МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 2 0 0 0 1 4 5 9

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

4

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$\exists\ m=(x-2),\ n=(y-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2n=\sqrt{m\cdot n} \\ m^2+9n^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2n)^2=mn \\ m-2n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4mn+4n^2=mn \\ m-2n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-5mn+4n^2=0 \\ m-2n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4n)\cdot(m-n)=0 \\ m-2n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=4n & (1) \\ m-2n\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m=n & (2) \\ m-2n\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~(... выполн. очевидно)~~ ~~т.к. m и n одного знака~~ ~~(mn ≥ 0 выполн. очевидно)~~

~~... очевидно, что ...~~

$$(1):\ \begin{cases} m\geq 2n \\ m=4n \\ m^2+9n^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\geq 2n \\ m=4n \\ 16n^2+9n^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\geq 2n \\ m=4n \\ 25n^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\geq 2n \\ m=4n \\ n=\pm 1 \end{cases}$$

~~т.к.~~

1.1. $n=1$, $y-1=1$, $y=2$; $m=4n=4$, $x-2=4$, $x=6$ — подходит ($m=4\geq 2=2n$)

1.2. $n=-1$, $y-1=-1$, $y=0$; $m=4n=-4$, $x-2=-4$, $x=-2$ — не подходит ($m=-4<-2=2n$)

$(2): \begin{cases} m=n \\ m^2+9n^2=25 \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} m=n \\ 10n^2=25 \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} m=n \\ n^2=\frac{5}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} m=n \\ n=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

2.1. $n=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ – не подходит.

$m=\frac{\sqrt{10}}{2}<\sqrt{10}=2n$

$m=n=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x-2=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$

2.2. $n=-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$ – подходит.

$m=-\frac{\sqrt{10}}{2}>-\sqrt{10}=2n$ $m=-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x-2=-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$

Итого, имеем пары корней: $\begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$;

N 5

5

$1\le x\le 24,\ x\in N$

$1\le y\le 24,\ y\in N$

$f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$

$f(x)=\left[\frac{p}{4}\right]$

Заметим, что:

1) $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$, $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

2) $f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

3) $f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

4) $f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)$, $f(4)=2f(2)=0$

5) $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

6) $f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)$, $f(6)=0$

7) $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

8) $f(4\cdot 2)=f(4)+f(2)$, $f(8)=0$

9) $f(3\cdot 3)=f(3)+f(3)$, $f(9)=0$

10) $f(2\cdot 5)=f(2)+f(5)$, $f(10)=1$

11) $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$ (см. далее)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12) $f(3\cdot4)=f(3)+f(4)\Rightarrow f(12)=0$

13) $f(13)=[\frac{13}{4}]=3$

14) $f(2\cdot7)=f(2)+f(7)$, $f(14)=1$

15) $f(3\cdot5)=f(3)+f(5)$, $f(15)=1$

16) $f(8\cdot2)=f(2)+f(8)$, $f(16)=0$

17) $f(17)=[\frac{17}{4}]=4$

18) $f(2\cdot9)=f(2)+f(9)$, $f(18)=0$

19) $f(19)=[\frac{19}{4}]=4$

20) $f(4\cdot5)=f(4)+f(5)\Rightarrow f(20)=1$

21) $f(3\cdot7)=f(3)+f(7)\Rightarrow f(21)=1$

22) $f(11\cdot2)=f(11)+f(2)$, $f(22)=2$

23) $f(23)=[\frac{23}{4}]=5$

24) $f(6\cdot4)=f(6)+f(4)$, $f(24)=0$

Заметим, что для $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\underbrace{f(x\cdot\frac{1}{x})}_{f(1)}=f(x)+f(\frac{1}{x})$

$f(x)+f(\frac{1}{x})=0$

Тогда, имеем, что $f(\frac{1}{x})<0$, где $1\le x\le24$, $x\in\mathbb{N}$ и $f(x)\ne0$ т.к. $f(\frac{1}{x})=-f(x)$, $f(x)>0$ из написанного выше

Т.е. $f(\frac{1}{5})=-1$, $f(\frac{1}{7})=-1$, $f(\frac{1}{10})=-1$, $f(\frac{1}{11})=-2$,

$f(\frac{1}{13})=-3$, $f(\frac{1}{14})=-1$, $f(\frac{1}{15})=-1$, $f(\frac{1}{17})=-4$,

$f(\frac{1}{19})=-4$, $f(\frac{1}{20})=-1$, $f(\frac{1}{21})=-1$, $f(\frac{1}{22})=-2$, $f(\frac{1}{23})=-5$.

