МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2=a \quad y-1=b$

Решено!

№2

$a^2+9b^2=25$

$a^2+4b^2-5ab=0$

$a^2-5ab+4b^2=0 \quad /b^2 \quad a=4b \quad a=b$

$(a/b)^2-5(a/b)+4=0$

$25b^2=25 \quad b^2=\frac{5}{2}$

$a/b=$

$b^2=1 \quad b=\pm1$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13} \quad t \geq 0$

$5^{\log_{12}t}+t > t^{\log_{12}13} \quad \log_{12}t=y \quad t=12^y$

$5^y+12^y > 12^{y\log_{12}13} \quad /12^y$

$\cancel{5^y > 12^y(12^{\log_{12}13}-1)}$

$5^y > 12^y(12^{y\log_{12}13-y}-1)$

$12^{y\log_{12}13}-12^y-5^y<0$

$y((12^{\log_{12}13})^{y-1}-12^{y-1}-5^{y-1})<0$

$0 \quad 1$

$f(x)=5^y+12^y$

$f'(x)=y(5^{y-1}+12^{y-1})$

>0

$f'(x)=0 \quad y=0$

$f''(x)=y(y-1)(5^{y-2}+12^{y-2})$

$=5^{y-1}+12^{y-1}+y(y-1)(5^{y-2}+12^{y-2})$

$f'(x)=5^y\ln5+12^y\ln12$

$18 \cdot 18 = 324$

$345 \quad 5=17/33$

№ 6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$\cancel{-16x^2}$ $-4x^2-16x-16$

$\cancel{8x^2}$ $-4x^2-4x-1$

$-(2x-4)^2-(2x-1)^2-10x$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le -(8x^2+30x+17)$$

$-8x^2-30x-17=0 \quad /:-1$

$D = 900-4\cdot 8\cdot 17 =$

$= 356$

$17 \times 32 = 34$, 51, 544, 356

$-16x^2-40x-25$

$\cancel{8x^2+16x+8}$

$4x^2+16x+16$

$4x^2+4x+1$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$f(p)=f(p)+f(1)$

$f(1)=0$

$f(x:y)<0$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(p)=\cancel{f(p-1)}$ 1 3

$\cancel{f(p)=f(\frac{p-1}{2})+f(2)}$

$P(11)=2$

1 3

$\cancel{P\%=\{1,3\}}$

p +1 0 2

$p\%4 = 1 \; 3$

$p/4 = \frac{p}{4} + \frac{\{1,3\}}{4}$

$p(13)=$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

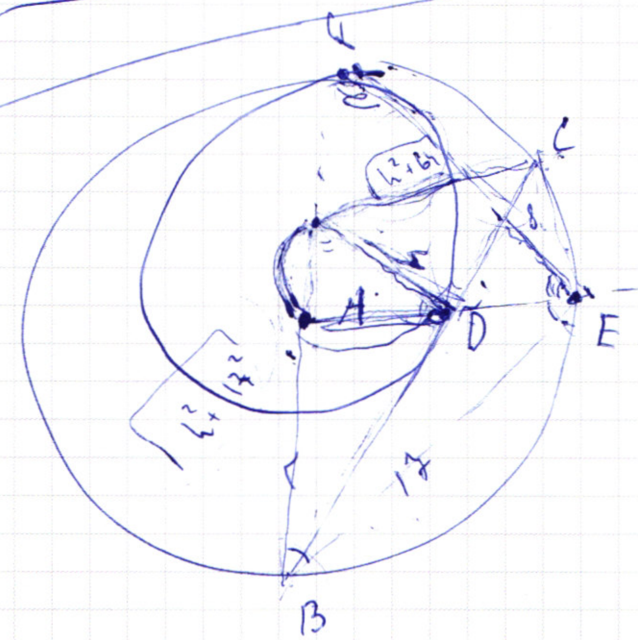
$\cancel{1+\left(\frac{12}{5}\right)^y > 12^{\log_{12}13}}$

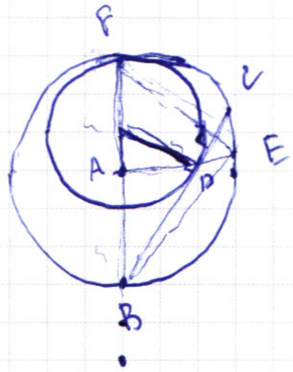
№3 Решено

$5^y+12^y>13^y$

$\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y>1$

$y<2$





$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(2^n)=0$

$f(x:y)=f(x)+f(y^{-1})$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f\left(\frac{1}{2^k}\right)$

$\underset{0}{f(1)}=\underset{0}{f(2)}+\underset{0}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=6$

$f(4)=0$

$f(6)=0$

$f(8)$

$f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)=0 \qquad f(n^{-1})=-f(n)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,2\alpha + tg\,2\beta = 0$

$$\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 2\beta} = 0$$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = 0$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta + \cos 2\beta) + \cancel{\cos 2\alpha}\cos 2\beta(2\cos 2\beta + 1)$

$2\sin 2\alpha \cos 2\beta (2\cos 2\beta + 1) = -\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\sin 2\alpha \cos 2\beta (2\cos 2\beta - 1) = \left(\frac{1}{\sqrt5} - \frac{4}{5}\right)$

$$\frac{t+1}{t-1} = -\frac{\frac45 + \frac{1}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5} - \frac45} = \frac{\frac45 + \frac{1}{\sqrt5}}{\frac45 - \frac{1}{\sqrt5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt5} + 1}{\frac{4}{\sqrt5} - 1} \Rightarrow t = \frac{4}{\sqrt5}$$

