МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-6-6x+6=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36 \end{cases}$$

$\exists\ y-6=a$ и $x-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$$

$$-13ab+27b^2=-90$$

Откуда $a=\dfrac{90+27b^2}{13b}$ подставим во 2 ур-ние

$$9b^2+9\left(\frac{30+9b^2}{13b}\right)^2=90 \quad |:9$$

$$169b^4+900+540b^2+81b^4=169\cdot 10\,b^2$$

$$25b^4-115b^2+90=0 \quad |:5 \qquad 5b^4-23b^2+18=0$$

По т. Виета $\left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=\frac{18}{5} \end{array}\right.$ $\quad b=\pm 1$, $\quad b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

1) $b=\pm 1 \quad a=\dfrac{90+27\cdot 1}{\pm 13\cdot 1}=\pm 9$

Пара $-1; -9$ не подходит, т.к. $-9+6<0$, а $\sqrt{ab}\geq 0$

~~$(1; 9)$ − решение~~ $b=1\Rightarrow x=2 \quad a=9\Rightarrow y=15$

$(2; 15)$ − решение

2) $b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a^2=90-9b^2 \quad a^2=90-9\cdot\frac{18}{5}=\frac{450-162}{5}=\frac{288}{5}=9\cdot 16\cdot\frac{2}{5}$

$a=\pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

Пара $3\sqrt{\frac{2}{5}}; 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ не подходит $12\sqrt{\frac{2}{5}}-18\sqrt{\frac{2}{5}}<0$

$b=-3\sqrt{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1 \qquad y=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6$

Ответ $(2; 15)$; $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Задача N 6

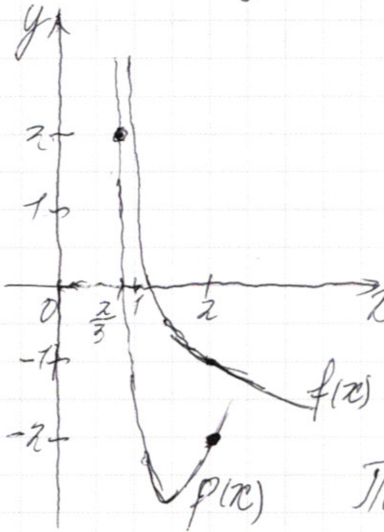
$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$\exists\ \frac{4}{3x-2} - 2 = f(x) \qquad f(2) = -1$

$ax + b = g(x)$

$18x^2 - 51x + 28 = p(x) \qquad p(\frac{2}{3}) = 2 \qquad p(2) = -2$

Для наглядности схематично построим графики ф-ций



Заметим, что если $g(2) \geq p(2)$ и $g(\frac{2}{3}) \geq p(\frac{2}{3})$, то $g(x) \geq p(x)$ на $[\frac{2}{3}; 2]$

найдем a и b, такие, что

$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ \frac{2}{3}a + b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2b = -8 \\ 2a + 3b = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4 \\ a = -3 \end{cases}$

$\exists\ -3x + 4 = g(x)$

Т.к. $g(x)$ и $y(x)$ – лин. ф-ции, то $g(x) \geq g(x)$ при $x \in [\frac{2}{3}; 2]$

Посмотрим есть ли пересечение $g(x)$ и $f(x)$ на данном интервале $\frac{8-6x}{3x-2} = -3x + 4 \qquad \exists\ x \neq \frac{4}{3}$ и $-3x + 4 \neq 0$

$\frac{2}{3x-2} = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Значит посмотрим на $x = \frac{4}{3}$

$f(\frac{4}{3}) = 0$ и $g(\frac{4}{3}) = 0$

Значит $g(x)$ касается $f(x)$ и $f(x) \geq g(x)$ при $x \in [\frac{2}{3}; 2]$

$y(x) \geq g(x) \Rightarrow g(\frac{4}{3}) \geq 0$, но, если $g(\frac{4}{3}) > 0$ то $f(x) = g(x)$ имеет 2 корня и $f(x) \geq g(x)$ не выполняется

$\frac{4}{3}a + b = 0$ при этом $\begin{cases} 2a + b \geq -2 \\ \frac{2}{3}a + b \geq 2 \end{cases}$

$b = -\frac{4}{3}a \Rightarrow \begin{cases} 2a - \frac{4}{3}a \geq -2 \\ \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}a \geq 2 \end{cases} \begin{cases} a \geq -3 \\ a \leq -3 \end{cases} \Rightarrow a = -3$ и $b = 4$