Всего 13 чисел.

Т.е. сейчас ~~но~~ мы нашли всевозможные ~~уравнения~~

$1 \le x \le 24, x \in N$ такие, что $f(\frac{1}{t})<0$

Далее, найдём все такие дроби $(\frac{x}{y})$, что $f(\frac{x}{y})<0$

$1 \le x, y \le 24,\ x, y \in N$

Заметим, что к нашим дробям ~~f~~ $(\frac{1}{t})$ можно домножать на какое-то число и пользоваться св-ами функции: $f(a \cdot \frac{1}{t}) = f(a) + f(\frac{1}{t})$

$f(a \cdot \frac{1}{t}) < 0$, если $f(a) + f(\frac{1}{t}) < 0$

Т.е. $f(a) < -f(\frac{1}{t})$

Т.е. чтобы получить все искомые дроби $(\frac{x}{y})$, нужно в зависимости от знач. $f(\frac{1}{t})$ подобрать все возможные ~~дроби~~ $1 \le a \le 24$, $a \in N$, что $f(a) < -f(\frac{1}{t})$

~~Соот~~ Соответств., ~~посчи~~ считаем их:

1) $f(\frac{1}{t}) = -1$ — таких t - 4 штук

$f(a) < -f(\frac{1}{t}) = 1$ - таких a - 11 штук (все $f(a)=0$)

2) $f(\frac{1}{t}) = -2$ - таких t - 2 штуки

$f(a) < -f(\frac{1}{t}) = 2$ - таких a - 18 штук ~~[illegible]~~ $\left(\left[\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f(a)=1 \end{array}\right.\right)$

3) $f(\frac{1}{t}) = -3$ - таких t - 1 штука

$f(a) < -f(\frac{1}{t}) = 3$ - таких a - 20 штук $\left(\left[\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f(a)=1 \\ f(a)=2 \end{array}\right.\right)$

(см. далее)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $f(\frac{1}{t}) = -4$ – таких t – 2 штуки

$f(a) < -f(\frac{1}{t}) = 4$ – таких a – 21 штука $\left[\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f(a)=1 \\ f(a)=2 \\ f(a)=3 \end{array}\right.$

5) $f(\frac{1}{t}) = -5$ – таких t – 1 штука $\left[\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f(a)=1 \\ f(a)=2 \\ f(a)=3 \\ f(a)=4 \end{array}\right.$

$f(a) < -f(\frac{1}{t}) = 5$ – таких a – 23 штуки

Итого, мы ~~пере~~отобрали из всевозможных пар x, y и, соответств., дробей $(\frac{x}{y})$, те значения функции от ~~которых~~ < 0, перебрав все возможные числители и знаменатели. Итого, получилось:

$$\underbrace{7 \cdot 11}_{f(\frac{1}{t})=-1} + \underbrace{2 \cdot 18}_{f(\frac{1}{t})=-2} + \underbrace{1 \cdot 20}_{f(\frac{1}{t})=-3} + \underbrace{2 \cdot 21}_{f(\frac{1}{t})=-4} + \underbrace{1 \cdot 23}_{f(\frac{1}{t})=-5} =$$

$$= 77 + \overbrace{36 + 20 + 42}^{78} + 23 = 100 + 78 + 20 = \boxed{198}$$

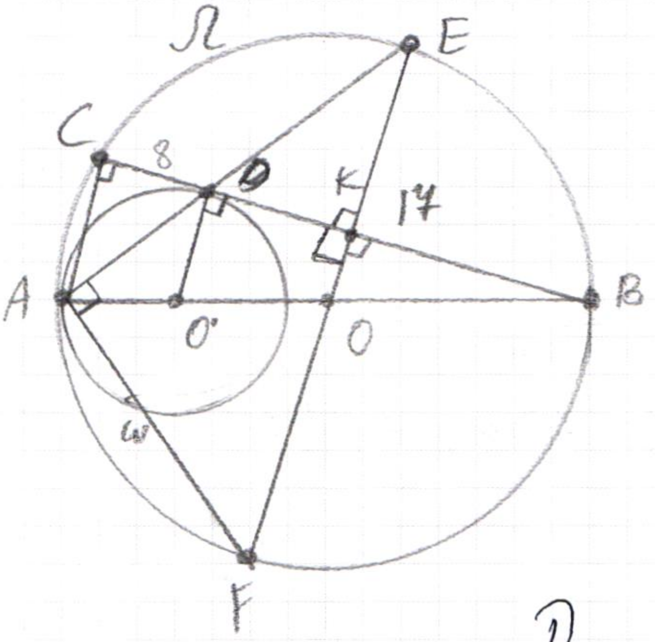
(77 + … + 23 = 100)

Ответ: 198 пар

№ 4

(см. далее)

5



Дано

$\Omega \cap \omega = A$ (внутр.)

