МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$

$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$.

$\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{8}{17}$.

$$\begin{cases}\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)+\cos^2(2\beta) = \frac{1}{17}+\frac{16}{17} = 1$.

$\Downarrow$

α – период

$\alpha = \pi n, n\in Z$;

$\Downarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$

~~IV~~. $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Downarrow$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

I. $\begin{cases}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}};\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}.\end{cases}$ $\sin 2\beta = \sin(2\alpha+2\beta)$

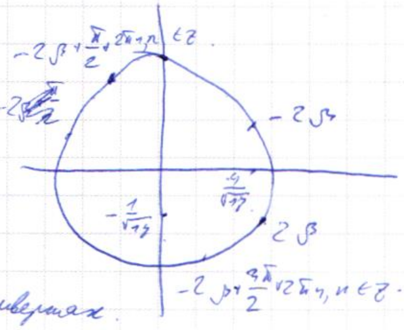
$\operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} = -4$

$2\alpha = -4\beta+\pi m, m\in Z, m=2k+1, k\in Z$;

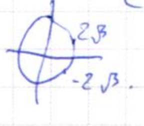
$(\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta+\pi m) = \sin 2\beta)$

$\alpha = -2\beta+\frac{\pi}{2}m, m=2k+1, k\in Z$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg} 2\beta = -4$, т.к. в II и IV четвертях.



II. $\begin{cases}\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}.\end{cases}$



$2\alpha = -4\beta+2\pi n, n\in Z$

$\alpha = -2\beta+\pi n, n\in Z$.

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-2\beta) = -\frac{1}{4}$;

$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -4$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}.$

$t=x^2+6x;\quad t>0$

$3^{\log_4 t}+t \ge t^{\log_4 5}$

$3^{\frac{\log_3 t}{\log_3 4}}+t \ge t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t \ge t^{\log_4 5}$

$f(t)=t^{\log_4 3}+t;$

$g(t)=t^{\log_4 5};$

I. $0<t<1$: $\quad 1<\log_4 5$

$t^1>t^{\log_4 5}$

$\Downarrow$

$t^{\log_4 3}+t>t^{\log_4 5}$

$0<t<1$ – решение.

II. $t\ge 1$:

$f(t)$ и $g(t)$ – монотонны;

$f'(t)=1+\log_4 3\cdot t^{\log_4 3-1}$; $\quad \log_4 3-1<0$

$g'(t)=\log_4 5\cdot t^{\log_4 5-1}$; $\quad \log_4 5-1>0$

$g(t)$ растет быстрее $f(t)$.

$t=16$: $16^{\log_4 3}+16\ge 16^{\log_4 5}$

$4^{2\log_4 3}+16\ge 4^{2\log_4 5}$

$9+16\ge 25$,

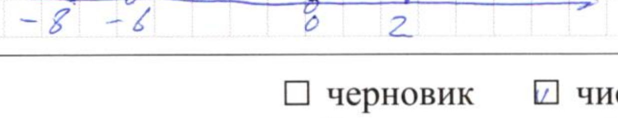
достигли равенства.

т.к. при $0<t<1$ $f(t)>g(t)$, то равенство только в одной точке.

$t>16$ – $\varnothing$

$0<t\le 16$.

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x\le 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0 \\ x^2+6x-16\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x+8)(x-2)\le 0 \end{cases}$



Ответ: ~~$x\in[-8;0)\cup(0;2]$~~ $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