$2\cos 2\beta = 4/\sqrt5 \quad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin 2\alpha = \frac{\left(1/\sqrt5 - \frac45\right)}{2\cos 2\beta(2\cos 2\beta - 1)} = \frac{\left(1/\sqrt5 - 4/5\right)}{\frac{4}{\sqrt5}\left(4/\sqrt5 - 1\right)} = -\frac{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt5} - \frac45\right)}}{4\cancel{\left(1/\sqrt5 - 4/5\right)}} =$$

$= -\frac14$

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

$tg\,2\alpha = -\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ $\qquad tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$-\frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}tg^2\alpha - 2tg\,\alpha = 0 \qquad tg^2\alpha - 2\sqrt{15}\,tg\,\alpha - 1 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(x) - f(y) < 0$

$\cancel{x} = (1;5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D = 60+4 = 64 = 8^2$

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{15} \pm 8}{2} = \sqrt{15} \pm 4$

№ 1

cos $\pm$

Решено!

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$x - 2y \geq 0$

$(x-2)(1-y)$

$(x-2)(y-1)$

$ab \geq 0$

$x^2 - 4x + 4 \cancel{-4} + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + x + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$x^2 - 2xy + x + 4y^2 - 4xy + 2y + xy - 2 = 0$

$x^2 - x(2y+1) + 4y^2 - 2y(2x+1)$

$x^2 - 4x + 4 + 5x + 4y^2 - 8y + 4 + 10y - 10 - 5xy = 0$

$(x-2)^2 + 4(y-1)^2 + 5(x + 2y - 2 - xy) = 0$

$(x-2)^2 + 4(y-1)^2 - 5(x-2)(y-1) = 0$

$\frac{a^2 + 4b^2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -1/\sqrt5$

$v_1 = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -1/\sqrt5$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -4/5$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4/5$

$v_2 = \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -4/5$

$\cancel{\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta + \cos 2\beta) + (2\cos^2 2\beta + \cos 2\beta)\cos 2\alpha \sin 2\beta}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta\ (2\cos 2\beta + 1) + (2\cos 2\beta + 1)\cos 2\alpha \sin 2\beta = -\left(\frac{1}{\sqrt5}+\frac{4}{5}\right)$

$(2\cos 2\beta + 1)(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\left(\frac{1}{\sqrt5}+\frac{4}{5}\right)$

$(2\cos 2\beta + 1) \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\left(1/\sqrt5 + \frac{4}{5}\right) = (v_2 + v_1)$

$(2\cos 2\beta - 1) \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{\sqrt5} - 4/5 = (v_2 - v_1)$

Пусть $t = 2\cos 2\beta$, тогда

$\frac{t+1}{t-1} = -\frac{\frac{1}{\sqrt5}+\frac{4}{5}}{1/\sqrt5 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{\sqrt5}+4/5}{\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt5}} = \frac{4/\sqrt5+1}{4/\sqrt5-1} \Rightarrow t = 4/\sqrt5$

$2\cos 2\beta = 4/\sqrt5 \quad \cos 2\beta = 2/\sqrt5 \quad \sin 2\beta = \pm 1/\sqrt5$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot (\sqrt5/\cos 2\alpha)$

$2\operatorname{tg} 2\alpha + 1 = -1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$ либо $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$

$D = 4 + 4 = (\sqrt8)^2 \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \pm 2\sqrt2}{2} = 1 \pm \sqrt2$

Ответ: $0,\ 1 \pm \sqrt2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2, \quad x-2y\geq 0, \quad xy-x-2y+2\geq 0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2+4(y-1)^2-5(x-2)(y-1)=0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $a=x-2$, $b=y-1$, $a-2b\geq 0$, $ab\geq 0$.

$$\begin{cases} a^2+4b^2-5ab=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$a=4b \qquad a=b$

$b^2=1 \qquad b^2=\frac{25}{10}$

$b=\pm 1 \qquad b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

С учётом условия:

$b=1 \qquad b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=4 \qquad a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $(6; 2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Пусть $t=x^2+18x$, $t>0$;

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

Пусть $\log_{12}t=y$, тогда $t=12^y$

$5^y+12^y \geq \left(12^{\log_{12}13}\right)^y$

$5^y+12^y \geq 13^y \quad |:13^y$

$\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$ $\quad \left(\frac{5}{13}\right)^y$ – ~~возрастающая~~ убыв. функция

$\left(\frac{12}{13}\right)^y$ – ~~возрастающая~~ убыв. функция

Следовательно, $\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y$ – монотонно ~~возрастающая~~ убывающ. функция.

При ~~$y \geq 2$~~ $y \leq 2$ функция $\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$!

$\log_{12}t \leq 2$

$t \leq 144$

$x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$+ \quad - \quad +$

$-24 \quad 6 \quad x$

Ответ: $x \in [-24; 6]$

№ 5

$f(p) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(n) + f(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$

Найти:

При каких $(x;y)$, $x, y \in N$, $1 \le x \le 24$, $1 \le y \le 24$

$f(x/y) < 0$

$f(x) - f(y) < 0$

Просто подставляем ⟶

Ответ: (1;5), (1;7), (1;10) ...

(2;5), (2;7), (2;10), (2;11), (2;13),

(2;14), (2;15), (2;17), (2;19) ...

и т. д. до (17;23), (19;23).

Просто считаем:

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(2) + f(2) = f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(2) + f(3) = f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(2) + f(2) + f(2) = f(8) = 0$

$f(3) + f(3) = f(9) = 0$

$f(2) + f(5) = f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(2) + f(6) = f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(2) + f(7) = f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(4) + f(4) = f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(2) + f(9) = f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(5) + f(4) = f(20) = 1$

$f(3) + f(7) = f(21) = 1$

$f(2) + f(11) = f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(4) + f(6) = f(24) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)