AB - диаметр Ω

BC - касат. к ω $\left(\begin{array}{l} C \in \Omega \\ BC \cap \omega = D \end{array}\right)$

$AD \cap \Omega = E$

$\exists F$: $EF \perp BC$, $F \in \Omega$

$CD = 8$, $BD = 17$

Найти: r_ω; R_Ω; $\angle AFE$ - ?; S_{AEF} - ?

Решение:

$$\left.\begin{array}{l} O'D = r,\ O'B = AB - O'A = 2R - r \\ \left.\begin{array}{l} O_1D \perp BC \text{ (касат. к } \omega) \\ \angle BCA = 90^\circ \text{ (AB - диаметр.)} \\ \angle ABC \text{ - общ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle O'DB \sim \triangle ACB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{O'B}{AB} = \dfrac{DB}{BC} = \dfrac{O'D}{AC}$

$\dfrac{2R - r}{2R} = \dfrac{17}{25}$

$50R - 25r = 34R$

$16R = 25r$

$r = \dfrac{16}{25}R$ (1)

$\triangle O'DB$, Th. Пифагора:

$BO'^2 = O'D^2 + BD^2$

$(2R - r)^2 = r^2 + 17^2$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 17^2$

$4R^2 - 4R \cdot r = 17^2$, (1):

$4R^2 - 4R \cdot \dfrac{16}{25}R = 17^2$

$4R \cdot (R - \dfrac{16}{25}R) = 17^2$

$\dfrac{4 \cdot 9}{25}R^2 = 17^2$

$R^2 = \dfrac{17^2 \cdot 25}{36}$, $R = \dfrac{17 \cdot 5}{6} = \dfrac{85}{6}$

$r = \dfrac{16}{25}R = \dfrac{16}{25} \cdot \dfrac{85}{6} =$

$= \dfrac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \dfrac{136}{15}$

$\dfrac{O'D}{AC} = \dfrac{DB}{BC}$

$\dfrac{r}{AC} = \dfrac{17}{25}$

$AC = \dfrac{25}{17}r = \dfrac{25}{17} \cdot \dfrac{136}{15} = \dfrac{5 \cdot 8}{3} = \dfrac{40}{3}$

Ɔ $\angle CAB = 2\alpha$, $\sin\angle CAB = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{25}{2R} = \dfrac{25}{\frac{85}{3}} = \dfrac{15}{17} = \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\exists \angle CAD = \alpha$, $\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD}$

$\triangle CAD$, Th. Пифагора:

$AD^2 = CD^2 + AC^2$

$AD^2 = 64 + \frac{1600}{9} = \frac{576+1600}{9} = \frac{2176}{9}$

$AD = \frac{8\sqrt{34}}{3} \Rightarrow \sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{8}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\angle CAD = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$2\cdot\sin\angle CAD\cdot\cos\angle CAD = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17} = 2\cdot\sin\gamma\cos\gamma =$
$= \sin\angle CAB \Leftrightarrow \angle CAD = \gamma$ (в силу непрерывности функции $\sin(2\gamma)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \gamma = \frac{1}{2}\angle CAB \Rightarrow AD\,(AE)$ - бис-са $\angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow E$ - середина $\smile BC \Rightarrow EF\,(\perp BC)$ проходит через O по св-ву ~~хорды~~ хорды $BC \Rightarrow EF$ - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF = 2R$

EF - диаметр $\Rightarrow \angle EAF = 90°$

$\exists EF \cap BC = K \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle CKF = 90° \Rightarrow EF \parallel AC \Rightarrow \angle CAE = \angle AEF \Rightarrow$
(AE - секущ.)

