МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$tg\alpha$ определен $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin2\alpha\cos4\beta + \sin4\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin2\alpha\cos^2 2\beta \cancel{-\sin2\alpha + \sin2\alpha} + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5} \quad \Big| \cdot\frac{1}{2}$$

$$\sin2\alpha\cos^2 2\beta + \sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos2\beta\,(\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}) = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{2}{5} \qquad \cos2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{6}}$$

$$\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} \pm \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin2\alpha \pm \cos2\alpha = -1$$

„+": $2\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1$

~~$2\sin2$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cancel{1} = \cancel{-1}$

$\cos\alpha \neq 0$

$\cos\alpha\,(4\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$4\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$

$2\sin\alpha = -\cos\alpha$

$2\,tg\alpha = -1$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

" — ": $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha\,(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \quad (tg\alpha = 0) \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$\sin\alpha = -2\cos\alpha \quad |:\cos\alpha$

$tg\alpha = -2$

Ответ: $$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy-x-2y+2 \\ x-2y \geq 0 \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x=a+2 \\ y=b+1 \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = (x-2)(y-1) \\ y \leq x/2 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$a=x-2$
$b=y-1$
$a-2b=x-2y$

$$\begin{cases} (a-2b)^2 = ab \\ a^2+9b^2=25 \text{ — эллипс} \\ b \leq \frac{a}{2} \end{cases}$$