Ответ: 1 пара: $a = -3$, $b = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

1) ОДЗ: $26x-x^2>0$ $\quad x(26-x)>0$

$-\ 0\ +\ 26\ -$

$x \in (0; 26)$

2) $26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$\exists\ 26x-x^2=z$, тогда

(!) $z^{\log_5 12}+z \geq 13^{\log_5 z}$

$\log_{13}(z^{\log_5 12}+z) \geq \log_5 z$

$\log_5(z^{\log_5 12}+z) \geq \log_5 z$

$\log_5(z)+\log_5 z^{\log_5 12+1} \geq \log_5 z$

$z^{\log_5 12+1} \geq 1$

$\cancel{(x^2-26}$ $(26x-x^2)^{\log_5 12+1} \geq 1$

$26x-x^2 \geq 1$

$x^2-26x+1 \leq 0$

$D=26^2-4=24\cdot 28=4^2\cdot 42$

$x=\cancel{\frac{}{}}13 \pm 2\sqrt{42}$

$x \in (13 \pm 2\sqrt{42})$ $\qquad 2\sqrt{42}<13$ т.к. $168<169$

Ответ: $x \in (13 \pm 2\sqrt{42})$

Задача 1

$\sin(2\alpha+2\beta)=\overset{\sin 2\alpha}{\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}}\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\sin 4\beta\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\cos 2\beta\sin 2\beta\cdot$

$\cdot\cos 2\alpha=2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)=$

$=2\cos 2\beta\cdot(-\frac{1}{\sqrt{17}})=-\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$\sin 2\alpha+4-8\sin^2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=8\sin^2\alpha-5$

$4\sin^2\alpha-4\sin^4\alpha=64\sin^4\alpha-80\sin^2\alpha+25=0$

$68\sin^4\alpha-84\sin^2\alpha+25=0$

$\sin^2\alpha=\frac{84\pm16}{2\cdot68}$

$\left[\begin{array}{l}\sin^2\alpha=\frac{25}{34}\\ \sin^2\alpha=\frac{17}{34}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\qquad\left[\begin{array}{l}\cos^2\alpha=\frac{9}{34}\\ \cos^2\alpha=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\qquad\begin{array}{l}tg\alpha=\pm\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\pm5}{3}\\ tg\alpha=\pm1\end{array}$

2) $\sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

Решить ~~2sin~~ $2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-8\sin^2\alpha-5$

$68\sin^4\alpha-76\sin^2\alpha+25=0$

. . . .

Ответ: $\pm\frac{5}{3}; \pm1; \ldots$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{\sin 2\alpha \cos}\ \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\cancel{\sin}$ $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta)$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$y - 6x = \sqrt{x(y-6) - 1(y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(y-6) - 6x + 6$

$\cancel{y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6}$

$\begin{cases} 9a^2 + b^2 = 90 \\ b - 6a = \sqrt{ab} \end{cases}$ $\quad b = 3\sqrt{10-a^2}$ $\quad 169b^2 - 4 \cdot 36 \cdot 90$

