МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. 1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ 2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$$\begin{array}{l} 2) \\ 1) \end{array}\begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$$

<u>1 случай $\left(\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\right)$:</u>

① $\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=-\cos\alpha \\ 3\cos\alpha=\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-1 \\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3\end{array}\right.$$

2 случай $\left(\sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}\right)$:

① $\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha-2\cos\alpha+2\sin\alpha)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=-\cos\alpha \\ 3\sin\alpha=\cos\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-1 \\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{3};\ 3.$

№2. $\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} & ② \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. & ① \end{cases}$

① $x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

② $\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$

$(x-12y)^2-2xy+12y+x-6=0.$

$x^2-24yx+12^2y^2-2xy+12y+x-6=0$

$x^2-12x+36+12x-36+4(6^2y^2-36y+9)+$

$+144y-36-26yx+12y+x-6=0$

$(x-6)^2+4(6y-3)^2+13x-78+156y-26xy=0$

$(x-6)^2+36(2y-1)^2+13(x-6)-26y(x-6)=0$

$(x-6)^2+36(2y-1)^2+13(x-6)(1-2y)=0$

$(x-6)^2+36(2y-1)-13(x-6)(2y-1)=0$

Пусть $a=2y-1$

$b=x-6$, тогда

$\begin{cases} b^2+9a^2=90 & ① \\ b^2+36a^2-13ab=0 & ② \end{cases}$

при этом

$ab=2xy-x+6-12y+6$

$\underline{ab-6\geq 0}$, а также

$x-12y=b+6-6(a+1)=$

$=\underline{b-6a\geq 0}$

$\begin{cases} b^2+9a^2=90 \\ b^2+36a^2-13ab=0 \\ ab\geq 6 \\ 6a\leq b \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подбором можно отыскать корни.

$\begin{cases} b = 9 \\ a = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} 81 + 9 = 90 \\ 81 + 36 - 13 \cdot 9 = 0 \end{matrix} \right.$ верно !)

$\begin{cases} b = -9 \\ a = -1 \end{cases}$ (не подходит под условие $ba \le b$)

Система второй степени $\Rightarrow$ имеет не более 2ух корней $\Rightarrow$ $\begin{cases} b = 9 \\ a = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6 = 9 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$

Ответ: $(15; 1)$

№3.

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \ge x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$$

$10x - x^2 > 0 \Rightarrow x(x-10) < 0$ (0; 10)

$$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \ge x^2 + 5^{\frac{\log_5 (10x - x^2)}{\log_5 3}}$$

$t = 10x - x^2$, $t > 0$

$$t^{\log_3 4} + t - t^{\log_3 5} \ge 0$$

$$t^{\log_3 4} + t^{\log_3 3} - t^{\log_3 5} \ge 0.$$

при $t > 1$. $t^{\log_3 3} < t^{\log_3 4} < t^{\log_3 5}$.

при $t < 1$ $t^{\log_3 3} > t^{\log_3 4} > t^{\log_3 5}$. неравенство точно верно.

при $t = 9$ $f(t) = t^{\log_3 4} + t - t^{\log_3 5} = 0$.

$f(t)$ - монотонна на луче $t > 1 \Rightarrow$ при $t = 9$

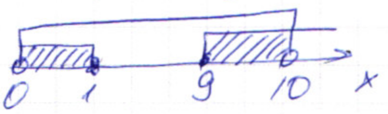
функция $f(t)$ меняет свой знак
при $1 \le t \le 9$, $f(t) \ge 0$ $(t=1,\ 1+1-1 \ge 0)$

