МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано: Найти: $tg\alpha$ - ?

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \quad (2) \end{cases}$$

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\cos 2\beta = -\frac{2}{5} : (2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{1}{5\cdot\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(подставили (1))

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Big| : \frac{\sqrt{5}}{5} \neq 0$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$ т.к. $tg\alpha$ - существ.

$2tg\alpha \pm 2(1-tg^2\alpha) + (tg^2\alpha+1) = 0$

1) $2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1 = 0 \qquad -tg^2\alpha + 2tg\alpha + 3 = 0$

2) $2tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1 = 0 \qquad 3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

Первое ур-е имеет корни $tg\alpha = -1$ и $tg\alpha = 3$

Второе ур-е имеет корни $tg\alpha = -1$ (совпадают) и $tg\alpha = \frac{1}{3}$,

т.к. по условию корней не меньше 3 и $tg\alpha$ - сущ,

то $tg\alpha = -1$, $tg\alpha = 3$ или $tg\alpha = \frac{1}{3}$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$ или $tg\alpha = \frac{1}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & ① \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & ② \end{cases}$$

①: Возв. в квадрат обе части, огр.: $x - 12y \geq 0$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$(x-12y)^2 = (2y-1)(x-6)$, $x - 12y = (x-6) - 6(2y-1)$

②: $(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 45 + 45 = 90$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

Пусть $(x-6) = a$, $(2y-1) = b$ $(x-12y) = a - 6b \geq 0$

$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab & ③ \\ a^2 + 9b^2 = 90 & ④ \end{cases}$$

из ③ $a^2 - 12ab + 36b^2 - ab = 0$

$(a-4b)(a-9b) = 0$

$a = 4b$ или $a = 9b$

подставим в ④

$25b^2 = 90$

$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b = +3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $a = 4 \cdot 3\sqrt{\frac{2}{5}}$,

$a - 6b = (12-18)\sqrt{\frac{2}{5}} < 0$ - неуд

$b = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $a = -4 \cdot 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a - 6b = (-12+18)\sqrt{\frac{2}{5}} \geq 0$ - уд

$x - 6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $2y - 1 = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$x = 6 + 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $y = \frac{1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$

$90b^2 = 90$

$b = \pm 1$ $(a = \pm 9)$

$b = 1$, $a = 9$, $a - 6b \geq 0$ - уд

$b = -1$, $a = -9$, $a - 6b \geq 0$ - неверно

тогда

$x - 6 = 9$ $2y - 1 = 1$

$x = 15$ $y = 1$

$(15; 1)$

Ответ: $(15; 1)$ или $\left(6 + 12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ D: 1) $10x-x^2>0$ (значит $x^2-10x<0$)

в D: $10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ т.к. $(10x-x^2)^{\log_3 4}$, то $(10x-x^2)\neq 1$*

Пусть $10x-x^2=t$, $t>0$, $t\neq 1$ *

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$, $t^{\log_3 4}=4^{\log_3 t}$,

$t \geq 5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$ т.к. $\log_3 4=\log_t 4\cdot\log_3 t$
$\log_3 5=\log_t 5\cdot\log_3 t$

метод рационализации, сравним $5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$ с нулем

$5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}\geq 0$

$(5-4)(\log_3 t-1)\geq 0 \Rightarrow \log_3 t-1\geq 0$ $\log_3 t\geq\log_3 3$,
~~$\log_3\frac{t}{3}\geq\log$~~ т.к. $\log_3 p\nearrow$,

Т.е. если $t\leq 3$, то $5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}\leq 0$, то $t\geq 3$,

значит $3\geq t\geq 0\geq 5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$, т.к. $t>0$ из D

$t>0$, т.е. $x(10-x)>0$, $x\in(0;10)$

$t\leq 3$, т.е. $x^2-10x+3\geq 0$

$D=100-12=88=(2\sqrt{22})^2$

$x=\frac{10\pm 2\sqrt{22}}{2}=5\pm\sqrt{22}$

Если $t>3$, тогда оценим правую часть (учитывая $t\leq 25$, ведь $\max_R(10x-x^2)=25$,

т.к. $x_в=\frac{-10}{-2}=5$,

$f(5)=25$)

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$, $t \in (0; 25]$ $\quad | : t > 0$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} \geq t^{\log_3 5 - 1}$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$\cancel{1+t} \quad \cancel{1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0}$

$\cancel{f(t) = 1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}}$

$\cancel{f'(t) = \log_3 \frac{4}{3} \cdot t^{\log_3 \frac{4}{9}} - \log_3 \frac{5}{3} \cdot t^{\log_3 \frac{5}{9}}}$