(окружность сжатая в 3 раза по верт.) ось b

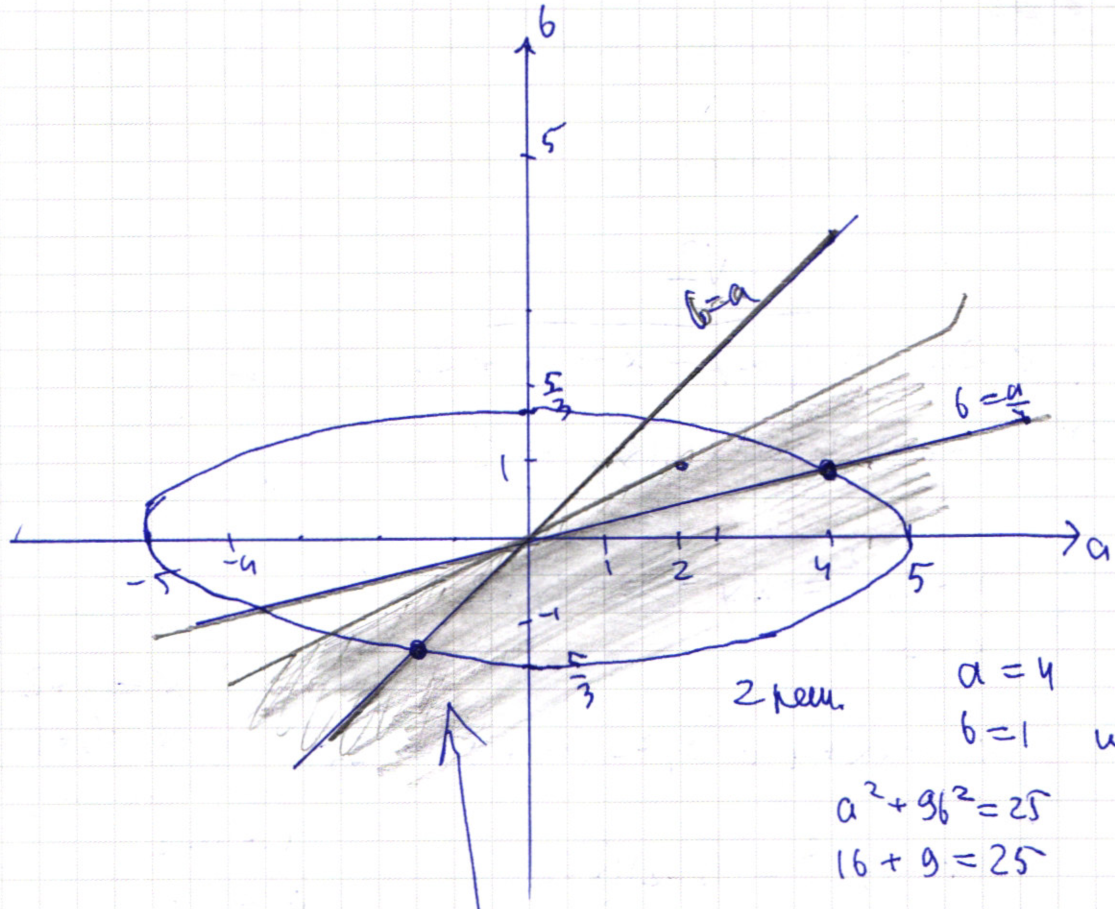
$b+1 \leq \frac{a+2}{2}$

$b \leq \frac{a}{2}$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$4b^2-5ab+a^2=0 \qquad b=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-16a^2}}{8}=\frac{5a\pm 3a}{8}$

$$\left[\begin{matrix} b=\frac{a}{4} \\ b=a \end{matrix}\right.$$



2 реш.

$a = 4$

$б = 1$ подходит

$a^2 + 9б^2 = 25$

$16 + 9 = 25$

$a^2 + 9б^2 = 25$

$в = a$

$a^2 + 9a^2 = 25$

$10a^2 = 25$

$2a^2 = 5 \qquad a^2 = \frac{5}{2}$

$a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, из картинки видно, что $a < 0$

$a = -\sqrt{\frac{5}{2}} = б$

$x = a + 2$

$y = б + 1$

$\begin{cases} a = 4 \\ в = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ в = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5/2} \\ y = 1 - \sqrt{5/2} \end{cases} \end{array} \right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2-18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

сделаем замену переменной

$t=\log_{12}(x^2+18x)$, тогда $12^t = x^2+18x$

↑ – раст. функция

$5^t+12^t \geq (12^t)^{\log_{12}13}$

$5^t+12^t \geq 13^t$

a^x, где $a>1$ – строго растущая функция

$(a^x)' = a^x \ln a$, $\ln a>0$, $a^x>0$

и определена для любого t,

~~знач~~

$5^t, 12^t, 13^t$ – строго растут

5^t+12^t – тоже растет (сумма монотон. воз.)

значит, если $f(x)\uparrow$ и $g(x)\uparrow$ то если $f(x)<g(x)$ для $x<x_0$, а $f(x_0)=g(x_0)$

то для $x>x_0$ $f(x)>g(x)$.

Пусть $t=0$,

$5^0+12^0>13^0$ $(2>1)$

если $t=t_0$

$5^{t_0}+12^{t_0}=13^{t_0}$,

то для $t>t_0$ ~~5^t+12~~

$5^t+12^t>13^t$

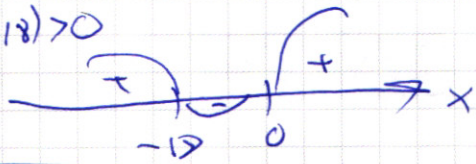
заметим, что для $t=2$

$5^t+12^t=13^t$

$25+144=169$

значит ответ это $t\leq 2$ + ОДЗ

$x(x+18)>0$



ОДЗ: $x^2+18x>0$

$\log_{12}(x^2+18x) \le 2$

$x^2+18x \le 144 \quad \swarrow 12^2$

$x^2+18x-144 \le 0$

$\cancel{(x\ \ \ \ )}$

$(x+24)(x-6) \le 0$

$x^2+18x-144=0$

$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2+4\cdot 144}}{2} =$

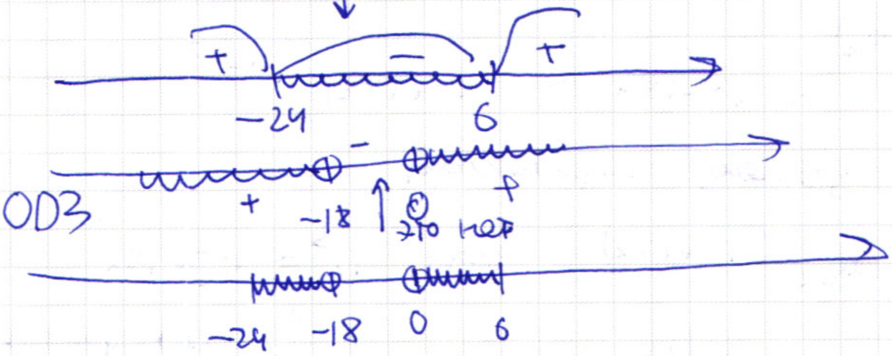
$= -9 \pm \sqrt{9^2+144} =$

$= -9 \pm \sqrt{225} =$

$= -9 \pm 15 =$

$= -24; 6$

Это подходит



Ответ: $[-24;-18) \cup (0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\lfloor \frac{p}{4} \rfloor$, $p\in P$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)$