$\Rightarrow$ т.к. $\angle CAD + \angle CDA = 90°$, $\angle AEF + \angle AFE = 90°$,
а $\angle CAD = AEF$, то
$\angle AFE = \angle CDA \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle CDA = \frac{CA}{AD} = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} = \sin\angle AFE \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{34}}{34}\right)$ (см. далее)

$$EF = 2R = \frac{85}{3}$$
$$\sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{34}}$$
$$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{EF}$$
$$AE = \frac{85}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{25\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$$

$$\cos\angle AFE = \cos\angle CDA = \sin\angle CAD = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{AF}{FE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{85}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{34}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{5\sqrt{34}}{2} =$$

$$= \frac{125\cdot 34}{24} = \frac{125\cdot 17}{12} = \frac{1250+125\cdot 7}{12} = \frac{1250+875}{12} =$$

$$= \frac{2125}{12}$$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{6}$, $r_\omega = \frac{136}{15}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{34}}{34}\right)$

$S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$x^2+18x > 0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$$\text{Пусть } t = x^2+18x > 0$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

Известное св-во логарифма: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5^{\log_{12}t} = t^{\log_{12}5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

?

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

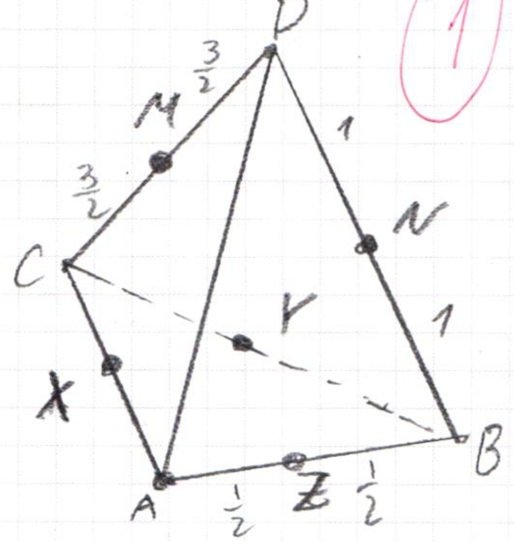
20001459

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

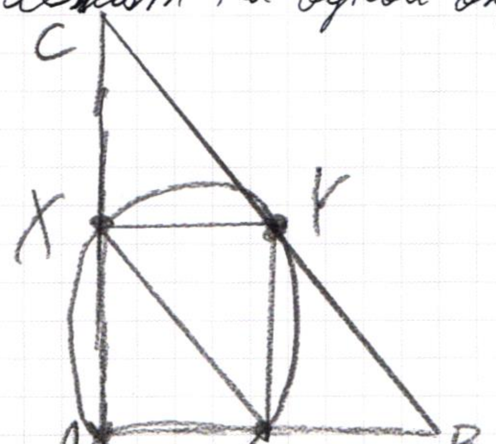
1



∃ X, Y, Z, M, N – середины сторон соответств. AC, AB, BC, CD и BD.

Заметим, что если точки X, Y, Z и A лежат на одной сфере, то ∃ сечение плоскостью (ABC), в котором X, Y, Z, и A лежат на одной окруж.

∀ ∠ABC, в котором середины сторон и вершина A лежат на одной окруж.



Заметим, что т.к.

~~XY ∥ BZ, BY ∥ XZ, то BYXZ – ∥-грам = ∠Y~~

XY ∥ AZ, YZ ∥ AX, то AXYZ – ∥-грамм ⇒

⇒ ∠A = ∠XYZ (1)

Также, т.к. AXYZ – вписанный, то

∠A + ∠XYZ = 180° (2)

(1), (2): ∠A = ∠XYZ = 90° ⇒ △ABC – прямоуг.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 4 5 9

(заполняется секретарём)

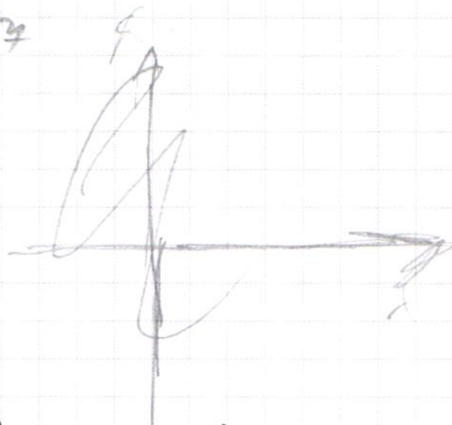
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