$\log_t (t + t^{\log_3 4}) \geq \log_t (t^{\log_3 5})$

$1 + \log_t (1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \log_3 5$

$\log_t (1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \log_3 \frac{5}{3}$

$\log_t \left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t}\right) \geq \log_3 \frac{5}{3}$

$\log_t \left(1 + \frac{4^{\log_3 t}}{t}\right) \geq \log_3 \frac{5}{3}$

$\log_t (t + \cancel{4 \cdot 10} \cdot 4^{\log_3 t}) \geq \log_3 5$

Ответ: $x \in (0; 5 - \sqrt{22}] \cup [5 + \sqrt{22}; 10)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

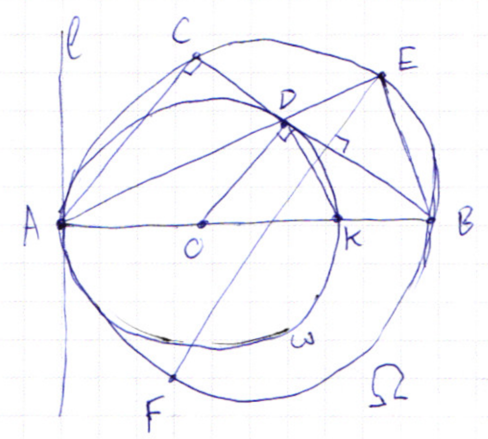
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Пусть O – центр ω.

Рассм. общую касательную l проходящую через общую точку касания A, тогда $OA \perp l$ и $AB \perp l$, т.к. это радиусы (диаметр) в точку касания окр. ω и Ω,

Значит OA и AB совпадают $\Rightarrow$ $\Rightarrow O \in AB$.

$AB \cap \omega = K$, тогда $AO = OK = r$ – радиус малой окр. ω

· Опустим $OD \perp CB$ (радиус в точку касания), тогда $OD = r$.

$\triangle ODB \sim \triangle ACB$ ($\angle B$ - общий, $\angle ODB = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр AB)

Тогда $\frac{BO}{OD} = \frac{BA}{AC}$, $AC = \frac{BA \cdot OD}{BO} = \frac{(2r+BK)\cdot r}{(r+BK)} = \frac{BA}{BO}\cdot r$

При этом также $\frac{BA}{BO} = \frac{BC}{BD} = \frac{CD+BD}{BD} = \frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17}$, $AC = \frac{32}{17}r$,

в $\triangle ACB$ по т. Пифагора:

$AC^2 + BC^2 = AB^2$, $\left(\frac{32}{17}r\right)^2 + (16)^2 = (2r+BK)^2$, ①

$BK = \frac{2}{15}r$, т.к. $\frac{BA}{BO} = \frac{32}{17}$, то $\frac{BA-BO}{BO} = \frac{15}{17}$, $\frac{BA-BO}{BO} = \frac{r}{BK+r} = \frac{15}{17}$,

$17r = 15BK + 15r$

$BK = \frac{2}{15}r$

подставим в ①

①: $\frac{1024}{289}r^2 + 256 = \frac{1024}{225}r^2$

$r^2 \cdot 1024 \cdot \frac{(289-225)}{289\cdot 225} = 256$

$r^2 \cdot \frac{32^2 \cdot 8^2}{15^2 \cdot 17^2} = 16^2 \Rightarrow r = \frac{16 \cdot 15 \cdot 17}{32 \cdot 8} = \frac{15\cdot 17}{16} = \frac{255}{16} = 15\frac{15}{16}$

Тогда $AB = 2r + BK = 2r + \frac{2}{15}r = \frac{32}{15}\cdot\frac{255}{16} = 34$, AB - диаметр,

Значит $R = \frac{AB}{2} = 17$ - радиус Ω

2) $\angle AFE = \angle ABE$ – опираются на $\overset{\frown}{AE}$ в Ω

$O \in AK \Rightarrow AK$ – диаметр ω, $\angle ADK = 90^\circ$ – опир. на AK,

тогда $\triangle AKD \sim \triangle ABE$ ($\angle A$ – общий, $\angle ADK = \angle AEB = 90^\circ$)

и $\angle AKD = \angle ABE = \angle AFE$, из $\triangle OBD$: $\frac{BD}{OB} = \cos\angle OBD$,

$BD = \frac{17}{2}$; $OB = OK + BK = \frac{17}{15} r = \frac{17}{\cancel{15}} \cdot \frac{\cancel{255}^{15}}{16} = \frac{17 \cdot 15}{16}$,