↑ число можно раскладывать на простые множители таким образом

$$f(x)=\sum_{\substack{x\,\vdots\, m\\ m\in P}} f(m)$$

$f(y\cdot \frac{1}{y})=f(1)=0=f(y)+f(\frac{1}{y})$

$\Downarrow$ $f(\frac{1}{y})=-f(y)$

$f(x/y)=f(x)-f(y)$

посчитаем f для простых чисел

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23
f	0	0	1	1	2	3	4	4	5

$f(\frac{x}{y})<0$ $\quad f(x)-f(y)<0$ $\quad f(x)<f(y)$

посчитаем f для $1\le x\le 24$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
				$2f(2)$		$f(2)+f(3)$		$3f(2)$	$2f(3)$	f_2+f_5		f_3+f_4		f_2+f_7	f_3+f_5	$2f_4$	
f	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

x	18	19	20	21	22	23	24
f	0	4	1	1	2	5	0
	f_3+f_6		f_4+f_5	f_3+f_7	f_4+f_2		$f(6)+f(4)$

$0\le f(x)\le 5$ $\quad f(y)>f(x)$

рассмотрим $f(x)=0$, тогда $f(y)>0$, $1\le y\le 24$ всего 13

(5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23)

$f(x)=0$ для 11 чисел итого $11\cdot 13=$ 143 пары

$\forall$ $f(x)=1$, таких чисел 7

$f(y)>1$ таких чисел 6 (11, 13, 17, 19, 22, 23)

$7 \cdot 6 = 42$

$\forall$ $f(x)=2$ таких 2 (11, 22)

$f(y)>2$ таких 4 (13, 17, 19, 23) $2 \cdot 4 = 8$

$\forall$ $f(x)=3$ таких 1 (13)

$f(y)>3$ таких 3 (17, 19, 23) $1 \cdot 3 = 3$

$\forall$ $f(x)=4$ таких 2 (17, 19) $2 \cdot 1 = 2$

$f(y)>4$ таких 1 (23)

$\forall$ $f(x)=5$ таких 1

$f(y)>5$ нет

$$\begin{array}{r} 143 \\ 42 \\ +\quad 8 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 198 \end{array}$$

$143+42+8+3+2=198$

Ответ: 198

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

$$\underbrace{\frac{12x+11}{4x+3}}_{g(x)} \le ax+b \le \underbrace{-8x^2-30x-17}_{f(x)}$$

$4x+3 \neq 0$

$x = -\frac{3}{4}$ – вертикальная асимптота

парабола с ветвями вниз

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$y=3$ горизонт. асимптота

$x = -\frac{11}{4}$

$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - \frac{34}{2} = -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - \frac{34}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

