МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5.

$f(\cancel{y} \cdot \frac{x}{y}) = f(y) + f(\frac{x}{y})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, тогда ~~т.к.~~

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$; $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$; $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$;

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$; $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$; $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$;

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$; $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$.

$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = f(a) - f(a) = 0$ ~~(при~~

(где $a = 3$)

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$.

$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 0 + 0 = 0$

$f(8) = f(2 \cdot 4) = f(2) + f(4) = 0 + 0 = 0$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 0 + 0 = 0$.

$f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) = 0 + 1 = 1$

$f(12) = f(2 \cdot 6) = f(2) + f(6) = 0 + 0 = 0$.

$f(14) = f(2 \cdot 7) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = 1$.

$f(16) = f(8 \cdot 2) = f(2) + f(8) = 0$.

$f(18) = f(9 \cdot 2) = f(2) + f(9) = 0$.

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$
$f(24) = f(2) + f(12) = 0.$
Тогда $f(z) = 0$ при $z \in N$ и $z \le 24$ ~~при~~
$\Leftrightarrow$ $z = 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24$
$f(z) = 1$ ~~при~~ $\Leftrightarrow z = 5; 7; 10; 14; 15; 20; 21$
$f(z) = 2 \Leftrightarrow z = 11; 22$
$f(z) = 3 \Leftrightarrow z = 13$
$f(z) = 4 \Leftrightarrow z = 17; 19$
$f(z) = 5 \Leftrightarrow z = 23$
Тогда $f(x) < f(y)$ если $f(y) = 1$ и $f(x) = 0$ или $f(y) = 2$ и $f(x) = 0; 1$, или $f(y) = 3$ и $f(x) = 0; 1; 2$, или $f(y) = 4$ и $f(x) = 0; 1; 2; 3$ или $f(y) = 5$ и $f(x) = 0; 1; 2; 3; 4$ $\Rightarrow$ таких пар $(x; y)$ равно $6 \cdot 12 + 2(6 + 12) +$
$+ 1(6 + 12 + 2) + 2(6 + 12 + 2 + 1) + 1(6 + 12 + 2 + 1 + 2) =$
$= 72 + 36 + 20 + 42 + 23 = 193$

Ответ: ~~всего~~ количество пар $(x; y)$ равно 193

N 1.

$$\begin{cases} ① \sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ ② \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

② $\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$\sin 2\alpha(1 + \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta) + 2\cos 2\beta \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = \frac{-4}{5}$

$\cos 2\beta(\sin(2\alpha + 2\beta)) = \frac{-2}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\beta = \frac{-2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{-1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

$\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2\beta = 1 - \frac{4 \cdot 5}{25} = \frac{5}{25}.$

$\left[\begin{array}{l} (3.1)\ \sin 2\beta = \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ (3.2)\ \sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$

(1) $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$

Если (3.1):

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{-\sqrt{5}}{5}.$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 1.$

$\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha - 1.$

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1.$

$4\sin^2 2\alpha - 4\sin 2\alpha + 1 + \sin^2 2\alpha = 1.$

$\sin 2\alpha (5\sin 2\alpha - 4) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} (3.1.1)\ \sin 2\alpha = 0 \\ (3.1.2)\ \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \end{array}\right.$

(3.1.1) $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$ $\quad$ $tg\alpha$ - определён $\Rightarrow$ $\cos\alpha \neq 0$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0.$

(3.1.2) $\cancel{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{5}}$

$\cancel{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

$\cancel{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{9}{5}}$

$\cancel{\cos\alpha = \frac{2}{5\sin\alpha}}$

$\cancel{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

$\cancel{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

$\cancel{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{9}{5}}$

$\cancel{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{5}}$

~~3.1.2 $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$, но 1 : $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$ $=\frac{-4}{5}\Rightarrow\sin(2\alpha+4\beta)=\frac{-8}{5}$, но $-1\le\sin(2\alpha+4\beta)\le 1$. Противоречие.~~

~~3.2~~ Если 3.2 :

$\sin 2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{-\sqrt{5}}{5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$.

$\cos 2\alpha=-1-2\sin 2\alpha$.

$1=\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=\sin^2 2\alpha+(1+2\sin 2\alpha)^2=$
$=5\sin^2 2\alpha+4\sin 2\alpha+1$.

$\sin 2\alpha(5\sin 2\alpha+4)\cancel{\sin}=0$.

3.2.1 $\sin 2\alpha=0$, уже разобрали

3.2.2 $\sin 2\alpha=\frac{-4}{5}$.