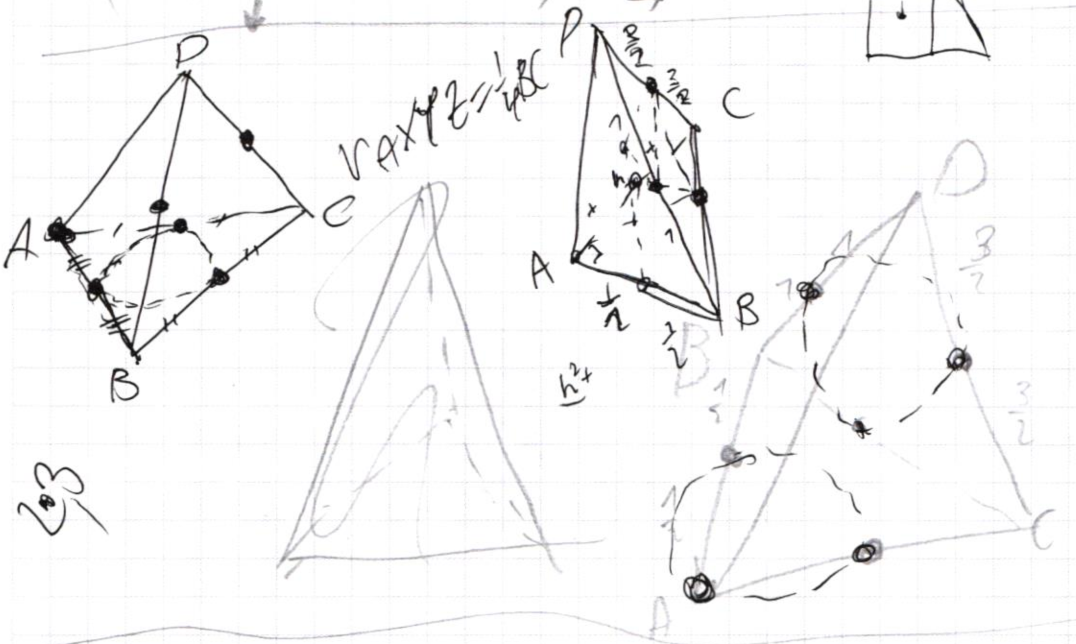
$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2+30x-17$

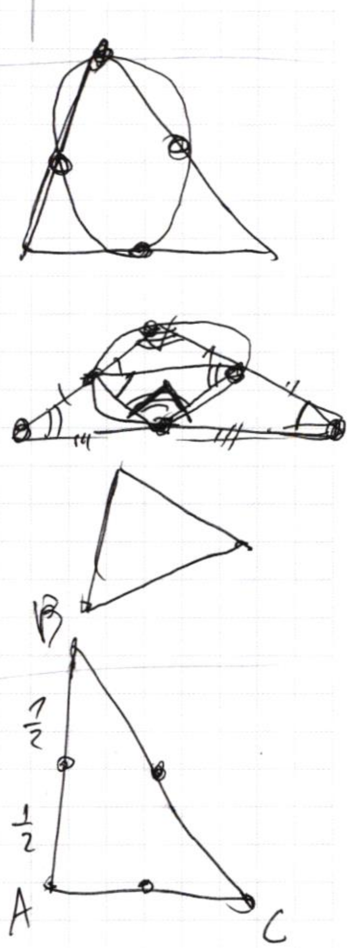
$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2+30x-17$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

$(3+\frac{2}{4x+3}) \in (-\infty; \frac{11}{4}]$







$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17=$

$=-8(x^2+30x+17)$

$x_0=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13} \quad | : t$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\cancel{3^{\log_3 5} = 5^{\log_3 3}}$

$\cancel{5 = 5^1 = 5}$

$t > 0$

$\cancel{t^{\log_{12} \frac{5}{12}} + 1 \geq t^{\log_{12} \frac{13}{12}}}$

$\cancel{1 \geq t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \cdot \left(t^{\log_{12} \frac{13}{12} - \log_{12} \frac{5}{12}} - 1\right)}$

$t = 12 \quad \cancel{1 \geq t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \cdot \left(t^{\log_{12} \frac{13}{5}} - 1\right)}$

$t = 0$

$0 + 0 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -18 \\ x = 0 \end{array}\right.$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

