МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$; ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$\Downarrow$ $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$\cancel{10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq (3^{\log_3 5})^{\log_3(10x-x^2)} = (3^{\log_3(10x-x^2)})^{\log_3}}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\exists t = \log_3(10x - x^2) \Rightarrow 3^t = 10x - x^2$; $t \in (-\infty; +\infty)$

$3^t + (3^t)^{\log_3 4} \geq 5^t \Rightarrow 3^t + 4^t \geq 5^t \underset{\substack{\text{т.к.}\\ \forall t: 3^t > 0}}{\Rightarrow} 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t \geq \left(\frac{5}{3}\right)^t$;

$\left(\frac{4}{3}\right)^t$ и $\left(\frac{5}{3}\right)^t$ – показательные функции $\Rightarrow$ т.к. $\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$: При $t > 0$: $\left(\frac{5}{3}\right)^t > \left(\frac{4}{3}\right)^t$

При $t = 0$: $\left(\frac{5}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^t$

При $t < 0$: $\left(\frac{5}{3}\right)^t < \left(\frac{4}{3}\right)^t$

Нер-во: $1 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^t - \left(\frac{4}{3}\right)^t \Rightarrow$ при $t \leq 0$ всегда

Возьмём производную от правой части:

$\left(\left(\frac{5}{3}\right)^t - \left(\frac{4}{3}\right)^t\right)' = \ln\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^t - \ln\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t$

При $t \geq 0$: $\left.\begin{matrix} \left(\frac{5}{3}\right)^t \geq \left(\frac{4}{3}\right)^t > 0 \\ \ln\frac{5}{3} > \ln\frac{4}{3} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^t - \ln\left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\left(\frac{5}{3}\right)^t - \left(\frac{4}{3}\right)^t\right) \uparrow$ при $t \uparrow$ при $t \geq 0$

$\left.\begin{matrix} \text{В } t = 0: \left(\frac{5}{3}\right)^t - \left(\frac{4}{3}\right)^t = 0 \leq 1 \\ \text{В } t = 2: \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25-16}{9} = 1 \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ при $0 \leq t \leq 2$: нер-во соблюдается

При $t > 2$: $\left(\frac{5}{3}\right)^t - \left(\frac{4}{3}\right)^t > 1$

Тогда итого: $\underline{t \leq 2} \Rightarrow \log_3(10x - x^2) \leq 2 \Rightarrow 10x - x^2 \leq 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix} x \geq \frac{10 + \sqrt{100-36}}{2} \\ x \leq \frac{10 - \sqrt{64}}{2} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} x \geq 9 \\ x \leq 1 \end{matrix}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$

№5

$\forall\, a, k \in \mathbb{Q}_+$: $f(ak) = f(k) + f(a)$

рациональные положительные

~~$f\left(\frac{a}{k}\right) = f\left(\frac{a}{k}\right)$~~

$f(a) = f\left((ka)\cdot\frac{1}{k}\right) = f(ak) + f\left(\frac{1}{k}\right)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(ak) = f(k) + f(ak) + f\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(k) = f\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \\ f(k)\cdot f\left(\frac{1}{k}\right) < 0 \end{array}\right.$

Значит для любых двух различных натуральных чисел x и y, создающих две пары чисел $(x;y)$ и $(y;x)$, ~~одна из этих~~ есть 2 случая:

или $f(x/y) = f(y/x) = 0$

или они дают одну пару с $f<0$ и одну с $f>0$

$\forall\, a \in \mathbb{Q}_+$: $f(a) = f(a\cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\forall\, x, y \in \mathbb{N}$: $f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow$ Если $f(x/y) = 0$, то $f(x) = f(y)$

Запишем f от простых чисел:

$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$

$f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$

Тогда: $f(4) = f(2)+f(2) = 0$ $f(12) = f(4)+f(3) = 0$

$f(6) = f(2)+f(3) = 0$ $f(14) = f(2)+f(7) = 1$

$f(8) = f(4)+f(2) = 0$ $f(15) = f(3)+f(5) = 1$

$f(9) = 2\cdot f(3) = 0$ $f(16) = f(4)+f(4) = 0$

$f(10) = f(2)+f(5) = 1$ $f(18) = f(2)+f(9) = 0$

$f(20) = f(4)+f(5) = 1$ $f(24) = f(4)+f(6) = 0$

$f(21) = f(3)\cdot f(7) = 1$ $f(25) = f(5)+f(5) = 2$

$f(22) = f(2)+f(11) = 2$

Итого среди чисел от 2 до 25: 10 дают $f=0$; 7 дают $f=1$;