Значит $f(t) \ge 0$ при $0 < t \le 9$

$10x - x^2 \le 9$

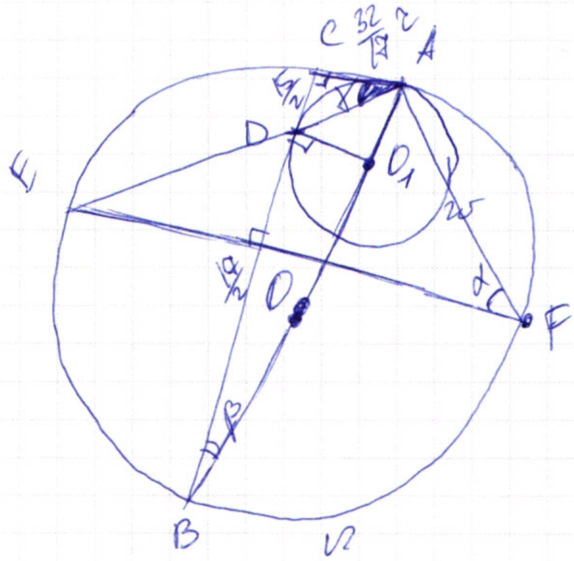
$x^2 - 10x + 9 \ge 0.$

$(x-9)(x-1) \ge 0$



Ответ: $(0;1];\ [9;10).$

№4.



Дано: окр $\Omega\ (O;\ R)$

окр $\omega\ (O_1;\ r)$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$CB \perp O_1D,\ EF \perp CB$

---

1) Найти r, R

2) Найти $\angle AFE$

3) Найти $S_{\triangle AFE}$

Решение:

1) $\triangle ABC$: $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = 90^\circ$ (AB-диаметр)

$CA \perp CB$, $O_1D \perp CB \Rightarrow \triangle DBO_1 \sim \triangle CBA$:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DO_1}{CA} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow \frac{17}{2 \cdot 16} = \frac{r}{CA} = \frac{2R-r}{2R}.$$

$$\frac{17}{32} = 1 - \frac{r}{2R} \Rightarrow \frac{15}{32} = \frac{r}{2R} \Rightarrow r = \frac{15}{16}R \ ;\ CA = \frac{32}{17}r$$

По т. Пифагора для $\triangle BCA$: $CA^2 + BC^2 = BA^2$

$$\left(\frac{32}{17}r\right)^2 + 16^2 = (2R)^2$$

$$\left(\frac{30}{17}R\right)^2 + 16^2 = 4R^2$$

$$16^2 = \left(2 - \frac{30}{17}\right)\left(2 + \frac{30}{17}\right)R^2 \Rightarrow R^2 \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{64}{17} = 16^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{16 \cdot 17}{2 \cdot 8} = 17.$$

$$r = \frac{15}{16} \cdot 17 = \frac{255}{16}.$$

2) $\angle AFE = \angle\alpha$; $\angle CBA = \angle\beta$; $\angle CAE = \angle\gamma$

$\angle\alpha = \frac{1}{2} \smile AE$

$\angle\beta = \frac{1}{2} \smile CA$; $\angle\gamma = \frac{1}{2} \smile CE \Rightarrow \angle\beta + \angle\gamma = \frac{1}{2} \smile AE$

$\angle\alpha = \angle\beta + \angle\gamma$

$$tg\angle\beta = \frac{CA}{CB} = \frac{32\ r}{17 \cdot 16} = \frac{32 \cdot 15 \cdot 17}{16 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{15}{8}$$

$$tg\angle\gamma = \frac{CD}{CA} = \frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 32r} = \frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 32 \cdot 15 \cdot 17} \cdot 16 = \frac{1}{4}.$$

$$tg\alpha = tg(\beta + \gamma) = \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta\, tg\gamma} = \frac{\frac{15}{8} + \frac{2}{8}}{1 - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{17}{8 - \frac{15}{4}} = \frac{17 \cdot 4}{32 - 15} = 4$$

$\angle\alpha = arctg\, 4 \Rightarrow \angle AFE = arctg\, 4.$

3) $$S_{AEF} = \frac{AF \cdot AE \cdot EF}{4R}$$

по т. синусов : $\frac{AF}{\sin\angle E} = \frac{EA}{\sin\angle F} = \frac{EF}{\sin\angle A} = 2R.$

$$S_{AEF} = \frac{2R \cdot \sin\angle E \cdot 2R\sin\angle F \cdot 2R\sin\angle A}{4R} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 2R^2 \sin\angle E \sin\angle F \sin\angle A$

$\angle E = \frac{1}{2}\smile AF = 90^\circ - \angle EDB = 90^\circ - \angle CDA = \angle\gamma$

$\sin\angle E = \sin\angle\gamma = \sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\gamma}} = \frac{tg\gamma}{\sqrt{tg^2\gamma+1}} =$

$= \frac{4}{4\sqrt{1+16}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\angle F = \sin\angle\alpha = \sqrt{\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}} = \frac{4}{\sqrt{1+16}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\angle A = \sin(180^\circ - \angle E - \angle F) = \sin(\angle\gamma + \angle\alpha) =$

$= \frac{tg(\gamma+\alpha)}{\sqrt{tg^2(\gamma+\alpha)+1}} = \sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(\angle\gamma+\angle\alpha) = \frac{1}{17} + \frac{16}{17} = 1.$

$S_{AEF} = 2\cdot 17^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot 1 = 8\cdot 17 = 136.$

Ответ: $R=17$; $r = \frac{255}{16}$; $arctg\, 4$; 136.