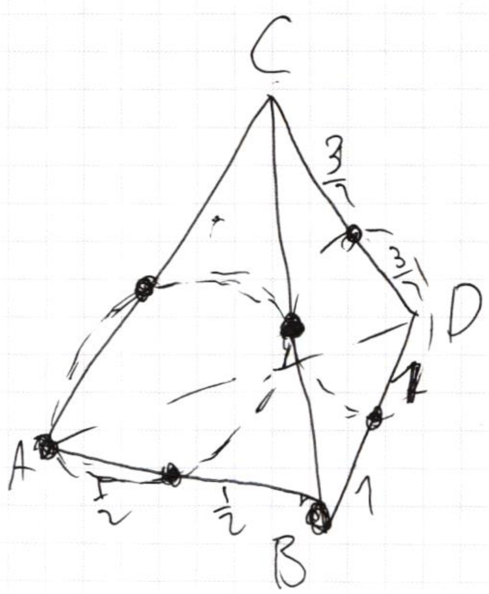
$1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}} = t^{\log_{12} \frac{13}{5}} =$

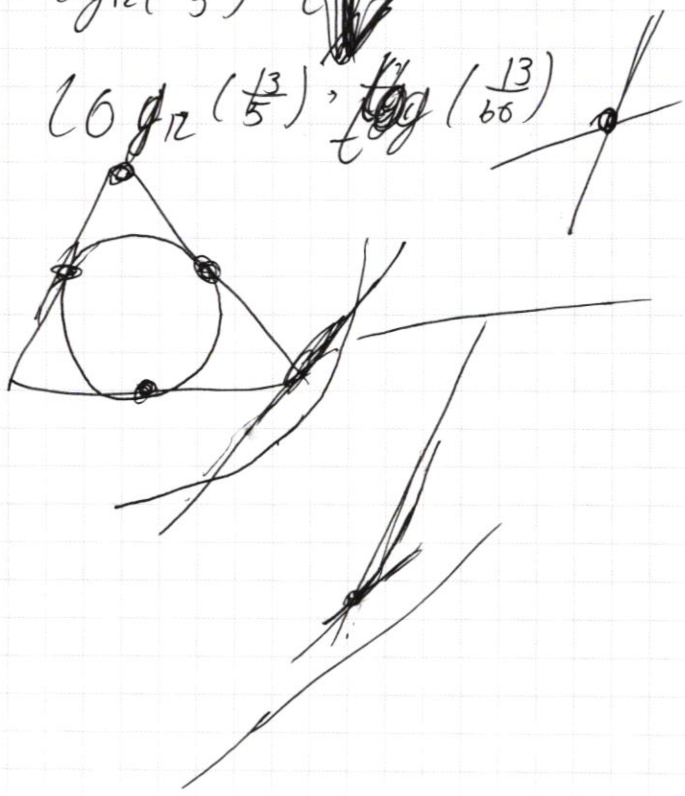
$= 1 + t^{\log_{12} (2 + \frac{2}{5})} = t^{\log_{12} (2 + \frac{3}{5})}$

$t > 0$

$(f(x))' = \log_{12}\left(\frac{12}{5}\right) \cdot t^{\log_{12}\left(\frac{1}{5}\right)}$

$\log_{12}\left(\frac{13}{5}\right) \cdot t^{\log\left(\frac{13}{60}\right)}$





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001459

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$x(y-1) - 2(y-1) = (y-1)(x-2)$

$x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$m = x-2$

$n = y-1$

$\left[\begin{array}{l} x\ge 2,\ y\ge 1 \\ x\le 2,\ y\le 1 \end{array}\right.$

$(m-2n)^2 = mn > 0$

$m^2 - 4mn + 4n^2 = mn$

$m^2 - 5mn + 4n^2 = 0$

$(m-4n)(m-n) = 0$

$\left[\begin{array}{l} m = 4n, \quad x-2 = 4y-4 \\ m = n, \quad x-2 = y-1 \end{array}\right.$

$4y = x+2,\ y = \frac{x+2}{4}$

$\boxed{y = x+2}$

$\begin{cases} m - 2n = \sqrt{mn} \\ m^2 + 9n^2 = 25 \end{cases}$

1) $16n^2 + 9n^2 = 25$

$25n^2 = 25$

$n^2 = 1,\ n = \pm 1,\ m = \pm 4$

$y - 1 = \pm 1$, $x - 2 = \pm 4$

$\left[\begin{array}{l} y=2,\ x=6 \\ y=0,\ x=-2 \end{array}\right.$

$t \log_{12} 5 + t \log_{12} 12 + t \log_{12} 13$

$= 2\sqrt{t^{\log_5 60}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$$t = x^2+18x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}(13)}$$

$$t > 0 \Rightarrow 5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}(13)}$$

$$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13} - t = t(t^{\log_{12}13-1} - 1) = t\cdot(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$$

$$5^{\log_{12}t} \geq t\cdot(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$$