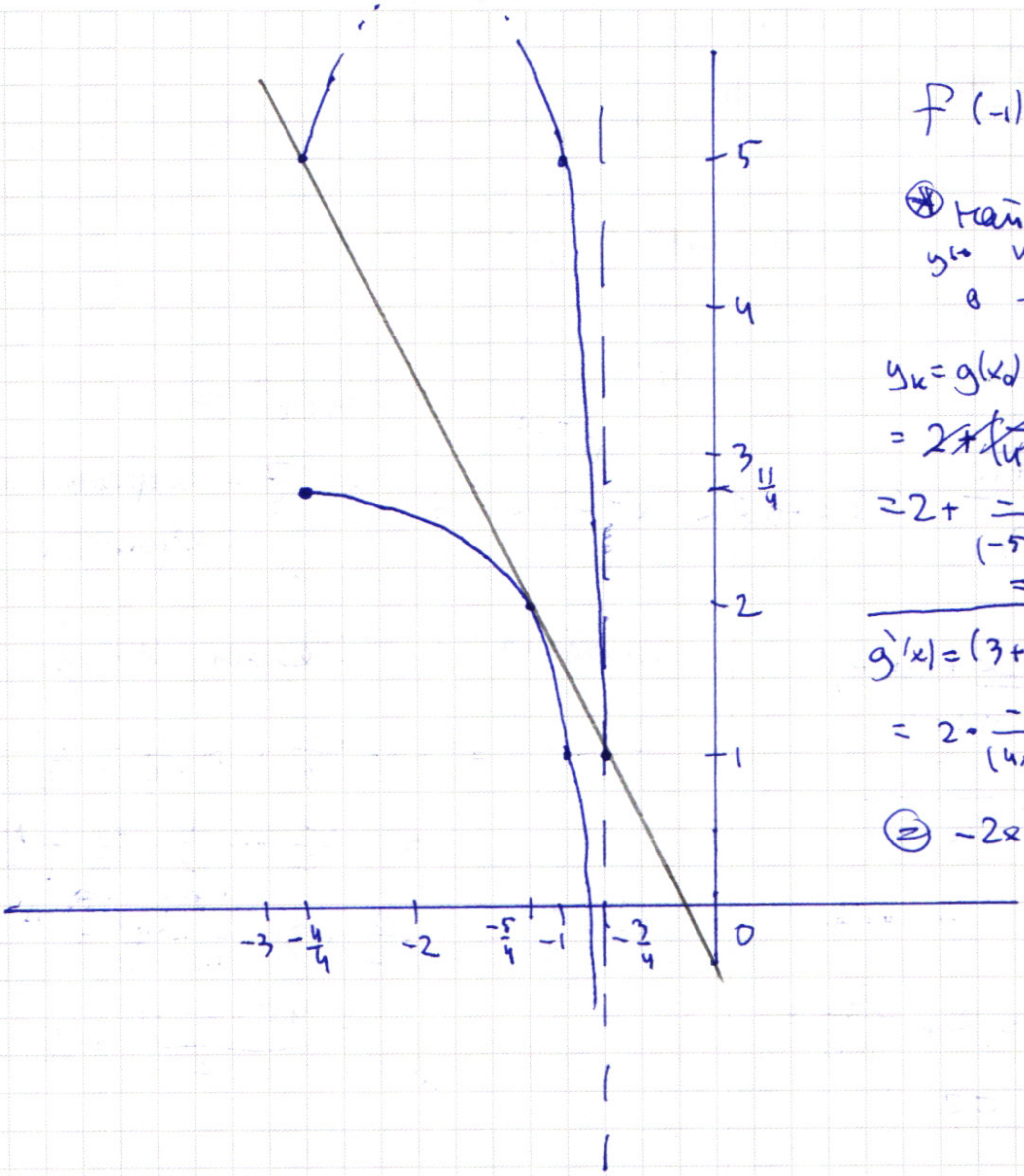
$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2} + 30 \cdot \frac{3}{4} - \frac{34}{2} = \frac{45-9-34}{2} = 1$$

также заметим что $g\left(-\frac{5}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-5+3} = 2$

$g(-1) = 1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$f(-1) = -8 + 30 - 17 = 5$

⊛ найдем касательную к гиперболе в $-\frac{5}{4}$

$y_к = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$

$= \cancel{2 + \left(\frac{2}{4x_0+3}\right)'(x-x_0)}$

$= 2 + \frac{-8}{(-5+3)^2}\left(x + \frac{5}{4}\right) =$

$= 2 - 2\left(x + \frac{5}{4}\right) =$

$g'(x) = \left(3 + \frac{2}{4x+3}\right)' =$

$= 2 \cdot \frac{-4}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2}$

$= -2x - \frac{1}{2}$

прямая $ax+b$ не должна пересекать параболу на $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\Downarrow$

максимальный случай прямой когда она проходит через $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, но заметим, что такая прямая касается⊛ гиперболы в точке $x = -\frac{5}{4}$, и если эту прямую сдвинуть вниз или повернуть, то она пересечет одну из функций на $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$-\begin{cases} -\frac{11}{4}a + b = 5 \\ -\frac{3}{4}a + b = 1 \end{cases}$

