МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Обозначим за t выр-е x^2+6x.
Тогда исходное нер-во равносильно:

$$3^{\log_4(t)}+t \geq |t|^{\log_4 5}$$

На ОДЗ $t>0 \Rightarrow |t|=t$

$$\Downarrow$$

$$3^{\log_4(t)}+t \geq t^{\log_4 5}$$

По св-ву логарифма

$$3^{\log_4(t)} = t^{\log_4(3)}$$

$$\Downarrow$$

$$t^{\log_4(3)}+t \geq t^{\log_4 5} \Rightarrow t^{\log_4(3)}+t^{\log_4(4)} \geq t^{\log_4(5)}$$

~~Возможны 3 случая:~~

1) $t=1 \Rightarrow$ нер-во выполняется $\Rightarrow x^2+6x=1 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}=-4\pm\sqrt{8}$
$= -3\pm2\sqrt{2}$

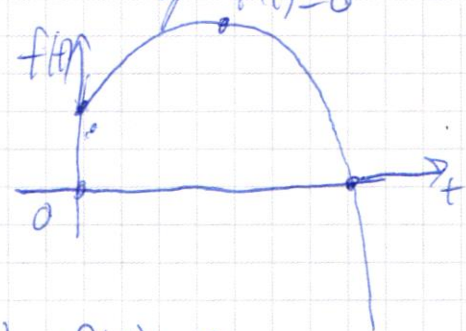
~~2) $t>1 \Rightarrow$ т.к. $\log_t(x)$ возраст. функция исходное равносильно~~

Рассмотрим $f(t)=t^{\log_4(3)}+t^{\log_4(4)}-t^{\log_4(5)}$

Нас интересует мн-во аргументов $t \in \mathbb{R}_+ : f(t)\geq 0$

Рассмотрим $f'(t)$. $f'(t) = \log_4(3)\cdot t^{\log_4(3)-1} + 1 - \log_4(5)\cdot t^{\log_4(5)-1}$

Не трудно видеть, что производная меняет знак ровно один раз на $\mathbb{R}^+$ (т.к. $\log_4(3)-1<0$ и $t^{\log_4(3)-1}$ убывает, а $\log_4(5)-1>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -t^{\log_4(5)-1}$ тоже убывает при возрастании t



$\Downarrow$

мн-во: $f(t)\geq 0$ имеет вид отрезка, и $f(t)=0$ не боле чем в двух точках

Заметим, что $f(0)=f(16)=0$

$(f(16) = 4^{2\log_4(3)} + 4^2 - 4^{2\cdot\log_4(5)} = 3^2+4^2-5^2=0)$

$\Downarrow$

нер-во выполняется только при $t\in[0,16]$

$$\begin{cases} x^2+6x>0 \Rightarrow x\in\{(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)\} - \text{ОДЗ}. \\ x^2+6x\leq 16 \Rightarrow x\in[-8,2] \end{cases}$$

$\Downarrow$

Ответ: $x\in\{[-8,-6)\cup(0,2]\}$

№5

Для начала заметим, что $f(1) = f(1\cdot 1) = 2f(1) = 0$.

С другой стороны $f\left(\frac{q}{q}\right) = f(q) + f\left(\frac{1}{q}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{q}\right) = -f(q)$

Также $f(P_1 P_2 P_3 \dots P_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{P_i}{4}\right]$, где P_i – простое число.

Отсюда следует, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{p_i}{4}\right] - \sum_{i=1}^{L}\left[\frac{q_i}{4}\right]$, где $P_1 \dots P_k$ и $q_1 \dots q_L$ – разложение x и y на простые множители.