3.2.2 $\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\Rightarrow\cos 2\alpha=-1+\frac{8}{5}=\frac{3}{5}$

~~2 $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\Rightarrow\sin(2\alpha+4\beta)=0$.~~

~~$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)=0$~~

~~3.2.2.1 $\sin(\alpha+2\beta)=0\Rightarrow\cos(\alpha+2\beta)=1$~~

~~3.2.2.2 $\cos(\alpha+2\beta)=0$~~

~~3.2.2.1 : 1 $\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{5}}$~~

~~$\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta)+$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha + 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$

$tg\,\alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{-1}{2}.$

3.1.2) $\sin 2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cdot\frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}.$

$tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{1}{2}$, тогда других значений нет и всего их ровно 3.

Ответ: $tg\,\alpha = 0;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}$

N 2.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (x-2) - 2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$m = x - 2$
$n = y - 1$

$$\begin{cases} ① \ m - 2n = \sqrt{mn} \\ ② \ m^2 + 9n^2 = 25 \end{cases}$$

ОДЗ: $mn \geq 0$; $m - 2n \geq 0 \Rightarrow$ $m \geq 2n$

① $(m-2n)^2 = mn$

$m^2 - 4mn + 4n^2 = mn$

$m^2 + 4n^2 = 5mn$

② $(m^2 + 4n^2) + 5n^2 = 25$

$5mn + 5n^2 = 25$

$n(m+n) = 5 \Rightarrow n \neq 0$

$m + n = \frac{5}{n} \Leftrightarrow m = \frac{5}{n} - n = \frac{5-n^2}{n}$

$\cancel{n^2+} (m-2n)^2 = nm$

$\left(\frac{5}{n} - 3n\right)^2 = \frac{5-n^2}{n} \cdot n = 5 - n^2$

$\frac{25}{n^2} - 30 + 9n^2 = 5 - n^2$

$10n^2 \cancel{+2} - 35 + \frac{25}{n^2} = 0.$

$t = n^2 \Rightarrow t > 0.$

$10t^2 - 35t + 25 = 0.$

$2t^2 - 7t + 5 = 0$

$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9.$

$\cancel{t = \frac{+7+3}{4} = -1 \Rightarrow}$

$\cancel{t = \frac{-7-3}{4} = \frac{5}{2}}.$

$t = \frac{7-3}{4} = 1 \Rightarrow n^2 = 1. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (1.1)\ n = -1 \\ (1.2)\ n = 1 \end{array}\right.$

$t = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow n^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (2.1)\ n = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ (2.2)\ n = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$

~~(1.1) $n = -1 \Rightarrow m = \frac{5-1^2}{-1} = -4. \Rightarrow mn = -4$, но $mn \geq 0$ противоречие.~~

~~(1.2) $n = 1 \Rightarrow m =$~~

(1.1) $n = -1 \Rightarrow m = \frac{5-1^2}{-1} = -4 \Rightarrow mn = 4 > 0$

~~$\Rightarrow x - 2 = -4 \Leftrightarrow x = -6$ и $y - 1 = -1 \Leftrightarrow y = 0$~~, но

$m - 2n = -4 + 2 = -2 < 0$. Противоречие.

(1.2) $n = 1 \Rightarrow m = \frac{5-1^2}{1} = 4 \Rightarrow mn = 4 > 0$ и

$m - 2n = 4 - 2 = 2 > 0. \Rightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6$, $y - 1 = 1 \Leftrightarrow$

$y = 2$

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.1) $n = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow m = \frac{5 - \frac{10}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\frac{20}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{10}{2\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{20} =$
$= \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow m - 2n = \frac{\sqrt{10}}{2} - \sqrt{10} = \frac{-\sqrt{10}}{2} < 0$. Противоречие

2.2) $n = \frac{-\sqrt{10}}{2} \Rightarrow m = \frac{5 - \frac{10}{4}}{-\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{-\sqrt{10}}{2} \Rightarrow$
$m - 2n = \frac{-\sqrt{10}}{2} + \frac{2\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0$; $mn = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} > 0$
$\Rightarrow x - 2 = \frac{-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; $y - 1 = \frac{-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow$
$y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Тогда возможные решения
$(6; 2)$, $\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$. Проверка:
$x = 6$, $y = 2$: $6 - 4 = \sqrt{6 \cdot 2 - 6 - 4 + 2} \Leftrightarrow 2 = 2$;
~~36+~~ $4^2 + 9 = 25$.