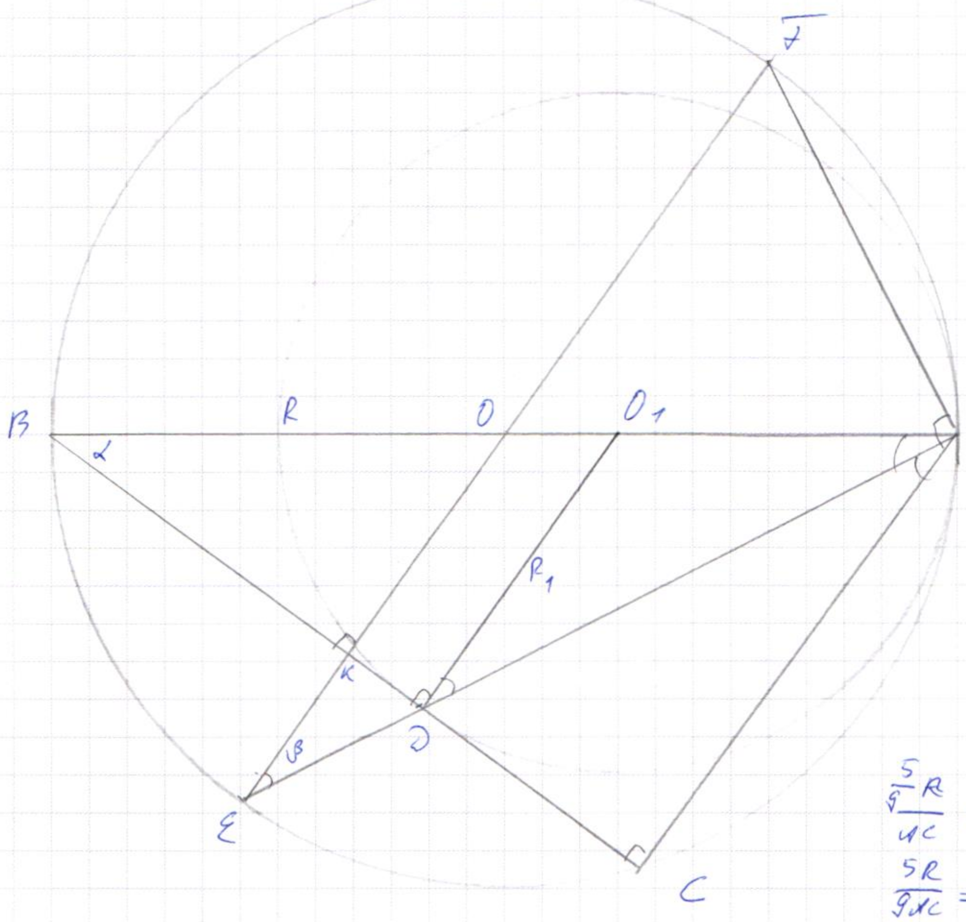
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$O_1D \perp BD$, т.к. BD — кас.;

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$, т.к. $\angle\alpha$ — общий, $\angle O_1DB = \angle ACB$.

$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{R_1}{AC} = \frac{BO_1}{2R} = \frac{13}{18}$.

$\frac{2R-R_1}{2R} = \frac{13}{18}$

$1-\frac{R_1}{2R}=\frac{13}{18}$

$\frac{R_1}{R}=\frac{5}{9}$

$\frac{\frac{5}{9}R}{AC}=\frac{13}{18}$.

$\frac{5R}{9AC}=\frac{13}{18}$.

$\frac{R}{AC}=\frac{13}{10}$.

$\frac{AC}{2R}=\frac{5}{13}=\sin\alpha$.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$.

$tg\,\alpha = \frac{5}{12}$;

$\frac{5}{12} = \frac{R_1}{\frac{13}{2}} \Rightarrow R_1 = \frac{65}{24}$

$R = \frac{9}{5}\cdot\frac{65}{24} = \frac{39}{8}$

$\frac{5}{13} = \frac{AC}{\frac{39}{4}}$ $\quad AC = \frac{5\cdot 39}{4\cdot 13} = \frac{15}{4}$

$\angle DAC = \angle O_1DA$, т.к. $O_1D \parallel AC$.

$\angle O_1DA = \angle O_1AD$, т.к. $O_1D = O_1A = R_1$

$\angle BAE = \angle EAC \Rightarrow \smile BE = \smile EC \Rightarrow$ EF — диаметр.

$\triangle KED \sim \triangle DAC$, т.к. $\angle EKD = \angle DCA$, $\angle KDE = \angle ADC$, верт.

$KC = \frac{9}{2} \Rightarrow KD = 2;$

$\frac{KD}{DC} = \frac{CD}{AD};$ $\quad AD = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{225}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{4};$

$CD = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{13}}{5 \cdot 4} = \sqrt{13}$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{13}};$ $\cancel{\ }$

$\angle FAE = 90^\circ$, т.к. EF – диаметр.