Таким образом $f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x
[illegible]	~~1~~				
	~~2~~				
0	3	0	12	1	21
0	4	3	13	2	22
1	5	1	14	5	23
0	6	1	15	0	24
1	7	0	16	2	25
0	8	4	17	3	26
0	9	0	18	0	27
1	10	4	19		
2	11	1	20		

Зам.: $f(x)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Упорядочив числа по возрастанию, видно получится, что всего 10 чисел с $f(x)=0$; 7 чисел с $f(x)=1$; 3 числа с $f(x)=2$; 2 числа с $f(x)=3$, 2 числа с $f(x)=4$ и одно с $f(x)=5$

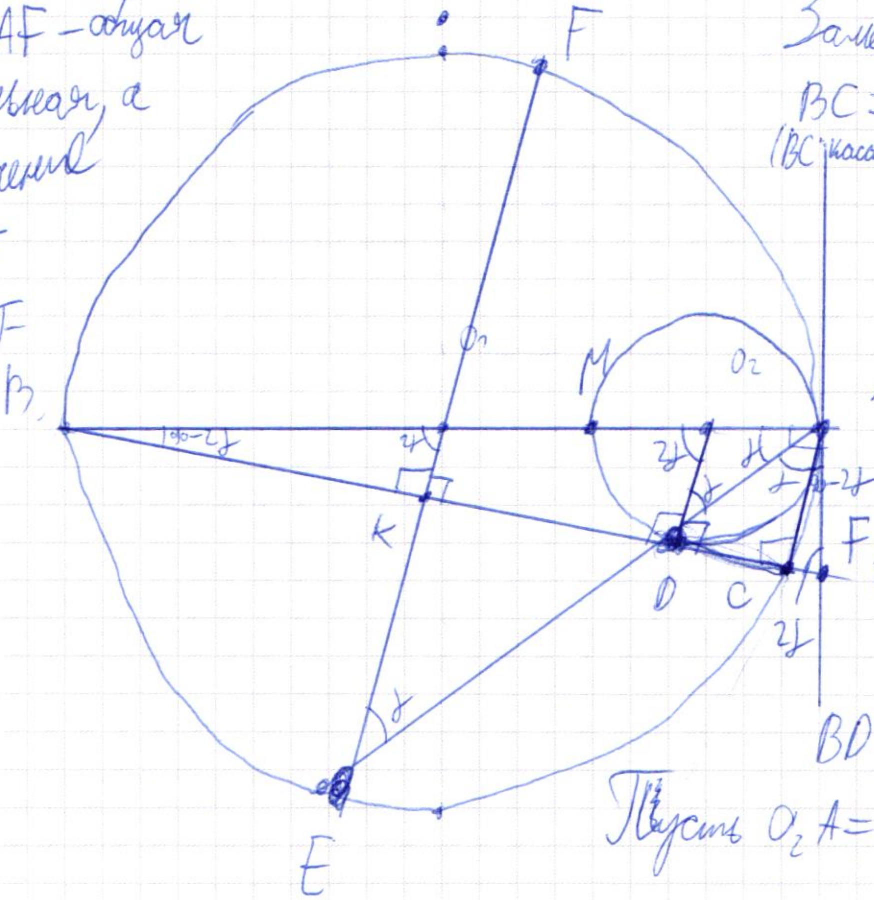
$f(x)$	0	1	2	3	4	5
кол-во	10	7	3	2	2	1
част. суммы	10	17	20	22	24	25

$\Rightarrow$ ~~Ответ~~ всего таких пар: $10\cdot7+17\cdot3+20\cdot2+22\cdot2+24=$
$=70+51+40+44+24=$
$=110+51+68=$
$=161+68=229$

Ответ: 229

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



Пусть AF — общая касательная, а F — пересечение BD и AF

$K = EF \cap BF$

Заметим, что $O_2D \perp BC \Rightarrow O_2D \parallel EF$. (BC касательная)

$\Downarrow$

EF проходит через O_1, т.к. $\Delta DO_2A \sim \Delta EO_1A$ из параллельности прямых. ($O_1A = O_1E$; $O_2A = O_2D$)

$BD = \frac{13}{2}$; $DC = \frac{5}{2}$; $BC = 9$

Пусть $O_2A = r$, а $O_1A = R$.

Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle O_2DA = \angle O_1EA = \alpha \Rightarrow \angle BO_2D = 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_2BD = 90 - 2\alpha = \angle CAF$ (угол между кас. и хордой. угол $\angle BAF$ — прямой $\Rightarrow \angle AFB = 2\alpha \Rightarrow \angle ACF = 90° \Rightarrow AC \parallel O_2D \parallel$
$\parallel O_1F \Rightarrow \angle DAC = \alpha$. $tg\alpha = \frac{DC}{AC}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{BC}{AC}$

$\Downarrow$

$\frac{2}{1-tg^2\alpha} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow 1 - tg^2\alpha = \frac{2DC}{BC}$

$\Downarrow$

$tg\alpha = \sqrt{1 - \frac{2DC}{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{2}{3}\right)$

$\angle AFE = 90 - \alpha$ (т.к. EF диаметр)

$\Downarrow$

$\angle AFE = arctg\left(\frac{3}{2}\right)$

$tg 2\alpha = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{5}{9}\right)} = \frac{12}{5}$

$\Downarrow$ (из ΔBO_2D)

$r = O_2D = \frac{BD}{tg 2\alpha} = \frac{13 \cdot 5}{24} = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}$

~~$BO_2 = \sqrt{r^2}$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

~~По теореме о секущей $BM\cdot BA = BO^2$~~

~~$BM\cdot BA = 4R\cdot(R-r) = 4R^2 - rR = \frac{169}{4}$~~

~~$4R^2 - \frac{65}{24}R - \frac{169}{4} = 0$~~

~~при отрицательном корне нельзя~~

~~$R = \dfrac{\frac{65}{24} + \sqrt{\frac{5^2\cdot 13^2}{3^2\cdot 8^2} + 2^2\cdot 13^2}}{8} = \dfrac{\frac{65}{24} + \sqrt{\frac{13^2\cdot(5^2+2^2\cdot 3^2\cdot 8^2)}{3^2\cdot 8^2}}}{8} =$~~

~~$= \dfrac{\frac{65}{24} + \frac{13}{24}\sqrt{25+}}{8}$~~

$BK = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \Rightarrow \sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot tg\alpha = \sin\alpha$

$(1-\sin^2\alpha)tg^2\alpha = \sin^2\alpha$

$\frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} = \sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{13}{9}} = \frac{4}{13}$

$BO_1 = R = \frac{BK}{\sin 2\alpha}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{169}} = \frac{\sqrt{153}}{13}$

$= \frac{\sqrt{153}}{13} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD\cdot ED = b = BD\cdot DC \Rightarrow ED = \frac{b}{AD}$

$BM\cdot BA = BD^2 = a = 2(R-r)\cdot 2R = 4R^2 - 4rR$

$a = \frac{ED}{AE}\cdot 4R^2$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{AD\cdot R}{AE}$

$AD\cdot(AE-AD) = b$

$AD^2 - AD\cdot AE + b = 0$

$AD = \frac{AE \pm\sqrt{AE^2-4b}}{2}$

$AD = \frac{b}{ED}$

160°

$a = 4R^2\cdot\left(1-\frac{AD}{AE}\right)$

$\parallel$

$\frac{ED}{AE}$

$AE - AD =$

$\sqrt{\ }$

$\frac{AE - \sqrt{AE^2-4b}}{2}$

$a =$

R

$4R\cdot(R-r) = a$

153
16
169

169
16
153

13
13
39
36
64
24

65 − 44 48
24

65
48
17

39
13
169

12
36
18

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(t)} + 4^{\log_4(t)} - 5^{\log_4(t)} \geq 0$ $\quad f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

$t^{\log_4(3)} + t^{\log_4(4)} - t^{\log_4(5)} \geq 0$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{q}\right)$