$x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$:
$-\frac{10}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.
$\left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 9\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} + 9 \cdot \frac{10}{4} = \frac{100}{4} = 25$.

Ответ: $(6; 2)$, $\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

№6.

$$\begin{cases} (1)\ \frac{12x + 11}{4x + 3} \le ax + b \\ (2)\ ax + b \le -8x^2 - 30x - 17 \end{cases}$$

② $ax+b \le -8x^2-30x-17$

$-8x^2-(30+a)x-17-b \ge 0$.

$f(x)=8x^2+(30+a)x+17+b \le 0$.

$D = 900-60a+a^2-4\cdot 8\cdot(17+b) =$

$= 900-60a+a^2-544-32b = 356-60a+a^2$

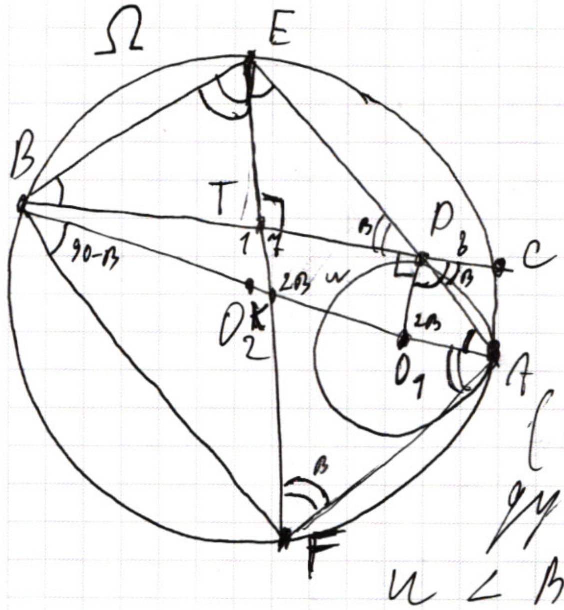
$-32b \ge 0$ т.к. ст. коэф. $>0 \Rightarrow$

$f(x)>0$ при $D<0$

$356-60a+a^2-32b \ge 0$.

$x_1 = \frac{-30-a+\sqrt{D}}{16}$

x_2



N 4.

Пусть O_2 - центр Ω и O_1 - центр ω. Пусть $T = EF \cap BC$. Тогда $\angle FBA = \angle FEA$ (опираются на одну дугу) $\angle ETD = 90°$ по условию и $\angle BFA = 90°$ т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow \angle EDT = \angle BAF$ по сумме углов $\triangle ETD$ и $\triangle BFA$. $\angle BEA = 90°$ т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow \angle EBC = \angle ABF$ по сумме углов $\triangle BED$ и $\triangle BAF$. $O_1D \perp BC$ т.к. BC - касательная $\Rightarrow EF \parallel DO_1$ т.к. $EF \perp BC$ и $DO_1 \perp BC$. $\angle CDA = \angle EDT$ (вертикальные) $\angle CDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DA} = \frac{1}{2}\angle DO_1A$. Пусть $\angle EDT = \beta \Rightarrow \angle DO_1A = 2\beta \Rightarrow$ т.к. $DO_1 \parallel EF$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle EKA = 2B$, где $K = BA \cap EF \Rightarrow \angle KAF + \angle EFA = \angle EKA = 2B$ (внешний угол $\triangle KAF$) $\Rightarrow \angle KFA = B = \angle KAF$. Тогда $O_2A = O_2F$ и $\angle BKF = 180° - 2B$, но $\angle KBF = 90° - B$ (по сумме углов $\triangle ABF$) $\Rightarrow$ $\angle BFK = 90° - B$ (по сумме углов $\triangle BKF$) $\Rightarrow$ $BK = KF = KA \Rightarrow K$ - середина $AB \Rightarrow K$ и O_2 - совпадают.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 90 = 0$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

$\cos 90 = \cos^2 90 - \sin^2 0°$

$=0$

$\cos 60 = \cos^2 30 - \sin^2 30°$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5}$ $\frac14$ $\frac{\sqrt3}{2} = \frac34 \cdot \frac14 = \frac14 = \frac{1}{6}$ $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 4\beta + 1 = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\alpha + 1 = 2\cos^2 2\beta$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = \frac{-4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac45$

$2\cos 2\beta = \frac{-4}{5} \cdot \frac{\sqrt5}{-1} = \frac{4}{\sqrt5} = \frac{4\sqrt5}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$2\cos^2\beta = \frac{7\sqrt5}{5}$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 3\cdot2\cdot3y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2$