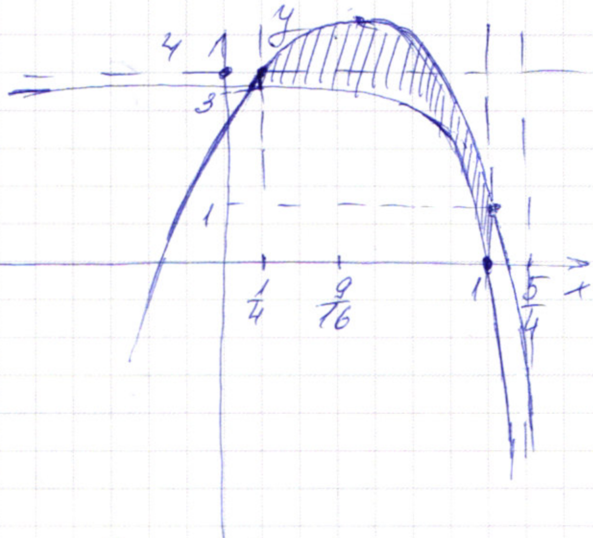
№6. $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$g(x) = -32x^2+36x-3 \qquad x_{max} = \frac{-36}{-2\cdot 32} = \frac{9}{16}$

$g\left(\frac{9}{16}\right) = -32\cdot\frac{81}{16^2} + 36\cdot\frac{9}{16} - 3 = -\frac{81\cdot 2}{16} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 = \frac{57}{8}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)



$f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = -2+9-3 = 6-2 = 4$

$g(1) = -32+36-3 = 4-3 = 1$

график функции $h(x) = ax+b$ является прямой, которая должна пересечь заштрихованную область, а чтобы оно выполнялось для всех $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ (неравенство.

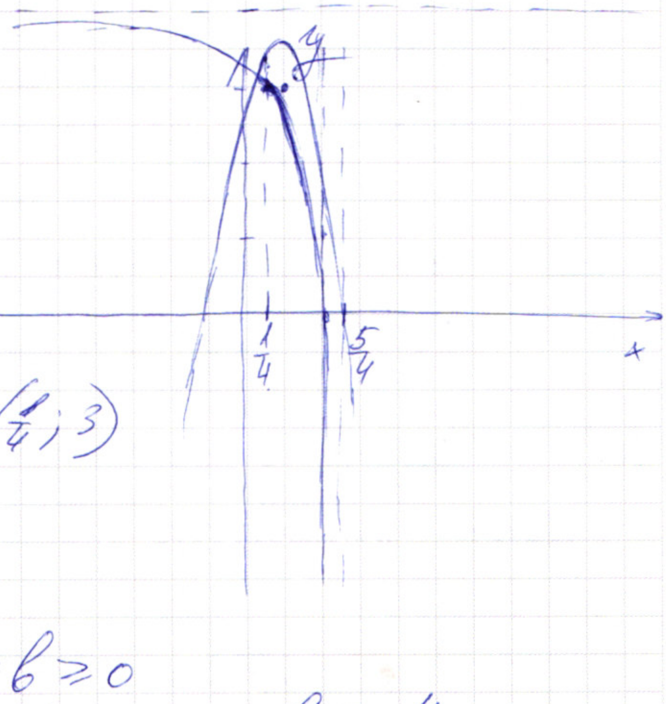
она должен пересекать

у обычного графика

гиперболы $\frac{1}{x}$ наиб. выпуклость в точке $(1;1)$

соответственно

у $f(x)$ она будет в точке $\left(\frac{1}{4}; 3\right)$



соответственно

условия для $h(x)$:

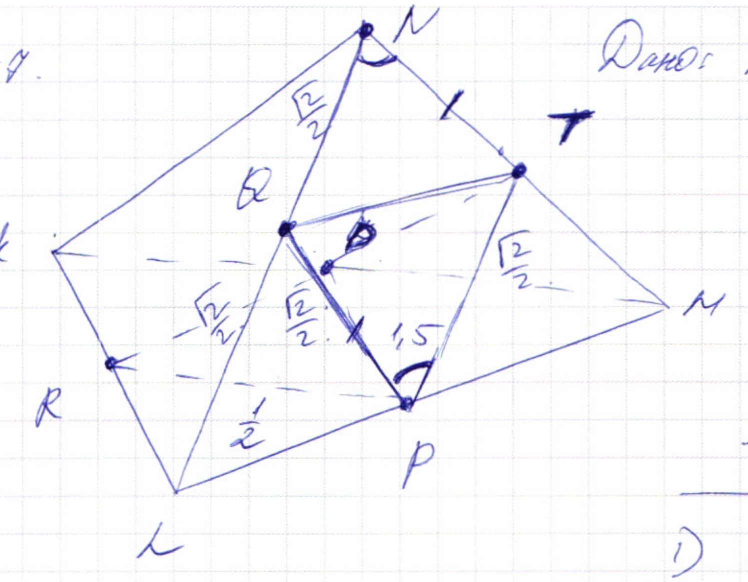
$$\begin{cases} h(1) \geq 0 \\ h(1) \leq 1 \\ h(\frac{1}{4}) \geq 3 \\ h(\frac{1}{4}) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a+b \leq 1 \\ a \cdot \frac{1}{4} + b \geq 3 \\ a \cdot \frac{1}{4} + b \leq 4 \end{cases}$$

$a = -4.$

$b = 5.$

Ответ: $-4; 5.$

№7.



Дано: KLMN – пирамида

$KL = 3$

$KM = 1$

$MN = \sqrt{2}$

Q, T, P, R, D – середины ребер

---

1) LM – ?

2) r – ?

Решение:

1) $RP = \frac{KM}{2} = \frac{1}{2}$ (ср. линия в $\triangle KLM$)

$DP = \frac{KL}{2} = 1,5$ (аналогично)

$QP = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (аналогично)

$NTPQ$ – четырехугольник (вписанный)

$\angle TNQ = \angle QPT \Rightarrow$ четырехугольник квадрат (т.к. вписанные будет только при этом)

$\angle LNM = 90° \Rightarrow LM = 2$

2) Радиус описанной сферы будет минимален, если Ответ: 2.

№ 5.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \quad f(x) = \left[\frac{x}{4}\right] = -1$

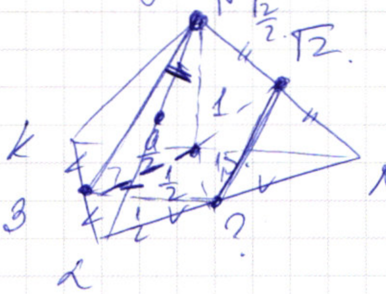
(при $x = 3$, рассматриваем именно простые числа)

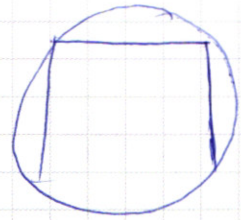
$f\left(\frac{1}{y}\right) < 1$.

$g\left(\frac{9}{16}\right) = -32\cdot\frac{81}{16^2} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 = -\frac{2\cdot 81}{16} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 =$

$= \frac{2\cdot 9\left(-9+18\right)}{16} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} =$