$t^{\log_4(3)}$

$\log_4(3)\, t$

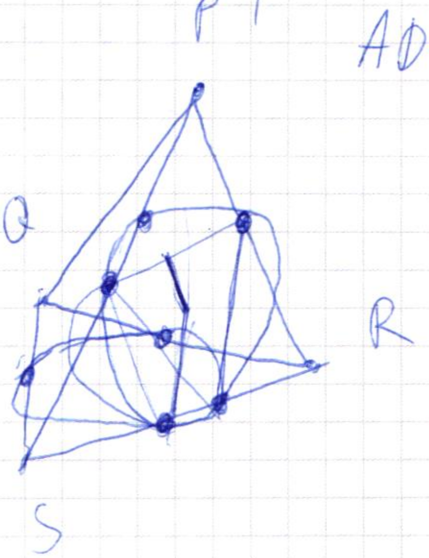
$f\left(\frac{1}{q}\right) =$

$4^{2\log_4(3)}$

$f\left(\frac{1}{q_1 q_2 q_3}\right) = \sum$

$AD = \frac{b}{ED}$ $\quad AD \cdot DE = b$

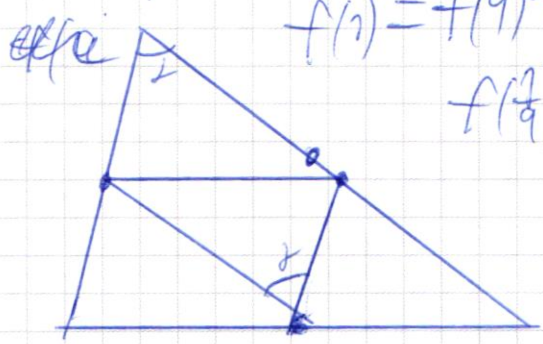
$\frac{1}{q}$

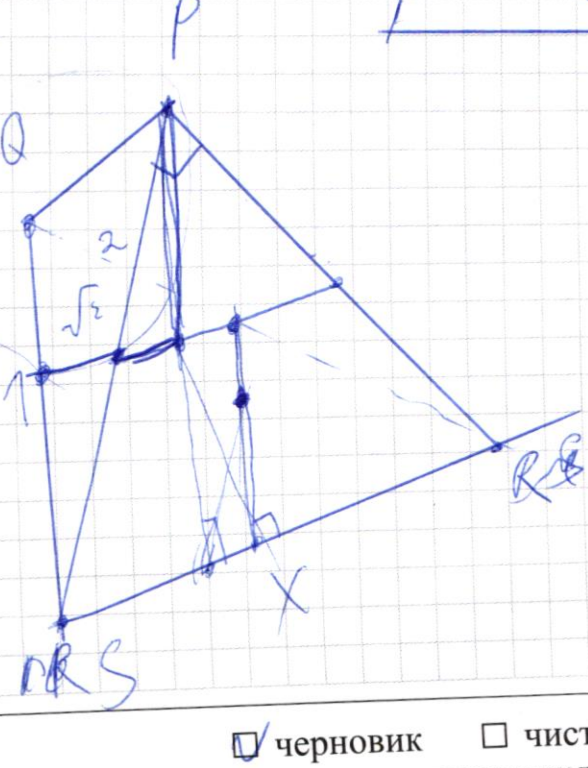


$f(1) = 0$

$f(1) = f(q) + f\left(\frac{1}{q}\right)$

$f\left(\frac{1}{q}\right) = -f(q)$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$ $\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta)$

$t^{\log_4(3)-1} + 1 \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log}$

$3y-2x \geq 0$

$\Downarrow\ y \geq \frac{2}{3}x$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2} =$

$-3 \pm \sqrt{8}$

$t^{\log_4(3)} + t \geq t^{\log_4(5)}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$t^{\log_4(3)} + t^{\log_4(4)} \geq t^{\log_4(5)}$

$\operatorname{tg}\alpha =$

$4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$\operatorname{tg}2\alpha =$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$x^2 + 6x = t$

$3^{\log_4(t)} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}}$

$t^{\log_4(3)} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$c^{\log_b a}$

$1 - \frac{2DC}{BC}$ $\quad \frac{5}{9}$

$\log_4(3)$

$13\cdot 13$

$\frac{13}{13\ 9} = 169$

5

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_4(3)} + t^{\log_4(\ldots)} \ldots t^{\log_4(5)}$

$(x-2)\cdot(x+8)$

$-8, 2$

$3^a + 4^a \geq 5^a$

$4+12=$

x^3+x^4

$3^a + 4^a - 5^a \geq 0$

$(a^x)' = \left(e^{\ln(a)\cdot x}\right)' = e^{\ln(a)\cdot x}\cdot \ln(a) = a^x\cdot\ln(a)$