$(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 2yx + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad 1 \le x \le 24$ $\quad x, y \in N$

$f(p) = [p/4]$ $\quad 1 \le y \le 24$

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$, $f(5) = 1$ $\quad f(x/y) < 0.$

$f(7) = 1$; $f(11) = 2$; f $\quad f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(a) = f(ab) - f(b)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ $\quad f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

$f(2) = f(2) + f(1)$ $\quad f(1) = 0.$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 14$ $\quad x \in (\frac{-11}{4}; \frac{-3}{4})$

$\frac{12x+11 - (ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0.$

$-4ax^2 - (3a+4b)x - 3b + 12x + 11$ $\quad \times\frac{44}{4}{176}$

$(-4ax^2 + x(12 - 3a - 4b) - 3b + 11)(4x+3) = 0.$

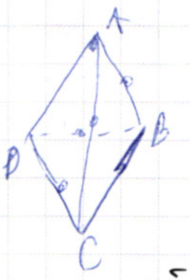
$D = (12 - 3a - 4b)^2 - 4(-4a)(-3b+11) =$

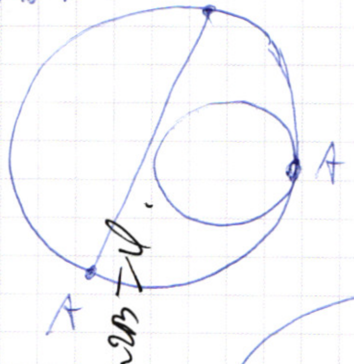
$144 + 9a^2 + 16b^2 - 96b - 72a + 24ab - 48ab + 176$

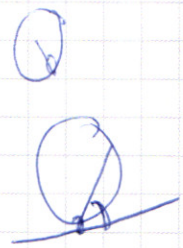
$\sin(2\alpha + 4\beta) = 0.$

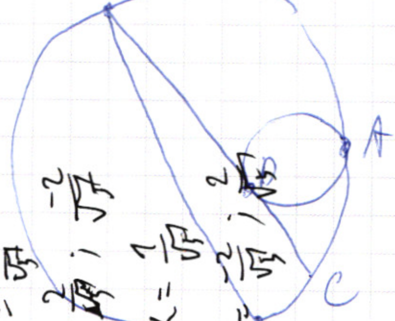
$\sin(\alpha + 2\beta)\cos(\alpha + 2\beta) = 0$

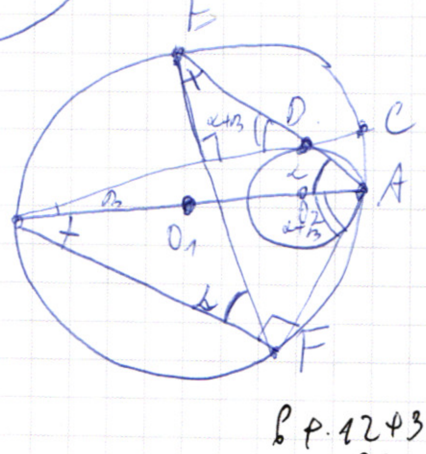
$\sin\alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \cos\alpha \sin(\alpha + 2\beta) = 0$











$CD = 8$

$BD = 17$

$\angle AFE - ?$

$\sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$; $\frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos\alpha \cdot \sin 2\beta = 0$

7 (2)
+ 3 (6)
+ 20
+ (4 2)
+ 23
143

$\times\frac{12}{6}{72}$

$\times\frac{18}{2}{36}$

b p. 12+3 / 21

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0.$

$x^2+ \quad -x^2+18$

$t = x^2+18x.$

$\log_{12}\frac{13}{12}$

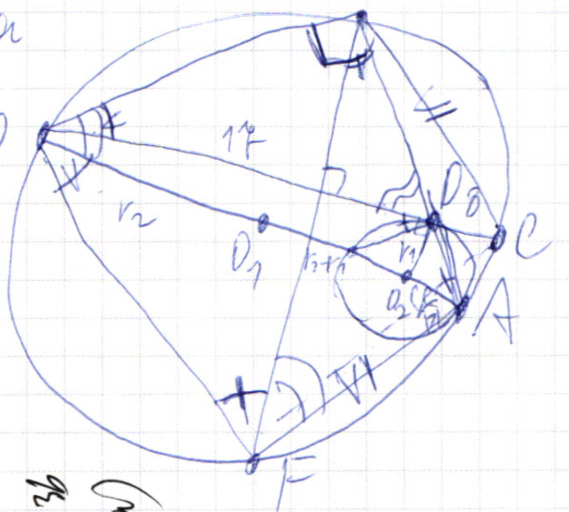
$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$5 + 5^{\log_{12}t} \geq t\left(t^{\log_{12}13-1}-1\right)$

