+4y^2+2y+5xy$

Ещё попытка

$(x+ay+b)(x+cy+d)=x^2+x-2+2y-5xy+4y^2$

$(x+2y+2)(x+2y-1)$ — нет

$(x+ay+2)(x+cy-1)$ $\begin{matrix} b+d=1\\ bd=-2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=2\\ d=-1 \end{matrix}$

$(x-4y+2)(x-y-1)=x^2-xy-x-4xy+4y^2+4y+$

$+2x-2y-2=x^2+x-2+2y-5xy+4y^2$

$\begin{cases} c=2\\ a=2 \end{cases}$ $\begin{cases} c=-1\\ a=-4 \end{cases}$

$2c-a=2$

$ac=4$, $a=\frac{4}{c}$

$2c-\frac{4}{c}=2$

$c^2-c-2=0$

$D=1+8=3^2$

$c=\frac{1\pm 3}{2}$ $\nearrow 2$, $\searrow -1$

Таким образом.

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (x-4y+2)(x-y-1)=0\\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1 случай. $\begin{cases} x-4y+2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ ОДЗ: $x \geq 2y$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x=4y-2 \\ 16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0 \end{cases} \Rightarrow 25y^2-50y=0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

при $y=0$: $\begin{cases} x=-2 \\ x^2-4x=12 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$ (X) $-2 \geq 0$ - неверно

при $y=2$ $\begin{cases} x=6 \\ x^2+36-4x-36=12 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$ (√) $6 \geq 4$ - верно.

2 случай.

$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x=y+1 \\ y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0 \end{cases} \Rightarrow 10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$ $\frac{D}{4}=4+6=10$

$y=\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}=$

$=1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

(1) $x=2+\frac{\sqrt{10}}{2}$ (X) $2+\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$ - не верно

(2) $x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$ (√) $2-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$ - верно.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

4

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5.1.

Найти кол-во пар x, y таких что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad a,b\in\mathbb{Q}$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, p-простое

$1\leq x\leq 24$

$1\leq y\leq 24$

$x,y\in\mathbb{N}.$

$f(2)=0$

$f(3)=0$ $\quad \frac{x}{y}\in\left[\frac{1}{24};24\right]$

$f(5)=1$

$f(7)=1$ $\quad f(1\cdot 3)=f(1)+f(3)$, $f(1)=0$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

~~Понятно что f - возрастающая функция~~

т.к. ~~возрастает~~ целая часть от деления на 4 ~~не убывает~~ ~~возрастает~~ при возрастании делимого.

Значит при $\forall x,y: \frac{x}{y}\geq 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)\geq 0$

Нам нужно рассматривать только $\frac{x}{y}<1$.

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(5)=f(7)+f\left(\frac{5}{7}\right) \Rightarrow f\left(\frac{5}{7}\right)=0.$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=f(2)+f(4)$

Дальше аналогично

(1)		(2)		(3)		(4)
1)	0	7) 1	13) 3	19)	4	
2)	0	8) 0	14) 1	20)	1	
3)	0	9) 0	15) 1	21)	1	
4)	0	10) 1	16) 0	22)	2	
5)	1	11) 2	17) 4	23)	5	
6)	0	12) 0	18) 0	24)	0	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ:

$x^2+18x>0$: $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Пусть $x^2+18x=y$

Тогда:

$$5^{\log_{12}y} + y \geq |y|^{\log_{12}13}, \quad y>0 \text{ - по ОДЗ,}$$

модуль можно убрать

$$\Updownarrow$$

$$5^{\log_{12}y} + y \geq y^{\log_{12}13} = y^{(\log_{12}\frac{13}{12}+1)}$$

$$5^{\log_{12}y} \geq y(y^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$$

$$5^{\log_{12}y} \geq y^{\log_{12}13} - y$$

$$5^{\frac{\log_5 y}{\log_5 12}} \geq y^{\log_{12}13} - y$$

$$y^{\frac{1}{\log_5 12}} \geq y^{\log_{12}13} - y$$

$$y^{\frac{1}{\log_5 12}} \geq y^{\frac{\log_5 13}{\log_5 12}} - y^{\frac{\log_5 12}{\log_5 12}}$$

Пусть $y^{\frac{1}{\log_5 12}} = z$ $(z>0)$

$$z \geq z^{\log_5 13} - z^{\log_5 12}$$

$$z \geq z(z^{\log_5\frac{13}{5}} - z^{\log_5\frac{12}{5}})$$

$$z^{\log_5\frac{13}{5}} - z^{\log_5\frac{12}{5}} \leq 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.2.