$BM\cdot BA =$

$= 2R\cdot(2R-r) =$

$4\cdot(R^2 - rR) = b$

$r = \frac{R\cdot AD}{AE}$

$b = 4R^2\left(\frac{ED}{AE}\right)$

$ED = \frac{a}{AD}$

$AD = \frac{a}{DE}$

$b = 4R^2\frac{a}{AD\cdot AE}$

$AD\cdot(AE - AD)$

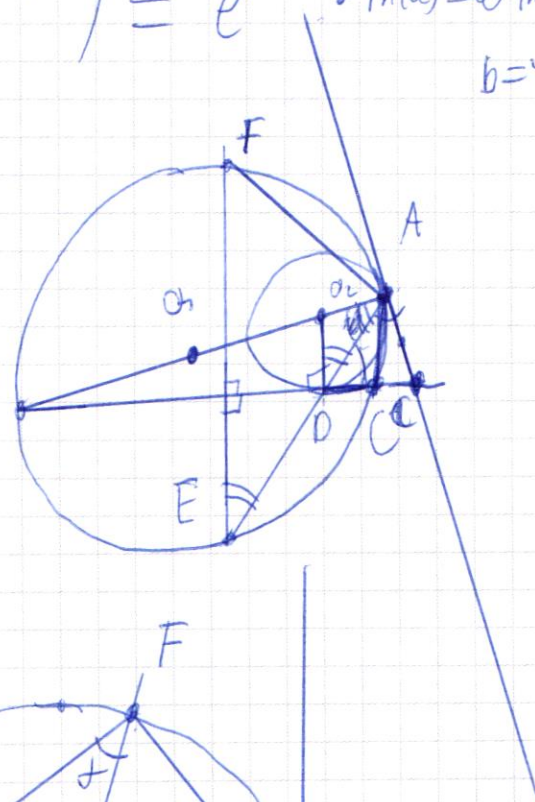
$AD\cdot DE = a$

$AD = DE$

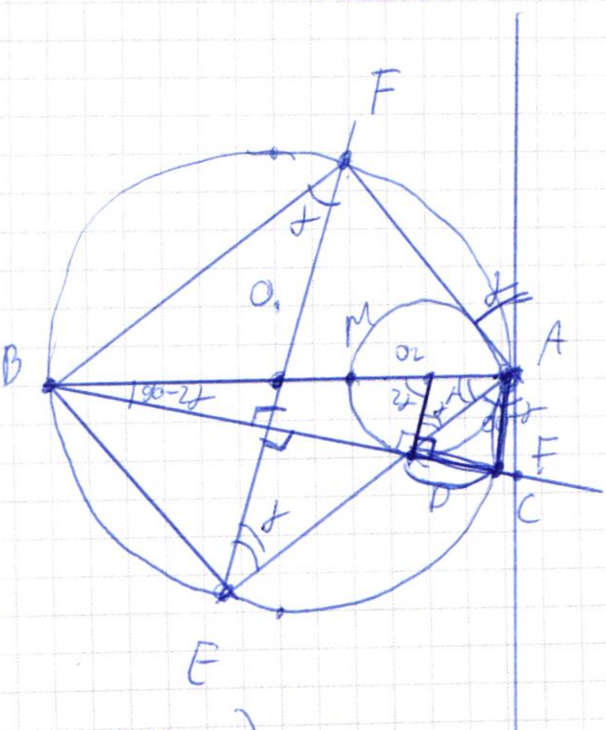
$\begin{array}{r} 34 \\ 17 \\ \hline 51 \end{array}$

$x\cdot(a-x) = C$

sin



$BD\cdot DC = AD\cdot DE =$



$AD\cdot DE = a$

$BD^2 = b = BM\cdot BA$

$2(R-r)\cdot 2R =$

$= 4\cdot(R^2 - 2r)$

$=$

$\frac{r}{AD} = \frac{R}{AE}$

$R = \frac{AE\cdot r}{AD}$

$4r^2\cdot\left(\frac{AE}{AD} - 1\right) =$

$\| 4r^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)