$-8x^2-(30+a)x-17-b$

$5^{\log_{12}t} - t^{\log_{12}13} + t \quad D = 900+60a+a^2-4\cdot 8\cdot(17+b)$

$(a^x)' = e^x \cdot \ln a$



$CD = 8$

$BD = 17$

$17^2 + r_1^2 =$

$= (2r_2 - r_1)^2$

$17^2 + r_1^2 = 4r_2^2 - 4r_2r_1 + r_1^2$

$17^2 = 4r_2^2 - 4r_2r_1$

4 7 2 | 3 6 1 | 2 0 | 4 2 1 | 2 3 | 1 4 3

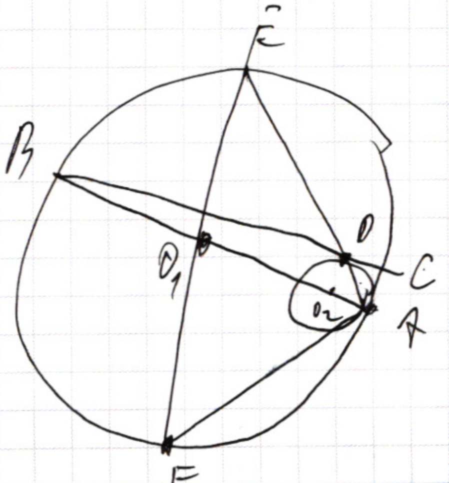
$\begin{array}{r} 900 \\ -544 \\ \hline 356 \end{array}$

$\begin{array}{r} 17^2 \\ +32 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \end{array}$

$12x^{2}+14x^2+44x+3ax+3b$

$40x^2+x(12-44b+3a)$

$+ 4b+11$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)}+\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha)=-\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta))=\frac{-4}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{-2}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{-1}=\frac{-2\sqrt5}{5}$

$1-\frac{4}{25}=\frac{5}{25}=$

$\cancel{2\cos^2\beta}=\sin 2\beta=\pm\frac{\sqrt5}{5}$

$\frac{-1}{\sqrt5}=\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\frac{-\sqrt5}{5}=\sin 2\alpha\cdot\frac{-2\sqrt5}{5}+\frac{\sqrt5}{5}\cos 2\alpha$

$-1=\sin 2\alpha(-2)+\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha-1$

$\cos^2 2\alpha+\sin$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$x^2-4x+9y^2-18y=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2+6(x-2)(y-1)=25+6(x-2y)^2$

$(x-2+3y-3)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases}(x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25\end{cases}$$

$x-2+2(y-1)$

$(x-2)^2 - 6(x-2)(y-1)+9(y-1)^2=25-6(x-2y)^2$

$(x-2-3(y-1))^2$

$(x-3y+1)^2$

$(x-2y+(y-1))^2$

$x-2y=x-2-2(y-1)$, $x-2=n$, $y-1=m$

$$\begin{cases}(n-2m)^2=nm \\ n^2+9m^2=25\end{cases}$$

$n^2-4nm+4m^2=nm$

$n^2+4m^2=5nm$

$n^2+4m^2+4mn=9mn$

~~$n^2+4m(n$~~

$n^2+4m(m+n)=9mn$

$n^2+20=9mn$

$20=n(9m-n)$

$n^2+9m^2=25$

$5nm+5m^2=25$

$m(n+m)=5$

$m(n+m)=5$

$n(9m-n)=20$

~~$m^2+10mn-n^2=25$~~

$n+m=\frac{5}{m}$

$9m-n=\frac{20}{n}$

$10m=\frac{5}{m}+\frac{20}{n}$

$10m^2n=5n+20m$

$2m^2n=n+4m$

$n+m=\frac{5}{m}$

$n=\frac{5}{m}-m=\frac{5-m^2}{m}$

$nm=5-m^2$

$\left(\frac{5}{m}-3m\right)^2=5-m^2$

$\frac{25}{m^2}-30+9m^2=5-m^2$

$10m^2-35+\frac{25}{m^2}=0$

$t=m^2$

$10t^2-35t+25=0$

$2t^2-7t+5=0$

$D=49-40=9$

$6+2=8$

$\sqrt{8}$

$16+9=25$

$-4+2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)