$\cos\angle OBD = \frac{\cancel{17} \cdot \cancel{16}^{8}}{\cancel{2} \cdot \cancel{17} \cdot 15} = \frac{8}{15}$

по т. cos в $\triangle BKD$, $DK^2 = BK^2 + BD^2 - 2 \cdot BK \cdot BD \cdot \cos\angle OBD$

$DK^2 = \frac{225}{64} + \frac{289}{4} - 2 \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{8}{15} = \frac{225 + 16 \cdot 289 - 64 \cdot 17}{64}$

$BK = \frac{1}{15} \cdot \frac{255}{16} = \frac{15}{8}$; $BD = \frac{17}{2}$

$DK^2 = \frac{225 + 16 \cdot 17 \cdot 13}{64} = \frac{225 + 3536}{64} = \frac{3761}{64} = \left(\frac{\sqrt{3761}}{8}\right)^2$

$\triangle ADB \sim \triangle DKB$ ($\angle B$ – общий, $\angle BDK = \angle DAK = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DK}$),

$\frac{DK}{AD} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow AD = \frac{DK \cdot BD}{BK} = \cancel{\frac{119 \cdot 17 \cdot 8}{8 \cdot 2 \cdot 15}} = \cancel{\frac{119 \cdot 17}{30}} =$

$= \frac{\sqrt{3761} \cdot 17 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot 2 \cdot 15} = \frac{\sqrt{3761} \cdot 17}{30}$

По т. cos в $\triangle ADK$: $AD^2 = DK^2 + AK^2 - 2 \cdot AK \cdot DK \cdot \cos\angle ADK$

$\cos\angle ADK = \frac{AD^2 - DK^2 - AK^2}{-2 \cdot AK \cdot DK}$

Ответ: $r_\omega = 15\frac{15}{16}$

$R_\Omega = 17$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ для простого p

$2 \le x \le 25$, $2 \le y \le 25$; $x, y \in N$; $f(x/y) < 0$ (очевидно, что если $z \in Q$, то $\frac{1}{z} \in Q$)

тогда $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

Заметим, что $f(1) = f(1^n) = \underbrace{f(1) + \ldots + f(1)}_{n} \Rightarrow f(1) = 0$

~~$x, y \neq 2^k \cdot 3^i$, где $k, i \ge 0$, т.к.~~

~~тогда $f(x/y) =$~~ если $x = 2^k \cdot 3^i$, то $f(x) = k \cdot [\frac{2}{4}] + i \cdot [\frac{3}{4}] = 0$

Рассм. $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$, пусть $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, это разложение на простые множители,

$f(x) = k_1 \cdot [p_1/4] + k_2 \cdot [p_2/4] + \ldots + k_n \cdot [p_n/4]$

$f(\frac{1}{y}) + f(y) = f(1) = 0$, т.о. $f(\frac{1}{y}) = -f(y)$,

значит $f(x) < f(y)$, где $f(y)$ можно представить как и $f(x)$

Рассм. значения $f(x)$ для $2 \le x \le 25$

$f(2) = f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(18) = f(16) = f(24) = 0$

$f(5) = 1$; $f(7) = 1$; $f(10) = f(5) = 1$; $f(15) = 1$; $f(20) = 1$; $f(14) = 1$; $f(21) = 1$

$f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$

$f(25) = 2$

$f(22) = 2$ - разобрали все 24 числа,

среди них $f(x) = 0$ при 10 знач. $f(x) = 1$ при 7 знач

$f(x) = 2$ при 3, $f(x) = 3$ при 1, $f(x) = 4$ при 2

и $f(x) = 5$ при 1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Посчитаем кол-во комбинаций $f(y) > f(x)$,

где $2 \le x; y \le 25$

если $f(x) = 0$ (10 чисел), то y - любое из 14 чисел | 140 вар.

если $f(x) = 1$ (7 чисел), то y - любое из 7 чисел | 49 вар.

если $f(x) = 2$ (3 числа), y - любое из 4 чисел | 12 вар.

если $f(x) = 3$ (1 число), y - любое из 3 чисел | 3 вар.)

если $f(x) = 4$ (2 числа), $y = 23$, $f(y) = 5$) - 1 число, | 2 вар.

если $f(x) = 5$, то нет y : $f(y) > f(x)$

Итого $140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 140 + 66 = 206$ вар.