$= \frac{57}{8}$

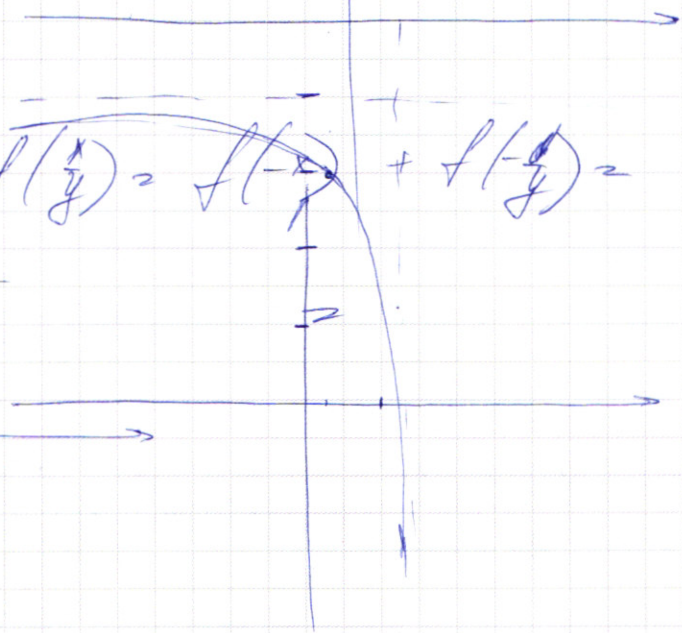




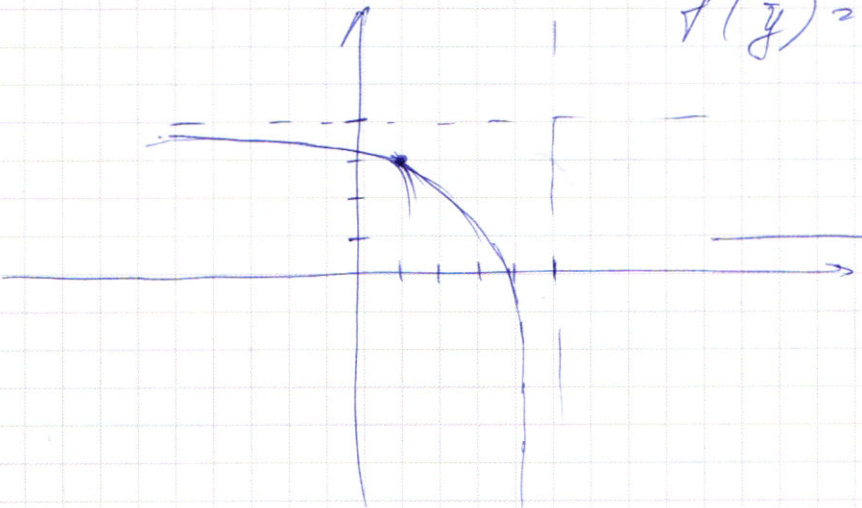
$a\cdot\frac{1}{4} + b = 4$

$a + 4b = 16$

$a = 0 \quad b = \frac{57}{8}$



$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(-x) + f\left(-\frac{1}{y}\right) =$



$h(1) \geq 0$ $\quad$ $a + b \geq 0$

$h(1) <$ $\quad$ $-a - b \geq -1$

$0 \geq -1$

$\frac{3}{4}a \leq -3$

$a \leq -4$

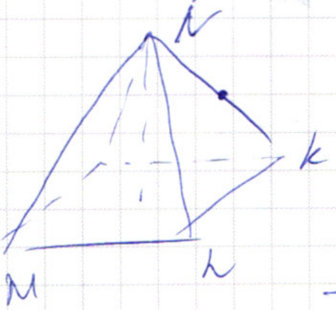
$\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \leq \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}a + b \leq 4$

$\frac{3}{4}b \leq 4 - \frac{1}{4}$

$3b \leq 16 - 1$

$b \leq 5$



$\frac{3}{4}a \leq -3$

$a \leq -4$

$\frac{3}{4}a \geq -3$

$a \geq -4$

$\cancel{\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \leq \frac{1}{4}}$

$\cancel{\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \leq 1}$

3 . 2 . 1 . 0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = [\frac{p}{4}]$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

x - простое (3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23)

$[\frac{x}{4}] = 0$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$

$f(x) = \frac{16(x-1)}{4x-5} \qquad f'(x) = 16 \cdot \frac{4x-5-4(x-1)}{(4x-5)^2} < 0$