$-2a = 4$

$a = -2$

$\Downarrow$

$\frac{3}{4} \cdot 2 + b = 1$, $b = -\frac{1}{2}$

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$x = -\frac{5}{4} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 = g\left(-\frac{5}{4}\right)$

Ответ: $\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

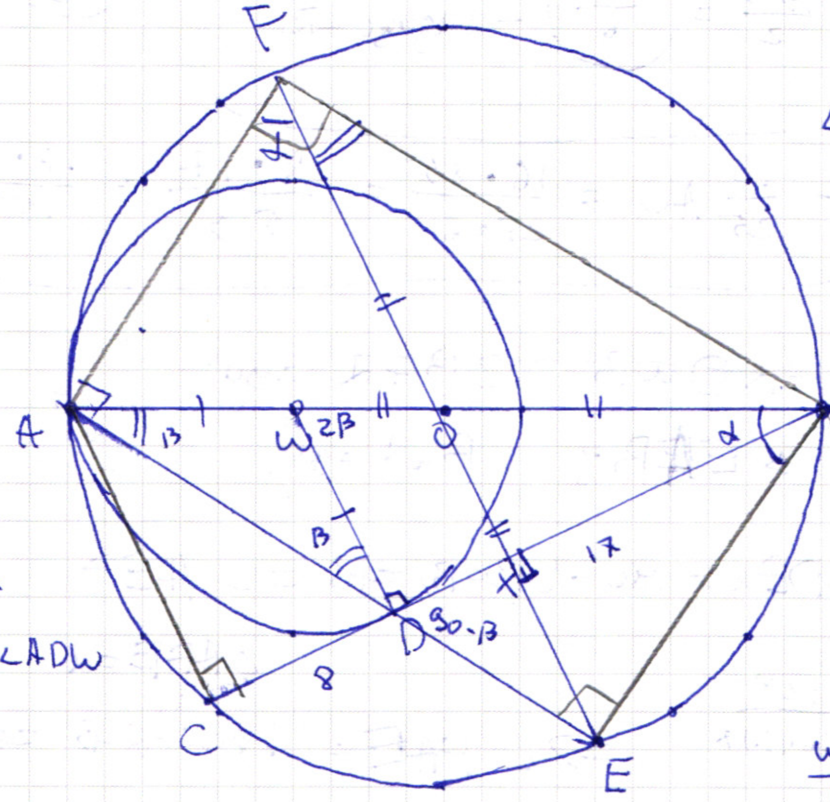
центр Ω – O
центр ω – W

$\angle AFE = \alpha$
$\angle EAB = \beta$

$EF \cap CB = X$
опир. – опираются

$\angle EAB = \angle EFB$ (дуга EB)

$AW = WD$ – радиус ω



$\angle DWB = \angle WAD + \angle ADW$ (внешний)

$CD = 8$
$BD = 17$

$$\frac{WD}{AC} = \frac{WA}{AC} = \frac{17}{25}$$

$$\frac{WA}{AB} = \frac{8}{25}$$

$\Downarrow$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{17}{8}$$

$\angle AFE = \angle ABE$ (опир на дугу AE)

$\angle C = \angle E = \angle F = 90^\circ$ (опир на диаметр)

$BC = CD + DB = 8 + 17 = 25$

$$\frac{AW}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{8}{25}$$

$$AO = \frac{AB}{2} \Rightarrow \frac{AW}{AO} = \frac{16}{25}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\left(\frac{17}{8}AC\right)^2 = AC^2 + 25^2$$

$$AC^2\left(\frac{17^2}{8^2} - 1\right) = 25^2$$

$$AC^2\left(\frac{(17-8)(17+8)}{8^2}\right)=25^2$$

$$AC\cdot\frac{\sqrt{9\cdot 25}}{8}=25$$

$$AC\cdot\frac{3\cdot 5}{8}=25 \qquad \cancel{AC=\frac{8}{3}}$$

$$AC\cdot\frac{3}{8}=5 \qquad AC=\frac{40}{3} \qquad AB=\frac{17}{8}AC=\frac{17}{8}\cdot\frac{40}{3}=$$

$$=\frac{17\cdot 5}{3}=$$

$$=\frac{85}{3}$$

$$AO=\frac{AB}{2}=\frac{85}{6}\text{ — радиус } \Omega$$

$$AW=\frac{16}{25}AO=\frac{16\cdot 85}{25\cdot 6}=\frac{8\cdot 17}{5\cdot 3}=\frac{17\cdot 8}{15}=\frac{136}{15}$$