$f(a) = f(ab) - f(b)$; $f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

Значит, пользуясь составленной таблицей нужно найти все пары x, y, для которых $f(y) > f(x)$

(1) при $f(x)=0$ (11 вар. x) соотв (13 вар. y.)

(2) при $f(x)=1$ (7 вар x) соотв (6 вар y)

(3) при $f(x)=2$ (2 вар x) соотв (4 вар y)

(4) при $f(x)=3$ (1 вар x) с-в (3 вар y)

(5) при $f(x)=4$ (2 вар x) с-в (1 вар y)

(6) при $f(x)=5$ (1 вар x) с-в (0 вар y)

$11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 198$

Ответ: 198 пар.

5

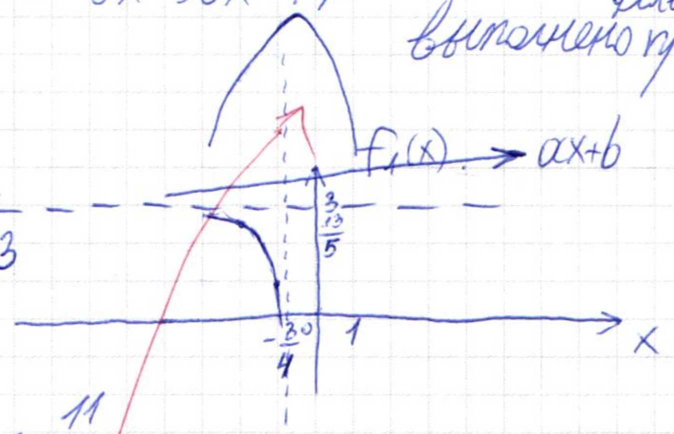
№6.1.

Найти все пары $(a;b)$ такие, что

$$\overset{f_1(x)}{\frac{12x+11}{4x+3}} \le \overset{f(x)}{ax+b} \le \overset{f_2(x)}{-8x^2-30x-17}$$

выполнено для всех при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$



$$f_1\left(-\frac{11}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-11+3} = \frac{11}{4}$$

$f_1(x)$ – убывающая

$f_2(x)$. $x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$ не соотв

$$f_2\left(-\frac{15}{8}\right) = -8\cdot\frac{225}{64} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 = \frac{15\cdot15 - 17\cdot8}{8} = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$$

1 случай. $a \ge 0$

т.к. $x_в = -\frac{7{,}5}{4}$

$-\frac{11}{4}$ $\quad -\frac{7{,}5}{4} \quad$ $-\frac{3}{4}$

$\frac{3{,}5}{4} \quad \frac{4{,}5}{4}$

$$\begin{cases} f_1\left(-\frac{11}{4}\right) \le f\left(-\frac{11}{4}\right) \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le f_2\left(-\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) \le f\left(-\frac{3}{4}\right) \le f_2\left(-\frac{3}{4}\right) < f_2\left(-\frac{11}{4}\right)$$

$$f_2\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\frac{9}{16} + 30\cdot\frac{3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - \frac{34}{2} = 1$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \\ -\frac{3}{4}a + b \le 1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ $b \le 1 + \frac{3}{4}a$

$$\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le -\frac{11}{4}a + 1 + \frac{3}{4}a \Longleftrightarrow \frac{7}{4} \le -2a \quad \Big| \text{ при } a \ge 0 \text{ неверно.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.2.

2 случай $a<0$.