$\sin\beta = \cos\angle EFA = \frac{2}{\sqrt{13}}.$

$\angle EFA = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13};$

$\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{AF}{2 \cdot \frac{39}{8}} \Rightarrow AF = \frac{2 \cdot 3\sqrt{13}}{4} = \frac{3\sqrt{13}}{2};$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{13} + \frac{5}{4}\sqrt{13}\right) \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} = \frac{351}{16}.$

Ответ: $R_1 = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$;
$S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$3y-2x\geq 0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$\cancel{3y^2}$ $3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2-3xy+2x+3y-2=0 \\ 3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$\cancel{(3y-2)^2}$

$$\begin{cases} (3y-2x)^2-3xy+2x+3y-2=0 \\ 3(x+y)^2-6x(y+1)-4(y+1)=0 \end{cases}$$

$(3y-2x)^2-3y(x-1)+2(x-1)=0$

$(3y-2x)^2-(x-1)(3y-2)=0$

$3(x+y)^2-2(y+1)(3x+2)=0$

$$\begin{cases} \cancel{(3y-2x)^2}-3xy+2x+3y-2=0 \\ \cancel{3(x+y)^2}-6xy-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$\cancel{9y^2-12}$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$\cancel{3x^2-6x+3x-3x+3y^2-4y-4=0}$

$3x^2-6x+3-3+3y^2-4y-4=0$

$3(x-1)^2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=$

$=3x^2+3y^2-6x-4y-4$

$6y^2-15xy+x^2+8x+7y+2=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t = 1:$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$f(t) = 3^{\log_4 t} + t.$

$g(t) =$

$3^{\frac{\log_3 t}{\log_3 4}} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\frac{1}{\log_3 4}} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t < 1$ - решение.

$f(t) = t^{\frac{1}{\log_3 4}} + t$

$f'(t) = \frac{1}{\log_3 4} \cdot t^{\frac{1-\log_3 4}{\log_3 4}} + 1 = t^{\frac{1-\log_3 4}{\log_3 4}} + \log_3 4.$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$1 + t^{1-\log_4 3} \geq t^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$0 < 1 - \log_4 3 < 1$

$1 < t^{1-\log_4 3} < t.$

$0 < \log_4 \frac{5}{3} < 1$

$1 < t^{\log_4 \frac{5}{3}} < t.$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$1 \geq t^{\log_4 \frac{3}{4}}(t^{\log_4\frac{5}{4} - \log_4 \frac{3}{4}} - 1)$

$1 \geq t^{\log_4 \frac{3}{4}}(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1)$

$f(t) = t^{\log_4 3} + t.$

$g(t) = t^{\log_4 5}$

Обе монотонно растут.

$t = 16 \cdot 16^{\log_4 3} + 16 \geq 16^{\log_4 5}$

$4^{2\log_4 3} + 16 \geq 4^{2\log_4 5}$

$9 + 16 \geq 25.$

достигнуто равенство.

$64^{\log_4 3} + 64 \geq 64^{\log_4 5}.$

$27 + 64 \geq 125.$

Если при всех

~~до t~~

при $t < 1$ $f(t) > g(t)$,

$t^{1.4} > t^{\log_4 5}.$

$f'(t) = 1 + \log_4 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$g'(t) = \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

~~возрастает~~

т.к. ~~степень~~ ~~t~~ ~~при g~~ ~~t~~ ~~$g'(t)$~~

$f''(t) =$

$f'(16) = 1 + \log_4 3 \cdot \frac{3}{2}$ $1 + \log_4 3 \cdot \frac{9}{16}$

$f''(t) =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} +$

$+ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot$

$\cdot\cos 2\beta = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$

$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$.

$+\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = +\frac{8}{17}$.

$2\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z; \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\right)$

$\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$;

$\left\{\begin{array}{l}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\end{array}\right. \Rightarrow 2\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z; 2\pi+2\pi n, n\in Z\right)$

$\beta \in \left(\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z; \pi+\pi n, n\in Z\right)$

$\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{4} = \cancel{\frac{9\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$;

$\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3} = \cancel{\frac{3\pi+10}{6}} = \frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$;

$\sin^2(2\alpha+2\beta)+\cos^2(2\beta) = \frac{1}{17}+\frac{16}{17} = 1$.

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi = 1$.

$\sin^2(\varphi+2\pi n)+\cos^2\varphi = 1$.