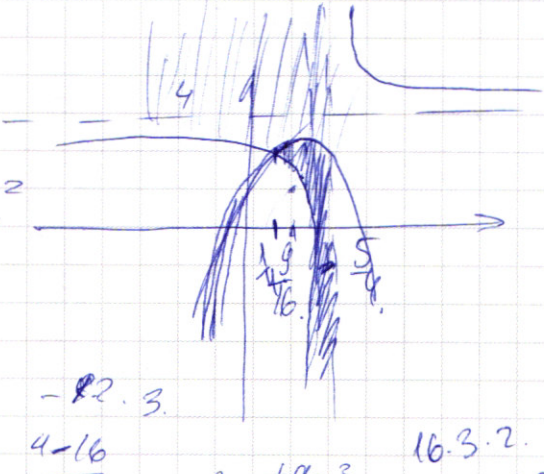
$\frac{4x-4}{x-\frac{5}{4}}$

$16x - 16 \;|\; 4x-5$

$16x - 20 \;|\; 4$

4

$4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$



$g(x) = -32x^2 + 36x - 3 =$

$-12 \cdot 3$

$\frac{4-16}{-4}$

$-2 \quad +9 \cdot 3$

4

$16 \cdot 3 \cdot 2$

$8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$= \quad x_0 = \frac{-36}{-2 \cdot 32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$f(\frac{9}{16}) = 4 + \frac{1}{\frac{9}{16} - \frac{20}{16}} = -2 \cdot 9^2 + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3 = 9^2(-2 + \frac{4}{4}) - 3 =$

$= 4 - \frac{16}{11} = \frac{28}{11}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$$

$$|x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 - 10x + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$$

$10x - x^2 > 0$

$x(x-10) < 0$ 0 10 x

$$(10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 - 10x + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$$

$$(10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 - 10x + 5^{\frac{\log_5 (10x - x^2)}{\log_5 3}}$$

$$(10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq x^2 - 10x.$$

$t = 10x - x^2$, $t > 0$

$$t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} + t \geq 0.$$

$$t\left(t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} + 1\right) \geq 0.$$

$$t^{\log_3 4} + t^{\log_3 3} \geq \cancel{t}^{\log_3 5}.$$

$$f'(t) = \log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}} - \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}} + 1 = 0.$$

$$t^{\log_3 4} - \cancel{t}^{\log_3 5} + t^{\frac{\log_3 (5+4)}{2}} \geq 0$$

$$t^{\log_3 5} + t \geq t^{\log_3 5}.\quad t^{\log_3 3} \geq t^{\log_3 4} \geq \cancel{\log} t^{\log_3 5}.$$

$t > 0.$ $t > 0.$

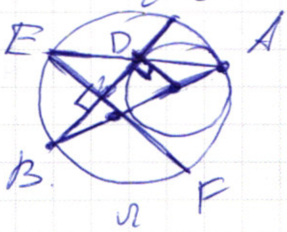
$\log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}} + 1$ $t\, t'$

$16 + 9 - 25 \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

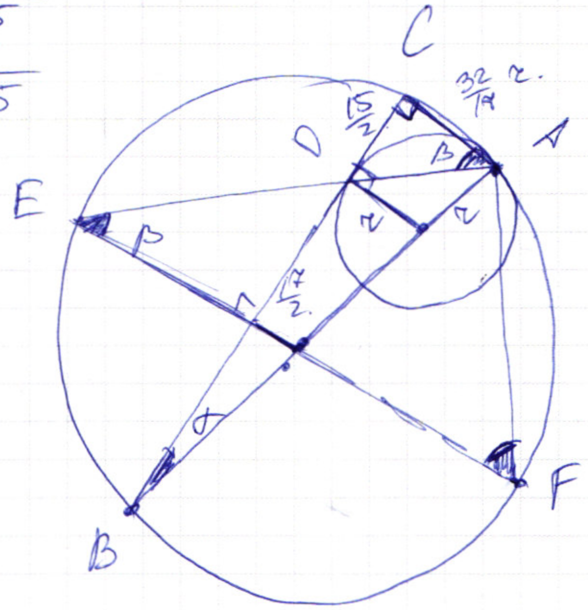
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$BD = \frac{17}{2}$ $\quad CD = \frac{15}{2}$



$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ 150 \\ \hline 255 \end{array}$$

$150 + 105 =$



$\frac{17}{2 \cdot 16}$

$\cancel{\frac{17}{32}}$ $\cancel{\frac{15}{2} + \frac{17}{2}}$ $\cancel{= \frac{32}{2} = 16}$

$$\begin{cases} (2R)^2 = 16^2 + \left(\frac{32}{17} r\right)^2 \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2 = (2R - r)^2 \end{cases}$$