$\angle AFE$

$\alpha=90-\frac{1}{2}\arccos\frac{8}{225}$

$=$ arc

~~из $\triangle DWB$ $\angle B+\alpha=90^\circ$~~

из $\triangle EAB$: $B+\alpha=90^\circ$

$$\angle DEX=90-(90-B)=B=\angle AEF$$

$$\angle AFE=\alpha$$

$$=\frac{8^2+17^2-15^2}{2\cdot 15\cdot 8\cdot 17}=\frac{128}{16\cdot 15\cdot 17}$$

$\Rightarrow \angle FAE=180^\circ-\alpha-B=90^\circ\Rightarrow$

$$=\frac{8}{17\cdot 15}=\frac{8}{225}=\cos 2B$$

EF — диаметр $\Rightarrow \triangle AFE=\triangle BAE$

$\cos 2B=2\cos^2-1$

$$\sqrt{\frac{\frac{8}{225}+1}{2}}$$

Теперь X — ~~середина~~ BC $\qquad BX=\frac{25}{2}$

~~$DX=\frac{25}{2}-8=\frac{9}{2}$~~

$$WD=AW=\frac{136}{15} \qquad WB=AB-AW=\frac{85}{3}-\frac{136}{5}=$$

$DB=17$

$$=\frac{17\cdot 5\cdot 5-136}{15}=\frac{289}{15}$$

$$DB^2=WD^2+WB^2-2WD\,WB\cos 2B$$

$$\cos 2B=\frac{WD^2+WB^2-DB^2}{2WD\,WB}=\frac{8^2\cdot 17^2+17^2\cdot 17^2-17^2\cdot 15^2}{2\cdot 15\cdot 8\cdot 17\cdot 17^2}=$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin 2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1}$

$\cos 2\alpha \quad \frac{tg^2\alpha-1}{tg^2\alpha+1}$

$2\cos^2-1 - \frac{\frac{\sin^2}{\cos^2}-1}{\frac{\sin^2}{\cos^2}+1}$

3	4	5	6	7	8
0	-2	-3	-4	-5	-6
1	0	0	0	0	0
2	2	3	4	5	6
3	6				

y x

	4	5	6	7	8	9
0	16	25	36	49		
1	4	9	16	25		
2	0	1	4	9		
3		1	0			
4						
5						

$(y-2)(y-1)$

$(3;2) \quad (2;1)$

$2\cos^2-1 = \frac{\sin^2-\cos^2}{1}$

$1-2\sin$

№2

$3\cos^2=\sin^2+1$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y\geq 0 \\ (x-2y)^2 = xy-x-2y+2 \end{cases}$$