$\sin^2(\varphi+\pi n)+\cos^2\varphi = 1$;

если $\alpha \neq \pi n, n\in Z$, то

~~$\alpha = \pi n$~~, $n \in Z$

$\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{\pi}{2}n, n\in Z, \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$

$\Downarrow$

$\alpha = \pi n$

$\Downarrow$

$tg\,\alpha = 0$,

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

(1) $\sin 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\alpha$ - период ... $2\alpha = -4\beta$, $\sqrt{\pi} n$, $m = 2k+1, k \in Z$

(2) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\sin(2\beta + 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\sin 2\beta = \sin(-2\beta)$

$\sin(2\beta + 2\alpha) =$
$= \sin(-2\beta + 2\pi n) =$
$= \sin(-2\beta) =$
$= -\sin 2\beta =$
$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$2\alpha = -4\beta + 2\pi n, n \in Z$;

$\alpha = -2\beta + \pi n, n \in Z$;

$tg\,\alpha = tg(-2\beta) = -\frac{1}{4}$.

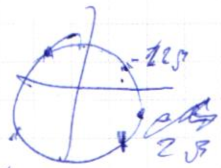
$\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4} = tg\,2\beta$.

(3) $2\alpha = -4\beta + \pi n, n \in Z$ $\quad \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\Downarrow$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(\pi n - 2\beta) = \sin 2\beta =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$



~~cos~~

$\sin^2(2\alpha + 2\beta) + \cos^2 2\beta = 1$.

~~$\sin^2(\pi n - 2\beta) + \cos^2 2\beta = 1$~~

~~$\sin^2(2\beta)$~~

$\alpha = -2\beta + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$; $\quad tg\,2\beta = \frac{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$;

n - чет:

$tg\,\alpha = tg(-2\beta) = \frac{1}{4}$

n - нечет:

$tg\,\alpha = tg(-2\beta + \frac{\pi}{2} + \pi k) =$

$tg\,\alpha = -4$;

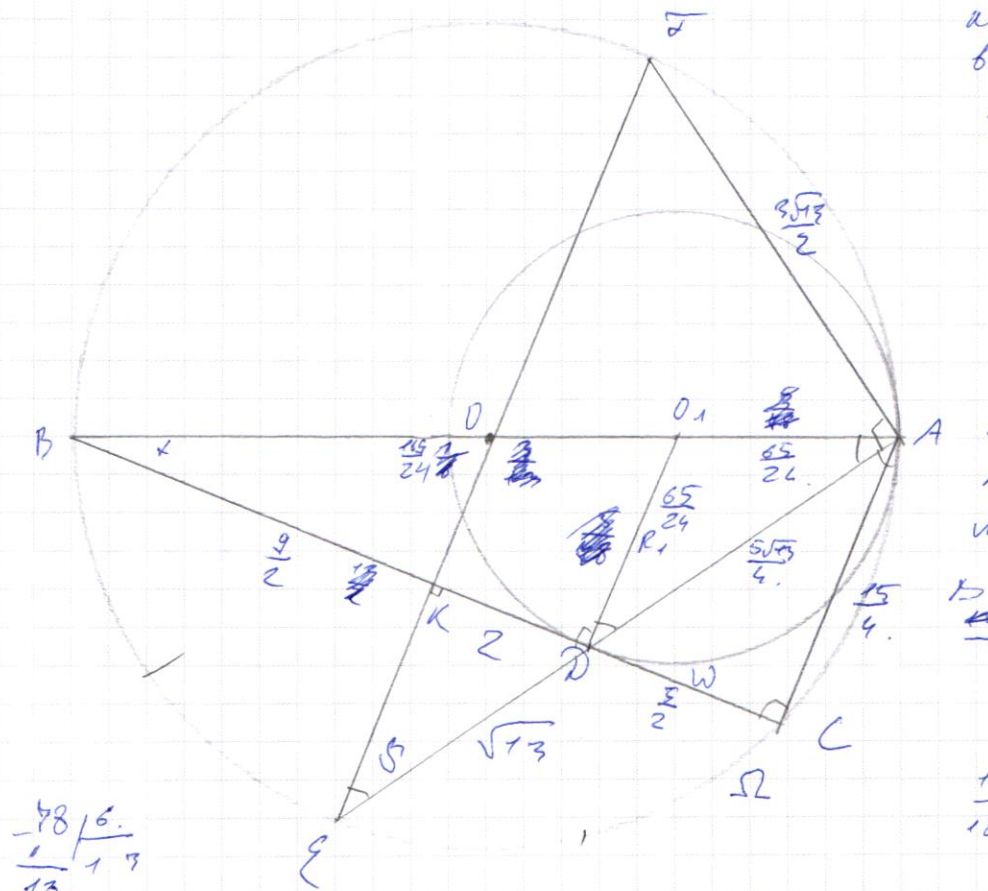
Ответ: $tg\,\alpha = 0$; $tg\,\alpha = \pm\frac{1}{4}$; $tg\,\alpha = -4$;

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

R; R_1; $\angle AFE$; $S_{\triangle AKE}$;



O_1 лежит на AB, т.к. кас. к Ω в точке $A \perp AB$, при этом радиус ω тоже перпендикулярен кас.