3 дают $f=2$; по 1 даёт 3

2 дают 4; 1 даёт 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём, сколько можно составить упорядоченных пар, в которых $f(x)\neq f(y) \Rightarrow f(x/y)\neq f(y/x)\neq 0$

Если первым взяли число с $f=0$: $10\cdot(24-10)=140$

— || — $f=1$: $7\cdot(24-7)=119$

— || — $f=2$: $3\cdot(24-3)=63$

— || — $f=3$: $1\cdot(24-1)=23$

— || — $f=4$: $2\cdot(24-2)=44$

— || — $f=5$: $1\cdot(24-1)=23$

Как было сказано ранее, если $f(x)\neq f(y) \Rightarrow f(x/y)\neq f(y/x)$, то только ~~одна~~ одна из пар $(x;y)$ и $(y;x)$ будет иметь $f<0$

Значит общую сумму пар надо поделить пополам:

$\frac{1}{2}(140+119+63+23+44+23)=\frac{1}{2}(203+119+46+44)=\frac{1}{2}(322+90)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 412=206$

Ответ: 206

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $2xy-12y-x+6$ ~~$x-12y\geqslant 0$~~

$\sqrt{\ldots}\geqslant 0 \Rightarrow x-12y\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant 12y$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha\left(\cos(2\beta+2\beta)+1\right) + \sin(2\beta+2\beta)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\left(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1\right) + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot 2\cdot\cos^2 2\beta + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha\right) = 2\cdot\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5};$$

При $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$: $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\alpha + 2\cdot\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $t = \sin^2\alpha$, $1 \geq t \geq 0$

При $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$: $2\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -1 + 2\sin^2\alpha - 2(1-\sin^2\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -3 + 4\sin^2\alpha \overset{*}{\Rightarrow} 4\cdot\sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha) = 9 + 16\sin^4\alpha - 24\sin^2\alpha$

$4t - 4t^2 = 16t^2 - 24t + 9 \Rightarrow 20t^2 - 28t + 9 = 0$; $D = 28^2 - 20\cdot 4\cdot 9 = 784 - 720 = 64$

$t = \frac{28\pm\sqrt{64}}{40} = \frac{28\pm 8}{40} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt2} \\ t = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

* И, т.к. ур-е возводилось в квадрат, надо проверить знаки сторон до возведения. При $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt2}$: $-3 + 4\cdot\frac{1}{2} = -1 < 0$; чтобы $2\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} < 0$: $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt2}$

При $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{10}}$: $-3 + 4\sin^2\alpha = 4\cdot\frac{9}{10} - 3 = \frac{6}{10} > 0$; чтобы $2\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} > 0$: $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{10}}$

Значит $\begin{cases} tg\,\alpha = \frac{-1/\sqrt2}{1/\sqrt2} = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{\sqrt{9/10}}{\sqrt{1/10}} = 3 \end{cases}$

При $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$: $-2\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -3+4\sin^2\alpha \overset{*}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (-2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha})^2 = (-3+4\sin^2\alpha)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = \pm 1/\sqrt{2}\ ;\ \cos\alpha = -1/\sqrt{2} \\ \sin\alpha = \pm 3/\sqrt{10}\ ;\ \cos\alpha = -1/\sqrt{10}\end{array}\right.$

* При $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: $-2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} < 0 \Rightarrow \sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1$

При $\sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$: $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-3/\sqrt{10}}{-1/\sqrt{10}} = 3$

При $\sin 2\beta = -2/\sqrt{5}$:

$\sin 2\alpha\cdot 1/\sqrt{5} - \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -1/\sqrt{5} \Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2(1-2\sin^2\alpha) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2 + 4\sin^2\alpha \overset{=-1}{\Rightarrow} 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1 - 4\sin^2\alpha$

При $\cos\alpha = 0$: $0 \neq 1-4 \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$