$x \geq 2y$

$\frac{x}{2} \geq y$

$y \leq \frac{x}{2}$

$2\cos^2-1 = \cos^2-\sin^2$

$\cos^2 = 1-\sin^2$

$x^2-4x+4+9y^2-18y=16$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2$

$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0$

$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

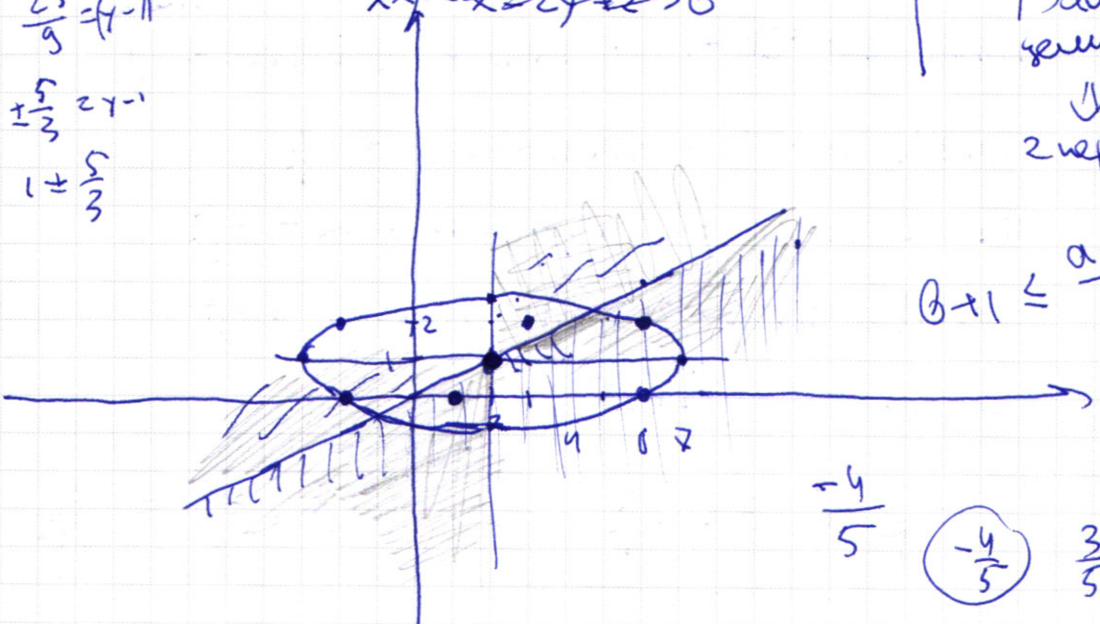
$y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha$

$\frac{25}{9}=(y-1)^2$

$\pm\frac{5}{3} = y-1$

$1\pm\frac{5}{3}$

~~$xy-x-2y+2 \geq 0$~~



А эллипс целиком в

⇓

2 пересеч.

$x \geq 2y$

$b+1 \leq \frac{a+2}{2}$

$2y \leq x$

$y \leq \frac{x}{2}$

$x-2-2(y-1)$

$x-2y-2+2$

$\frac{-4}{5} \quad \frac{-4}{5} \quad \frac{3}{5}$

$x^2+4y(y-x)$

$(x-2y)^2 = x(y-1)-2(y-1) = (x-2)(y-1)$

$x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)=$

$\{6;2\}$ - ok $\quad (1;0)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

$\cos\alpha \neq 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{\sin^2}{\cos^2}+1\right)}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{\frac{\sin^2}{\cos^2}+1}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\downarrow$

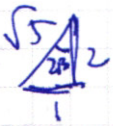
$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{5}$



$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(2\sin\alpha+1) = 0$

$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f(x)=\sum f(m)$ $m \in P$ $x \vdots m$

$f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$3 \cdot 5$

$f=0 \Rightarrow \ldots f(2)+f(3)$

$f(2)+f$

p	f
1	0
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5
29	7

$f(z)>0$

13
11
13.
13
143

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		12
			x		x		x	x	x		x

143

f растет

$x<y$

$$f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)=0$$
$$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\cdot 2\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{2}{2y}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{1}{3y}\right)=f\left(\frac{1}{2y}\right)=1+f\left(\frac{1}{5y}\right)$

y $f(\frac{1}{y})$ ...

1 0

$f\left(\frac{1}{y}\right)=0$

$y=1,2,3$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=1+f\left(\frac{1}{5y}\right)$

$y=5,7$ -1

11 -2

13 -3

x																
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

18	19	20	21	22	23	24
0	4	1	1	2	5	0

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N3

$x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$t=\log_{12}(x^2+18x)$

$5^{\log_{12}t}+t \geqslant t$

$12^{t\cdot\log_{12}13}$

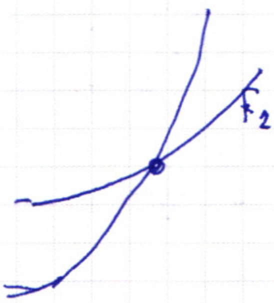
$5^t+12^t \geqslant 13^t$

$$5^t+x^2+18x \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$$5^t+12^t \geqslant (12^t)^{\log_{12}13}$$