$\cancel{2R}$ $\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{32}$

$\frac{r}{2R} = \frac{15}{32}$

$\frac{r}{R} = \frac{15}{16}$

$r = R\frac{15}{16}$

$(2R)^2 = 16^2 + \left(\frac{32}{17} \cdot R \cdot \frac{15}{16}\right)^2$

$4R^2 = 16^2 + \left(\frac{30}{17}\right)^2 R^2$

$R^2\left(4 - \frac{30}{17}\right)\left(4 + \frac{30}{17}\right) = 16^2$

R^2

$\sin\alpha =$

$\cancel{\sin}$ $\cancel{tg\alpha}$

$\angle AFE = \angle CAE + \angle CBA = \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$= \beta + \gamma$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + ctg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}$

$tg\beta = \frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 32} \cdot \frac{16}{15 \cdot 17} \cancel{\frac{15 \cdot 17}{16}} = \frac{1}{4}$

$tg\gamma = \frac{\cancel{32}}{\cancel{17}} \cdot \frac{15 \cdot \cancel{17}}{\cancel{16}} \cdot \frac{1}{\cancel{16}} = \frac{15}{8}$

$S_{AEF} = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\sin\gamma}{4R} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90.$

$x-6 + 4(6y-3)^2 - 26y(x-6) + x^2 - 36 = 0.$

$$\begin{cases} (x-6)(1-26y+x+6) + 4 (\\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90. \end{cases}$$

$(x-6)(1-26y+x+6) + 4(6y-3)^2 = 0.$

$(x-6)(7-26y+x) + 4(90-(x-6)^2) = 0.$

$(x-6)(7-26y+x-4(x-6)) = -360$

$(x-6)(31-26y-3x) = -360.$

$31-26y-3x = \dfrac{-360}{x-6}.$

$-26y = 3x-31 - \dfrac{360}{x-6}$

$y = \dfrac{(3x-31)(x-6)-360}{-26(x-6)}$

$x^2 - 12x + 36 - 36 + 36y^2 - 36y + 9 - 9 = 45.$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6.$

$x^2 - 24xy + 12^2y^2 + 12y + x - 6 - 2xy = 0.$

$x^2 - 12x + 36 + 12x - 36 + 4(6^2y^2 - 36y + 9) - 36 +$

$+ 144y - 26yx + 12y + x - 6 = 0.$

$(x-6)^2 + 13x - 78 + 4(6y-3)^2 + 156y - 26xy = 0.$

$(x-6)^2 + 4(6y-3)^2 - 13x(2y-1) + 78(2y-1) = 0.$

$13(x-6) - 26y(x-6) = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} (x-6)^2 + \cancel{4(6} \; 4\cdot 9(2y-1)^2 - 13x(2y-1) + 78(2y-1) = 0 \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$a = x-6$

$b = 2y-1$

$ab = 2xy - x + 6 - 12y + 6$

$ab - 6 \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 + 36b^2 + b\cdot 13\cdot -a = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$ab \geq 6$

$$\begin{cases} a^2 + 36b^2 - 13ab = 0 \\ 4a^2 + 49b^2 - 490 = 0 \end{cases}$$

$a^2 (a+6b)^2 - 12ab - 13ab = 0$

$(a+3b)^2 - 6ab = 90$

$27b^2 - 13ab + 90 = 0$

$3a^2 - 4\cdot 90 + 13ab = 0$

$D = 13a^2 - 4\cdot 27\cdot 90 =$

$x \geq 12y$

$(a+6) \geq 6(b+1)$

$a+6 \geq 6b+6$

$a \geq 6b$

$$\begin{cases} a^2 + 9b^2 = 90 \\ a^2 + 36b^2 - 13ab = 0 \end{cases}$$

81 1 13 9

82

$ab \geq 6$

$a^2 b \geq 36b$

$a^2 \geq 36$

81 $a = 1$

$b = 9$

$13\cdot 9 = 117$

$\frac{1}{b} \geq b$

$6\cancel{a^2b}$

$81 + 36 - \cancel{6}$

$1 \geq b^2$

$ab^2 \geq 36a$

$$\begin{cases} b^2 \geq 36 \\ a \geq \frac{1}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 \geq 36 \\ a^2 \geq 1 \end{cases}$$