$64 + \frac{1600}{9} = \frac{1600+576}{9} = \frac{2176}{9}$

$x = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$2176 = 2\cdot1088 = 4\cdot544 = 8\cdot272 = 16\cdot136 = 32\cdot68 = 64\cdot34 = 128\cdot17$

$\sin 2\gamma = \frac{2\cdot5}{\frac{85}{3}} = \frac{5\cdot3}{17} = \frac{15}{17} = 2\sin\gamma\cos\gamma$

$\cos\alpha = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$f(1) = 2f(1)$

$\boxed{f(1) = 0}$

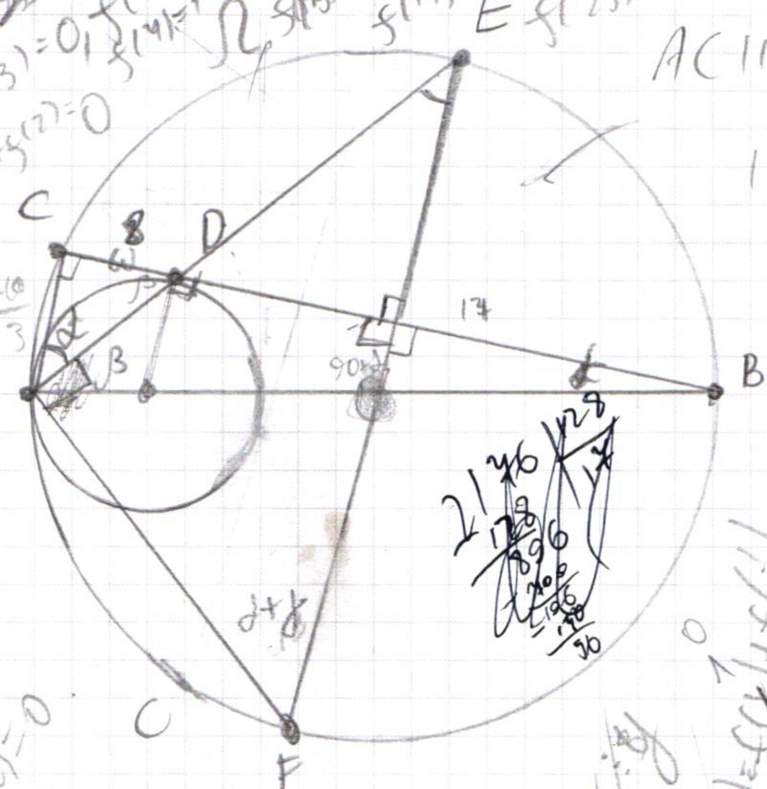
$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$

$50R - 25r = 34R$

$16R = 25r$

$r = \frac{16}{25}R$

$AC \parallel EF$



$17^2 = (2R-r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr$

$17^2 = 4R^2 - 4Rr$

$17^2 = 4R^2 - 4R\cdot\frac{16}{25}R$

$17^2 = 4R(\frac{9}{25}R)$

$17^2 = \frac{36}{25}R^2$

$R^2 = \frac{25}{36}\cdot17^2$

$R = \frac{5}{6}\cdot17 = \frac{85}{6}$

$r = \frac{16}{25}\cdot\frac{5\cdot17}{6} = \frac{8\cdot17}{15} = \frac{136}{15}$

$2R = \frac{85}{3}$

$f(2)=0,\ f(3)=0,\ f(5)=1,\ f(7)=2,\ f(11)=1,\ f(13)=3,\ f(17)=4,\ f(19)=4,\ f(23)=5$

$f(4) = f(2)+f(2) = 0$

$f(6)=0$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(12)=0$

$f(14)=2$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(18)=0$

$f(20)=1$

$f(21)=2$

$f(22)=2$

$f(24)=0$

$f(1)=0$

$CA = \frac{25}{17}\cdot\frac{136}{15} = \frac{8\cdot5}{3} = \frac{40}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)