Домножим обе части на $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$

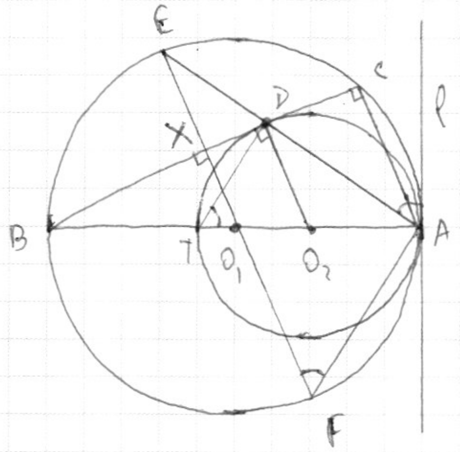
$2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha - 4\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha = 1+\operatorname{tg}^2\alpha - 4\operatorname{tg}^2\alpha = 1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 \overset{=0}{\Rightarrow} \operatorname{tg}\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2\pm 4}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\end{array}\right.$

Итого есть 3 различных значения $\operatorname{tg}\alpha$

Ответ: $\{-1\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 3\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4

O_1, O_2 – центры большой и малой окр-тей соотв.

R, r – их радиусы

$\angle ACB$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90°$

$\triangle ACB \sim \triangle BO_2D$ по общ. $\angle$ как прямоуг. $\triangle$.

$$\frac{AC}{O_2D} = \frac{AB}{BO_2} = \frac{BC}{BD}$$

При этом $AB = 2R$; $BO_2 = 2R - r$; $BC = BD + CD = 16$; $O_2D = r$

$$\frac{AC}{r} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17} \Rightarrow 17 \cdot 2R = 32 \cdot (2R - r) \Rightarrow 34R = 64R - 32r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32r = 30R \Rightarrow r = \frac{15}{16}R \quad ; \quad AC = \frac{32}{17}r$$

По т. Пифагора в $\triangle BO_2D$: $(2R-r)^2 = r^2 + BD^2 \Rightarrow 4R^2 - 4Rr = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4R^2 - 4R \cdot \frac{15}{16}R = 4 \cdot \frac{1}{16}R^2 = \frac{R^2}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow R = 17 \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 17}{16} \Rightarrow AC = 30$$

По т. Пифагора в $\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 30^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 15^2\left(4 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot 17$

$$AD = \frac{15}{2}\sqrt{17}$$

Проведём через касательную к обоим окружностям l

По теореме о угле между хордой и касательной для вписанных $\triangle$ $\triangle ADT$ и $\triangle AEF$ углы $\angle AFE$ и $\angle ATD$ равны углу между AE и l $\Rightarrow$

где $T = AB \cap \omega$ $\Rightarrow \angle AFE = \angle ATD$

$\sin \angle ATD = \frac{AD}{AT}$ (т.к. $\angle ADT = 90°$ как опирающийся на диаметр)

$$\sin \angle AFE = \frac{AD}{2r} = \frac{\frac{15}{2}\sqrt{17}}{2 \cdot \frac{15 \cdot 17}{16}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

$\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BC$
$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ EF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AC \parallel EF$$

$\exists X = EF \cap BC$; ~~в прямоуг. $\triangle BO_1X \sim \triangle ABC$ (по общ. $\angle$) $\Rightarrow \frac{BX}{BC} = \frac{BO_1}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow BX = \frac{1}{2}BC \Rightarrow X$ - сер. $BC \Rightarrow EF$ - сер. перп.~~

ОТВЕТ: Радиусы: $\frac{255}{16}$ и 17

$\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$

№ 6

$$f(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x + 3 = g(x)$$

гипербола

парабола ветвями вниз

$$\left.\begin{array}{l} g\left(\frac{1}{4}\right) = -32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 = -3 + 9 - 2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4}a + b \leq 4 \\ g(1) = -32 + 36 - 3 = 1 \Rightarrow a + b \leq 1 \end{array}\right\} \text{ на } \left[\tfrac{1}{4}; 1\right]$$

Прямая $ax+b$ должна быть ниже прямой через точки $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ и $(1; 1)$, что задано 2 нер-вами; и так как парабола выпукла вверх, все её точки на $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ выше данной прямой, а значит все её точки будут выше $ax+b \Rightarrow$ это условие даёт ровно 2 нер-ва