$O_1D \perp BC$, т.к. BD – кас.

$\angle ACB = 90°$, т.к. AB – диаметр.

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$.

$\frac{\frac{13}{2}}{9} = \frac{R_1}{AC} = \frac{BO_1}{AB} = \frac{2R-R_1}{2R}$

$\frac{13}{18} = 1 - \frac{R_1}{2R}$

$\frac{R_1}{2R} = \frac{5}{18}$

$\frac{R_1}{R} = \frac{5}{9}$

$R = \frac{9}{5}R_1$

$\frac{13}{18} = \frac{\frac{5}{9}R}{AC}$

$\frac{13}{18} = \frac{5R}{9AC}$

$\frac{R}{AC} = \frac{13\cdot 9}{18\cdot 5} = \frac{13}{10}$

$\frac{AC}{R} = \frac{10}{13}$

$\frac{AC}{2R} = \frac{5}{13} = \frac{AC}{AB} = \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$

$\Downarrow$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

$78 \mid 6$, 13

$\frac{3}{13} - \frac{5}{78} = \frac{18-5}{78} = \frac{13}{78} = \frac{1}{6}$

$\frac{12}{13}$, $\frac{12}{156}$

$R = \frac{9}{5}\cdot\frac{5}{78} = \frac{3}{26}$

$R_1 = \frac{5}{78}$

$R_1 = \frac{5}{12}\cdot\frac{2}{13} = \frac{R_1}{\frac{13}{2}} = \frac{5}{12}$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

ОДЗ:
$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3x^2+3y^2-6x-2y-2y-4=0$

$3x^2+3y^2-6x+6y-10y-4=0$ $\cancel{3x^2+3y^2}$

$3x^2+3y^2-6x+2(3y-2)=0$ $-10y$

$3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0$

$\cancel{3x^2-6x+y(3y-2)-2y}-4=0$

$3y-2x=0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+2x+3y-2+4x^2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+2x+3y-2+4x^2=0 \\ 9x^2+9y^2-18x-12y-12=0 \end{cases}$$

$9x^2+9y^2-18x-12y-12-9y^2+15xy-2x-3y+2-4x^2=0$

$5x^2-20x-15y+15xy-10=0$

$x^2-4x-3y+3xy-2=0$

$$\begin{cases} 3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0 \\ 9y^2-15xy+2x+3y-2+4x^2=0 \end{cases}$$

$\cancel{6(x+y)^2}$

$$\begin{cases} 15(x+y)^2-30xy-30x-20y-20=0 \\ \cancel{45y^2} \\ 18y^2-30xy+4x+6y-4+8x^2=0 \end{cases}$$

$15(x+y)^2-\cancel{30xy}-30x-20y-20-$

$-18y^2+\cancel{30xy}-4x-6y+4-8x^2=0$

$15(x+y)^2-34x-26y-18y^2-8x^2-16=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$BD^2 = BA \cdot BA$~~

~~$\frac{169}{4} = AA \cdot \frac{7}{13}$~~

~~$BA = \frac{13^3}{12}$~~

$tg\,\alpha = \frac{5}{12}$

$\frac{R_1}{\frac{13}{2}} = \frac{5}{12}$

$R_1 = \frac{13 \cdot 5}{2 \cdot 12} = \frac{65}{24}$

$R = \frac{9}{5} \cdot \frac{65}{24} \cdot 13 = \frac{39}{8}$

$\frac{\frac{13}{2}}{BO_1} = \frac{12}{13}$ $\qquad \frac{13}{2} = \frac{12}{13} BO_1$

$BO_1 = \frac{169}{24}$

$BD^2 = AK \cdot BA$

$\frac{169}{2} = BK \cdot \frac{39}{4}$

$BK = \frac{169 \cdot 4}{39 \cdot 4} = \frac{13}{3}$

$\angle FEA = \angle EAC$, н.л.