Ответ: 206 вариантов (пар)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ a, b - ? нер-во верно для всех $x\in[\frac{1}{4};1]$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} = \frac{1}{x-\frac{5}{4}}+4$

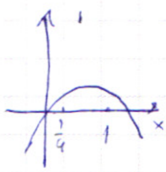
1) $-32x^2+36x-3 \ge ax+b$ - верно для всех $x\in[\frac{1}{4};1]$

$f(x) = -32x^2+(36-a)x-(3+b)$ - квадр. функция, гр-парабола, ветви - вниз =>

=> $f(x)\ge 0$ на $[\frac{1}{4};1]$ т.и т.т.к. $\begin{cases} f(\frac{1}{4})\ge 0 \\ f(1)\ge 0\end{cases}$

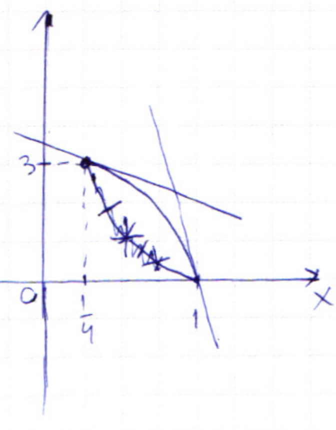
$f(\frac{1}{4}) = -2+9-\frac{a}{4}-3-b = 4-\frac{a}{4}-b\ge 0$ => $\begin{cases}\frac{a}{4}+b\le 4\\ a+b\le 1\end{cases}$

$f(1) = -32+36-a-3-b = 1-a-b\ge 0$ =>



2) $ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{1}{x-\frac{5}{4}}+4$, $f(x)=\frac{1}{x-\frac{5}{4}}+4$ - гипербола (дробная функц.) асс. $x=\frac{5}{4}$, $y=4$

$\frac{(ax+b)(4x-5)-(16x+16)}{4x-5}\ge 0$ $f(\frac{1}{4})=3$, $f(1)=0$



$y=ax+b$ - прямая

• если $a>0$, то достаточно чтобы $y(\frac{1}{4})\ge 3$, $\frac{a}{4}+b\ge 3$ (т.к. при $a>0$ $y(x)\nearrow$, $f(x)\searrow$ на R)

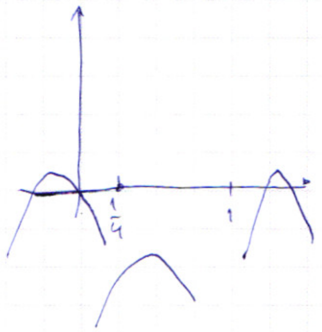
• если $a<0$, то рассм. график кас. к $f(x)$

если $a<0$ Вернемся к записи

$$\frac{(ax+b)(4x-5)-(16x-16)}{4x-5} \geq 0, \quad (4x-5)<0 \text{ при } x \in [\tfrac{1}{4}; 1],$$

тогда $4ax^2 + x(4b-5a-16) + (-5b+16) \leq 0$

$a<0 \Rightarrow$ ветви параболы - вниз



Ответ:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$+\sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$2(\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\log_3\frac{4}{3} = \frac{\log_t\frac{4}{3}}{\log_t 3}$

$\log_t\frac{4}{3}\cdot\log_3 t$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3} =$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$= \log_5 t\cdot\log_3 5$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$