$36a^2 - 12ab + b^2 = ab$

$b \geq 6a$ $\quad 36a^2 + 90 - 9a^2 = 13ab$

$27a^2 + 90 = 3 \cdot 13 a\sqrt{10-a^2}$

$9a^2 + 30 = 13a\sqrt{10-a^2}$

$x^{\log_5 12} + x \geq 13^{\log_5 x}$ $\quad x^2 - 26x > 0$

$x(x-26) > 0$ $\quad x \in (-\infty, 0) \cup (26, +\infty)$

$\log_5 12 + 1 \geq \log_x(13^{\log_5 x})$

$81a^2 + 540a + 900 =$

$= 13^2 a^2 \cdot 10 - 13^2 a^3$

$x(1 + x^{\log_5 12 - 1}) \geq 13^{\log_5 x}$

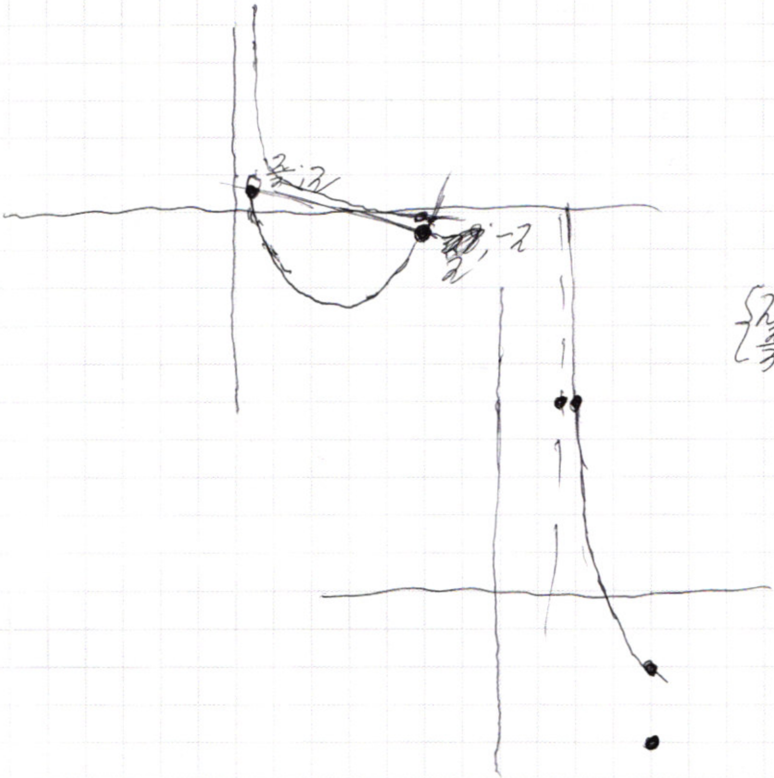
$x^{\log_5 12} = x^{\left(\frac{\log_x 12}{\log_x 5}\right)}$

$\log_{13}(x^{\log_5 12}) + \log_{13} x \geq \log_5 x$ $\quad \frac{\log_5 12}{\log_x 13} + \frac{1}{\log_x 13} \geq \frac{1}{\log_x 5}$

$\frac{4}{3x-2}-2 \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$18\cdot\frac{4}{9}-\frac{102}{3}+28=$

$=8-34+28$



$\begin{cases}2a+b=-2\\ \frac{2}{3}a+b=2\end{cases}$ $2a+3b=6$

$2b=8$

$b=4$

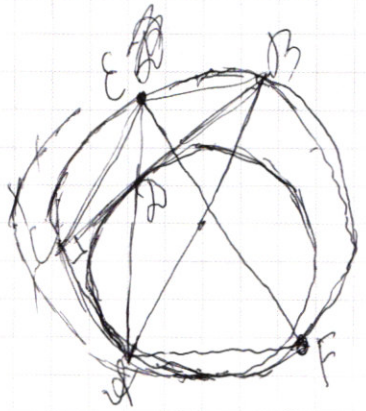
$a=-3$

$\frac{8-6x}{3x-2}=-3x+4$

$\frac{2}{3x-2}=1$

$288=8\cdot36=32\cdot9$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0$



$\angle BCA=90^\circ=\angle AEB$

$\angle AFE=\angle EBA=$

$-13ab-3a^2=-360$

$b=\frac{360-3a^2}{13a}$

$-13ab+27b^2=-90$

$\frac{90+27b^2}{13b}$

$(b^2-1)(5b^2-18)$

$9b^2+9\cdot\left(\frac{30+9b^2}{13b}\right)^2=90$

$b^2+\frac{30^2+60\cdot9b^2+81b^4}{169b^2}=10$

$169b^4+900+540b^2+81b^4=169\cdot10b^2$

$25b^4+90+54b^2-169b^2=0$ $5b^4-23b^2+18=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^{\log_5 12} + x \geq 13^{\log_5 x}$

$\cancel{\log_{13}(x^{\log_5 12+1}) \geq \log_5 x}$

$\cancel{(\log_5 12+1)\log_{13} x \geq \log_5 x}$

$\cancel{\frac{(\log_5 12+1)\log_5 x}{\log_5 13} \geq \log_5 x}$

$\log_{13}(x($

$\log_{13}(x^{\log_5 12}+x) \geq \log_5 x$

$\log_{13}(x^{\log_5 12}+x) = \frac{\log_{13} x}{\log_{13} 5}$

$\cancel{(x^{\log_5 12}+x)(\log_{13} 5)}$

$21^2 \cdot 16 - 4 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 25 = 16(21^2 - (21-4)(21+4)) = 16 \cdot 16$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)