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$; ОДЗ: $10x - x^2 > 0$ ⇒ $10x > x^2$

$\cancel{5^{\log}} (3^{\log_3 5})^{\log_3} = (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$\begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 10 > x^2 \Rightarrow |x| < \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{10} \\ \begin{cases} x < 0 \\ |x| > \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow x < -\sqrt{10} \end{cases}$

~~При $0 < x < \sqrt{10}$:~~

$|x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 - 10x + (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$t = \cancel{x^2 - 10x}\ 10x - x^2$ $\qquad x(x-10)$

$t + |t|^{\log_3 4} \geqslant t^{\log_3 5}$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} \geqslant t^{\log_3 5 - 1} \Rightarrow 1 \geqslant t^{(\log_3 4 - 1)}\left(t^{\log_3 5 - \log_3 4} - 1\right)$

$\log_t (t + t^{\log_3 4}) \geqslant \log_3 5$

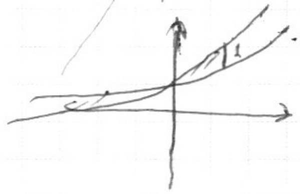
При $t \leq 1$: $\log_3 5 > 1 \Rightarrow t^{\log_3 5} < t \Rightarrow$ верно

При $t > 1$:

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geqslant 0$ $\qquad \cancel{\log_3 9 = 1}$

$1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1} - \log_3 5 \cdot t^{\log_3 5 - 1} = 1 +$

$\frac{1}{t}\left(t + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4} - \log_3 5 \cdot t^{\log_3 5}\right)$



При $t = 0$: верно

$t = 3^y$, $3^y + 4^y \geqslant 5^y$; $1 + \left(\frac{4}{3}\right)^y \geqslant \left(\frac{5}{3}\right)^y$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^y \geqslant \left(\frac{5}{3}\right)^y$; $1 + \frac{16}{9} \geqslant \frac{25}{9}$; $y = 2$; $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^y - \left(\frac{4}{3}\right)^y\right)' = \ln\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^y - \ln\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^y$

При $y \leq 2 \Rightarrow \log_3(10x - x^2) \leq 2 \Rightarrow 10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{10 + \sqrt{100 - 36}}{2} = 9 \\ x \leq \frac{10 - 8}{2} = 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$ ОДЗ: $2xy - 12y - x + 6 \geqslant 0$

$x - 12y \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 12y$

$(x-6)^2 + 36\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 45 + 36 + 9 = 90$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + 144y^2 - 26xy - x - 12y + 6 = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 108y^2 - 26xy + 11x + 24y + 51 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -1/\sqrt{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\qquad \cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = 2\cdot\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\,(1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cancel{2}\cdot\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \cancel{2} \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

При $\sin = \frac{2}{\sqrt{5}}$: $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot 2 = -1$

$2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $2\sin\alpha \cdot \sqrt{1-\sin^2\alpha} + \underbrace{\cancel{4\cos^2\alpha}}_{2 - 4\sin^2\alpha} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(6) = f(2) + f(3)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad f(ac) - f(bc) = f(a) - f(b)$

$f(a) - f(b) = f(k\cdot\frac{a}{k}) - f(k\cdot\frac{b}{k}) = f(\frac{a}{k}) - f(\frac{b}{k})$

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$ $\Big\}$ $f(6) = 0$

$f(x) - f(1) = f(k^2 x) - 1$

$f(5) = 1$ $\qquad f(kx\cdot\frac{1}{k}) - f(k\cdot$

$f(7) = 1$

$f(\frac{x}{2}) = f(\frac{1}{2}) + f(x)$

$f(11) = 2$ $\qquad \cancel{f(k) = f(\frac{1}{k})}$ $\qquad f(k) = -f(\frac{1}{k})$