$\frac{5}{12} = \frac{AC}{9}$ $\quad AC = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$

$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{39}{4}}$

$\angle DAC = \angle O_1DA$, н.л.

AD - бисс. $\Rightarrow$ $\angle KAE = \angle AEC$

$\Downarrow$

EF проходит через O

EF - диаметр

$\angle EAF = 90°$

~~AD = 2~~

$AD = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{225}{16}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$\triangle EAD \sim \triangle ADC$: $\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{AD} \Rightarrow ED = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{13} = \sqrt{13}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin\angle AEQ = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} = \sin\beta =$

$= \cos(90^0 - \beta) = \cos\angle EAM.$

$\cos\angle EAM = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$

$\angle EAM = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}.$

$\sin\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{AF}{\left(\frac{39}{4}\right)} \Rightarrow AF = \frac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\frac{39}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{13} + \frac{5}{4}\sqrt{13}\right)\cdot\frac{3}{2}\sqrt{13} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{13} =$

$= 13\cdot\frac{27}{16} = \frac{13\cdot 27}{16}.$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\, 13 \\ \hline 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$

Ответ: $R_1 = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$;

$\angle AFE = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$;

$S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}$;

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

ОДЗ: $x^2+6x > 0$ $\quad x(x+6) > 0$

~~$|x^2+6x|$~~ $\quad x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x - |x^2+6x|^{\log_4 5} \geq 0$

$\frac{1}{7} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}$

$\frac{7}{12} \geq \frac{1}{5}$

$5^{-6}\cdot\frac{1}{8} \geq \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}$

$x^2+6x = t. \quad t > 0$

$3^{\log_4 t} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$ $\quad$ при $t \geq 1$ $\quad 3^{\log_4 t} > t > t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t \leq 1$ – одно из решений

$\sqrt{3} + 2 \geq 2\sqrt{5}$ $\quad F(t) = 3^{\log_4 t} + t.$ $\quad 3^{\log_4 t} \geq t\left(t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1\right)$

$t = 4^{\log_3(t) + \log_3\left(t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1\right)}$ $\quad 2 \geq 1.$ $\quad 3^{2\log_2 t} + t \geq t^{\frac{1}{2}\log_2 5}$ $\quad g(t) = t^{\log_4 5}$ $\quad 3^{\log_4 t} \geq 3^{\log_3\left(t\left(t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1\right)\right)}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \geq 2^{-\frac{1}{2}\log_2 5}$ $\quad \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \geq$

$\log_4 t \geq \log_3\left(t\left(t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1\right)\right)$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}.$ $\quad \frac{11}{18} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}.$ $\quad 2^{-\frac{1}{2}\log_2 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\log_4 t \geq \log_3 t + \log_3\left(t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1\right)$

$\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}.$ $\quad \log_3 t \geq$ $\quad 3^{\frac{1}{2}\log_2 t} + t \geq t^{\frac{1}{2}\log_2 5}$

$\frac{\log_3 t}{\log_3 4} \geq \log_3 t + \log_3\left(t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1\right)$

$2\sqrt{5} + \sqrt{15} \geq 2\sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{5} - \sqrt{3} \geq -\sqrt{15}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. степень t в выражении $g'(t)$ положительная, ~~что~~ а в выражении $f'(x)$ отрицательная, то если $f(t)$ ~~дост~~ стало равным $g(t)$, то значит, после этого момента $g(t)$ всегда больше $f(t)$, т.к. растет быстрее.

$f''(t) = \ln_4 3 \cdot \log_4 \frac{3}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{16}}$

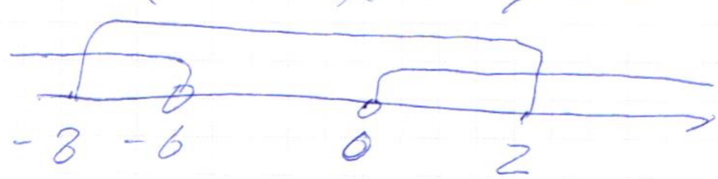
$g''(t) = \ln_4 5 \cdot \log_4 \frac{5}{4} \cdot \cancel{t}$

$0 < t \leq 16.$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x\leq 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x+6)>0. \\ x^2+6x-16\leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x+8)(x-2)\leq 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$;