$b^2 + 36a^2 \geq 37$

$13ab \geq 78$

$b^2 + 9a^2 \geq$

$\cancel{90}\; b^2 = 90 - 9a^2$

$b > 0$

$90 - 9a^2 - 13a\cdot 3\sqrt{10 - a^2} = 0$ 100

$30 - 3a^2 - 13a\sqrt{10-a^2} = 0$

$10 - 3a^2 = 13a\sqrt{10-a^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\sin\alpha+\cos\alpha+2(\cos\alpha-\sin\alpha)\right)=0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)(3\cos\alpha-\sin\alpha)=0$

$\sin\alpha=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{3}$

1) $tg\alpha=-1$ $\qquad$ 2) $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$

2) $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{15}-\frac{2}{15}\cos 2\alpha=-\frac{1}{15}$

$2\sin\alpha\cos\alpha-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\sin\alpha+\cos\alpha-2(\cos\alpha-\sin\alpha)\right)=0$

$\sin\alpha=-\cos\alpha$ $\qquad$ $3\sin\alpha=\cos\alpha$

3) $tg\alpha=-1$ $\qquad$ $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x+12y-2xy\le 6 \\ x-12y\ge 0 \end{cases}$!!!

$4\cdot(6y-3)^2=$
$=4\cdot(36y^2-36y+9)$

$(x-12y)^2\cancel{+}\,x+12y-2xy-6=0$

$x^2-24xy+144y^2+x+12y-2xy-6=0$

$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+x+12y-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$\begin{cases} (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ (x-12y)^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$

$x-6+4(6y-3)^2+\cancel{\ldots}+\cancel{\ldots}y-36+x^2-26xy=0$ (156y)

$(x-6)+4(6y-3)^2+26(6y-xy)-36+x^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$tg\,\alpha - ?$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

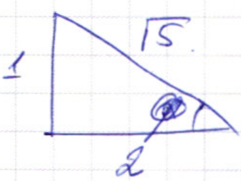
$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{cases} \cos 2\beta = -\frac{1\cdot\sqrt{5}}{5\cdot -1} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \\ \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \left(\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$



$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$2\alpha + 2\beta = \arcsin -\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$

$\pi - \arcsin -\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$.

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

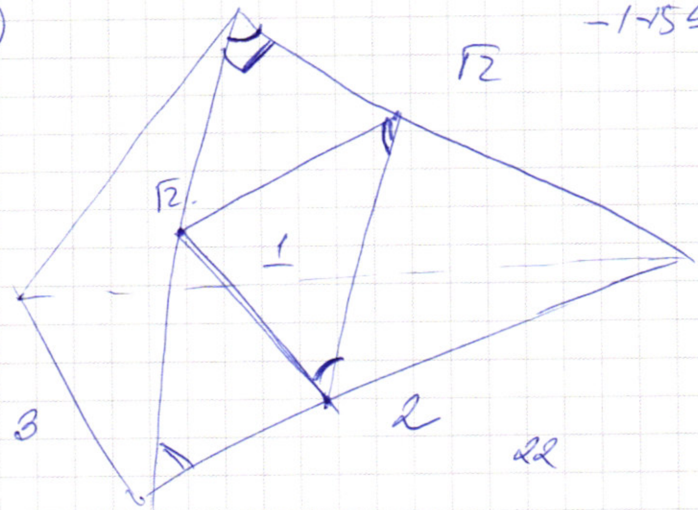
$-4+5$

$-1+5 \geq 3$

$-1+5 \leq 4.$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\sqrt{2}$



$\left[\frac{R}{4}\right] = -1.$

$f(3) < 0.$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$f(3) + f($

$x = 3;\ 5;\ \cancel{4}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) + f,$

$\frac{1}{y}$ 4.

$f\left(\frac{1}{y}\right) \leq 1.$

$f\left(\frac{5}{y}\right) > f\left(\frac{1}{y}\right) > f\left(\frac{3}{y}\right)$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y}$ $1 + f\left(\frac{1}{y}\right) > f\left(\frac{1}{y}\right).$

$\frac{1}{3} = f$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = \cancel{f(10)} + f(3) + f\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{3y}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1 + f\left(\frac{1}{6}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9
(Нумеровать только чистовики)