$f(\frac{x}{2})$; $f(\frac{x}{2}\cdot 2) = f(2) + f(\frac{x}{2})$

$f(13) = 3$ $\qquad f(\frac{1}{4}) = 2\cdot f(\frac{1}{2})$

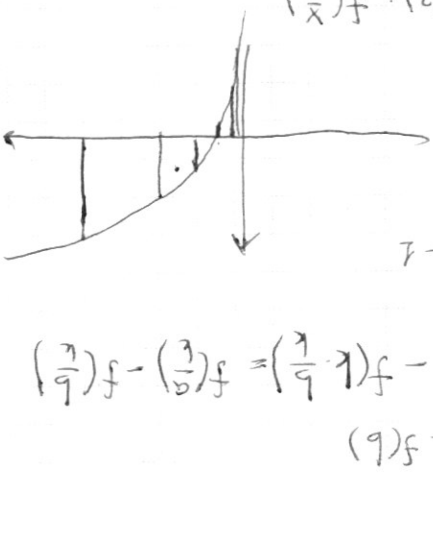
$f(17) = 4$ $\qquad f(x\cdot 1) = f(x) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(19) = 4$ $\qquad f(\frac{1}{2}$

$f(23) = 5$

28×28: 224, 56, 784

784



☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y(x-12)+x(y-1)+6$

$x-y=\sqrt{\frac{x}{6}-y-x+6}$

$x^2+\frac{y^2}{4}-12x-3y=45$

$\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BO_\omega}$

$BO_\omega=R-r$

$AB=R$

$\frac{16}{R}=\frac{\frac{17}{2}}{R-r}$

$16R-16r=\frac{17}{2}R$

$\frac{15}{2}R=16r \Rightarrow 15R=32r$

$BD^2+r^2=(R-r)^2$

$BD^2=R^2-2Rr=$

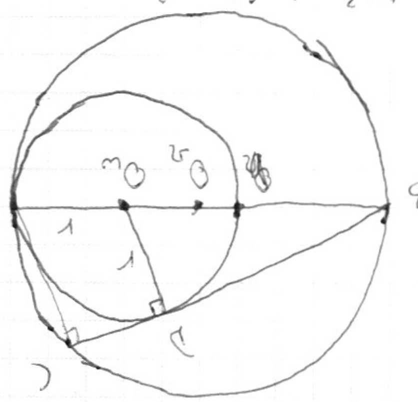
$=R^2-2R\cdot\frac{15}{32}R=$

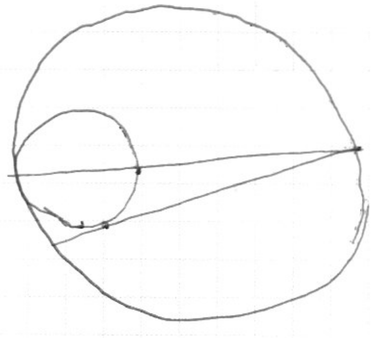
$=R^2\left(1-\frac{15}{16}\right)=\frac{R^2}{16} \Rightarrow BD=\frac{R}{4} \Rightarrow$ $\boxed{R=34,\ r=\frac{17\cdot 15}{16}}$