№2

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}} = -1$

$\sin x \pm 2\cos x = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm$

$(x-6)^2 + (36y^2-36y+9) = 90$

$\frac{1}{1-\frac{5}{4}}+4 =$

$(6y-3)^2 =$

$= 9(2y-1)^2 =$

$= \frac{1}{-\frac{1}{4}}+4 =$

$2y(x-6) - (x-6) = (2y-1)(x-6)$

$= 9(4y^2-4y+1)$

$= -4+4=0$

$(x-12y) = (x-6) - 6(2y-1)$

$(ax+b)(4x-5) - 16x+16 =$

$x-6=a,\quad 2y-1=b$

$= 4ax^2 + x(4b-5a) - 5b - 16x + 16 =$

$(a-6b)^2 = ab$

$a^2-12ab+36b^2 = ab$

$= 4ax^2 + x(4b-5a-16) +$

$-(5b-16)$

$a^2+9b^2 = 90$

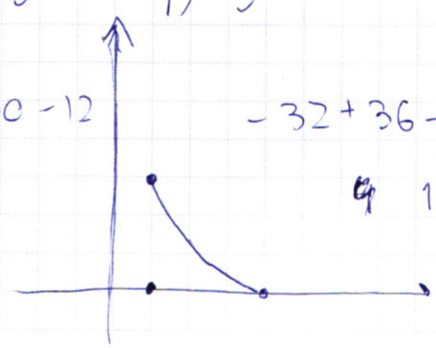
$a^2-13ab+36b^2=0$

$(a-4b)(a-9b)=0$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$

$-32x^2 + x(36-a) - (3+b) \geq 0$

$\left[\frac{1}{4};1\right]$



$D = 100-12$

$-32+36-a-3-b\geq 0$

$\frac{1}{16}\cdot(-32) + \frac{1}{4}\cdot(36-a) - (3+b)$

$-2+9-\frac{a}{4}-3-b\geq 0$

$1-a-b\geq 0$

$a+b\leq 1$

$4-\frac{a}{4}-b\geq 0$

$5^{\log_5 t} =$

$\frac{a}{4}+b\leq 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

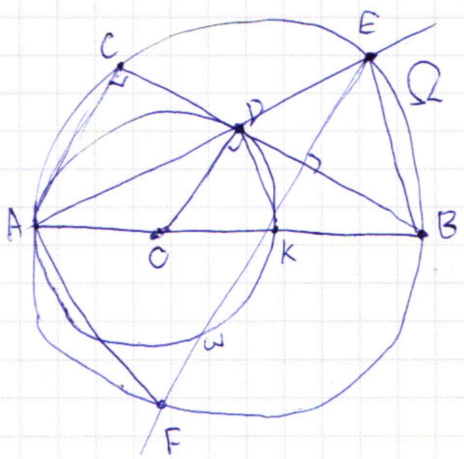
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{17}{15} \cdot \frac{255^{15}}{16}$

$\frac{2}{15} \cdot \frac{255^{15}}{16_8}$

$\frac{17}{2}$

$\frac{17 \cdot 16^8}{2 \cdot 17 \cdot 15}$



$15+17=\frac{32}{2}$

$\frac{BK+OK}{b}$

$\frac{BK+r}{BK+2r} = \frac{17}{2 \cdot 16}$

$64 \times 17 = 1088$; $289 \times 16 = 4624$

$(BK+r) \cdot 32 = (BK+2r) \cdot 17$

$628-88=$

$16 \times 17 = 272$

$15 BK = 2r$

$BK = \frac{2}{15} r$

$61 \times 61 = 3721$

$BK = \frac{2}{15} r$

$\frac{17}{15} \cdot \frac{255^{15}}{16}$

$16 \cdot 289 - 64 \cdot 17 =$
$= 16 \cdot 17 (17 -$

$300 \times 300 = 90000$

$100 \times 100 = 10000$

$BO = \frac{17}{15} r \quad OD = r$

$AC = \frac{32 \cdot 15}{15 \cdot 17} = \frac{32}{17} r$

$\frac{\frac{17}{15} r}{r} = \frac{\frac{32}{15} r}{AC}$

$AC^2 = \left(\frac{32}{15} r\right)^2 - BC^2$

$\frac{1024}{225} r^2 - 256 = \frac{1024}{289} r^2$

$r^2 = \frac{1024 \cdot 289 - 1024 \cdot 225}{289 \cdot 225}$

$272 \times 13 = 3536$; $3536 + 225 = 3761$

$\frac{BK+2r}{BK+r}$

$\frac{BK}{BK+r} =$

$121 \times 121 = 14641$

$16 \times 15 = 240$

$119 \times 119 = 14161$

$16 \times 17 = 112$ … 1072

$t + t^{\log_3 4} = 5^{\log_3 t}$

$256 - 1$

$17 \times 15 = 255$

$t = \quad 10x - x^2 = x(10-x)$

$1072 \times 13 = 13936$

$10x - x^2 = 1$

$x^2 - 10x + 1 = 0$

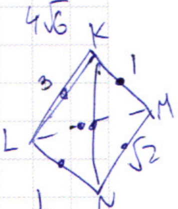
$D = 100 - 4 = 96 = 16 \cdot 6$

$4\sqrt{6}$

$\frac{-10}{-2} = 5$

$x = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2}$

$x = 5 \pm 2\sqrt{6}$



$t(5) = 50 - 25 = 25$

$13936 + 225 = 14161$

$\frac{225+13936}{69}$

$\frac{2}{15} \cdot \frac{255^{15}}{16_8}$

$\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

$\log_3 4 = \frac{\log_t 4}{\log_t 3} = \log_t 4 \cdot \log_3 t$

$16 \cdot 17 (17 - 4)$
$16 \cdot 13 \cdot 17 + 225$

$\log_3 t = \frac{\log_3 4}{\log_t 4} = \frac{\log_4 t}{\log_4 3}$

$\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3} = t^{\log_3 5} = \log_3 5 \cdot \log_5 t$

$\frac{\log_5 t}{\log_5 3} = \frac{\log_3 5}{\log_t 5} =$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)