необходимое условие

$$\begin{cases} f_1\left(-\frac{11}{4}\right) \le f\left(-\frac{11}{4}\right) \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) \le f_2\left(-\frac{11}{4}\right) \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le f_2\left(-\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$f_2\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17=$$

$$=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-\frac{34}{2}=$$

$$=\frac{10}{2}=5.$$

$\Updownarrow$

достаточное

$$\begin{cases} \frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a+b \\ -\frac{11}{4}a+b \le 5 \\ -\frac{3}{4}a+b \le 1 \quad \Rightarrow -\frac{11}{4}a+b \le 1-2a \end{cases}$$

$1-2a \geq 5$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$$

$$12x+11 \ge (4x+3)(ax+b) = 4ax^2+(4b+3a)x+3b$$

$$4ax^2+(4b+3a-12)x+3b-11 \le 0 \quad \text{при всех } x\in\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

при $a<0$, ведь это наш случай

достаточно $y_B \le 0$

$$x_в = -\frac{4b+3a-12}{8a}$$

$$y_в = 4a\cdot\frac{(4b+3a-12)^2}{64a^2} - \frac{(4b+3a-12)^2}{8a} + 3b - 11 \le 0$$

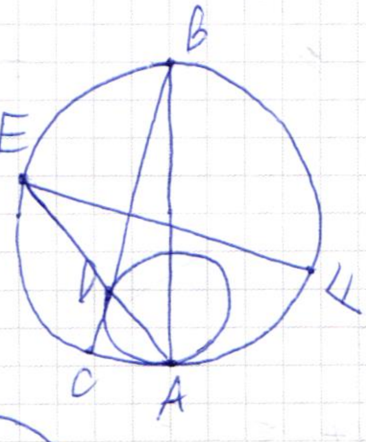
$$(4b+3a-12)^2\cdot\frac{1}{16a}(1-2) + 3b - 11 \le 0$$

$$3b - 11 + \frac{(4b+3a-12)^2}{16a} \le 0$$

$$48ab - 176a + (4b+3a)^2 - 24(4b+3a) + 144 \;\cancel{\#}\ge 0$$

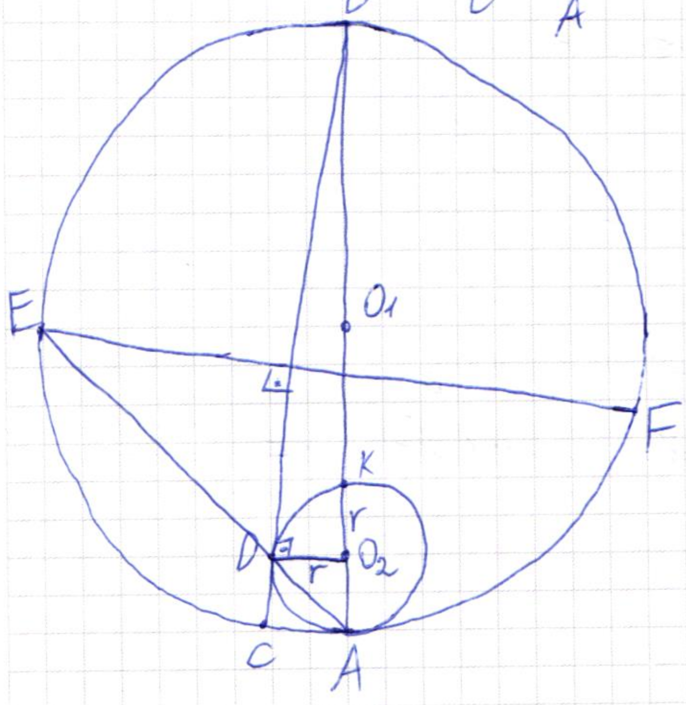
...

N4.



r, R - ?
$\angle AFE$ - ?
S_{AEF} - ?

$CD = 8$
$BD = 17.$



$BK = 2R - 2r \quad BK\cdot AB = BD^2.$

$(2R-2r)2R = 289$

по Т. Пифагора.

$(2R-r)^2 \cancel{+} r^2 = 289$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4rR = 289 \\ 4R^2 - 4Rr\cancel{\ldots} = 289 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R^2 - rR = \frac{289}{4}$$

...