$\frac{16}{34}=\frac{17}{2\left(\frac{34\cdot16-17\cdot15}{16}\right)}$

$8\cdot16=\frac{17}{2\left(\frac{32-15}{16}\right)}=\frac{17}{\frac{17}{8}}$

16^2-1

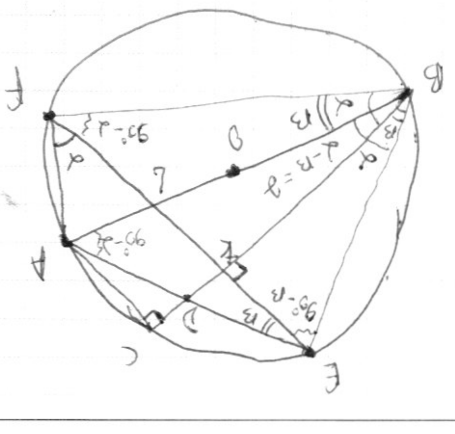


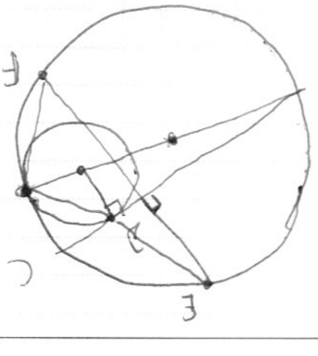


$\frac{BD}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{AD}{\sin\alpha}$

$AC \parallel EF$

$AF=EC$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

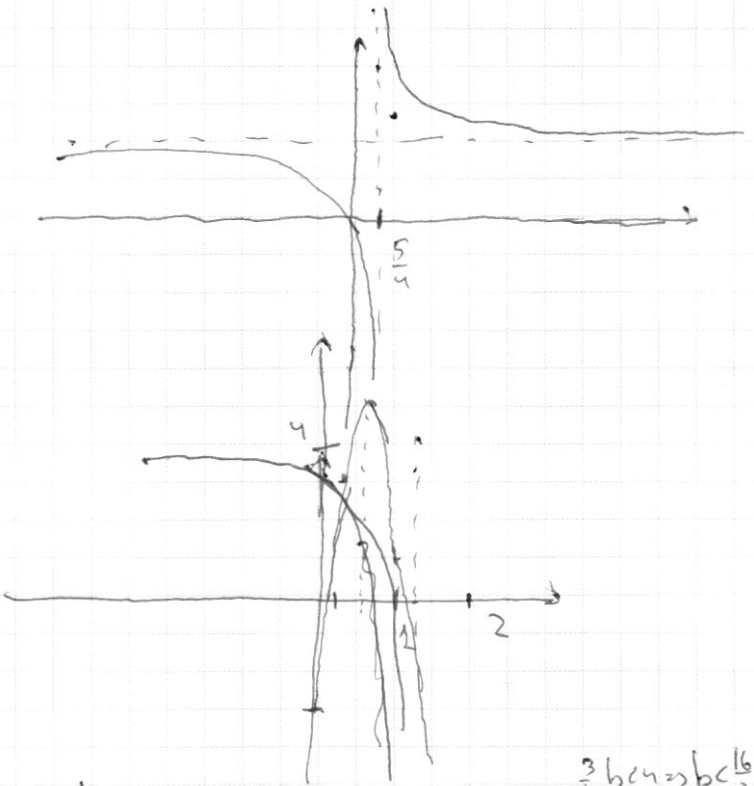
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$16 \cdot \frac{1-x}{5-4x}$

$4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$



$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$

$-32x^2+36x-3$

$\frac{-36 \pm \sqrt{912}}{-64} =$

$= \frac{9 \pm \sqrt{48}\cdot\sqrt{19}}{16} =$

$= \frac{9 \pm \sqrt{57}}{16}$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 12 \\ \hline 64 \\ 32 \\ \hline 384 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1296 \\ -384 \\ \hline 912 \end{array}$

$912 : 12 = 76$, -84, 72

$76 : 4 = 19$

$-\frac{81}{16^2}\cdot 32 + 36\cdot\frac{9}{16} - 3 =$

$= -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 =$

$= \frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}$

$\frac{3}{4}b < 4 \Rightarrow b < \frac{16}{3}$

$\left.\begin{array}{l} 3 < \frac{1}{4}a + b < 4 \\ 0 < a+b < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b > -a \Rightarrow -\frac{3}{4}a < 4$

$a > -\frac{16}{3}$

$-32\cdot\frac{1}{16} + 36\cdot\frac{1}{4} - 3 = -2+9-3 = 4$

$\left(4 + \frac{4}{4x-5}\right)' = -\frac{4\cdot 4}{(4x-5)^2} < 0$

$-\frac{16}{(4x-5)^2}$

$a < 1-b \Rightarrow 3 < \frac{1}{4} + \frac{3}{4}b \Rightarrow \frac{11}{4} < \frac{3}{4}b \Rightarrow b > \frac{11}{3}$

$b < 1-a \Rightarrow 3 < 1 - \frac{3}{4}a \Rightarrow \frac{3}{4}a < -2 \Rightarrow a < -\frac{8}{3}$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax-b \Rightarrow 16-16x \le 5ax-5b-4ax^2+4bx \Rightarrow 4ax^2-(16+4b+5a)x+16+5b \le 0$

$D = 256 + 16b^2 + 25a^2 + 128b + 40ab + 160a - 16a(16+5b) =$ $\frac{16+4b+5a-\sqrt{D}}{8a} \le x \le \frac{16+4b+5a+\sqrt{D}}{8a}$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)