$$5^t+12^t \geqslant 13^t$$

$\nearrow$ растет $\quad\nearrow$ растет



$=$

$25+144 \geqslant 169$

$t \leqslant 2$

$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=$
$=a^x\cdot\ln a$

$\log_{13}(5^t+12^t) \geqslant \log_{13}13^t$

$t \leqslant \log_{13}(5^t+12^t)$

$\log_{12}(x^2+18x) \leqslant 2$

$x^2+18x \leqslant 144$

$x^2+18x-144 \leqslant 0$

144
81
225

$\dfrac{-18\pm\sqrt{18^2+4\cdot144}}{2}=$

$=-9\pm\sqrt{9^2+144}$

-9 ± 15

$-24 \quad -18 \quad 0 \quad 6$

Ответ $[-24;-18)\cup(0;6]$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$$

$8x^2+30x+17$

$400-32\cdot 17$

$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \le 5 \\ -\frac{3}{4}a+b \le 1 \end{cases}$$

$-2a \le 4$

$a \ge -2$

$-a \le 2$

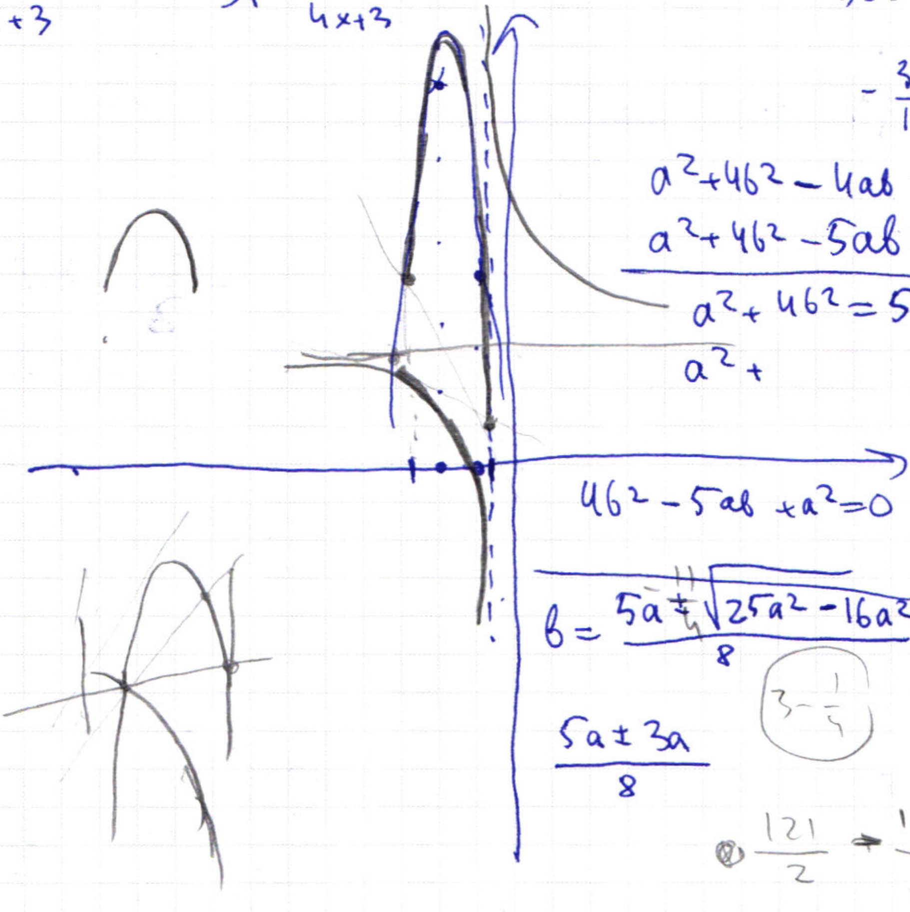
$a \ge -2$

$a^2+4b^2-4ab = ab$

$a^2+4b^2-5ab=0$

$a^2+4b^2=5ab$

a^2+



$4b^2-5ab+a^2=0$

$b = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2-16a^2}}{8}$

$\frac{5a \pm 3a}{8}$

$3-\frac{1}{4}$

$\frac{121}{2} - \frac{11\cdot 30}{4} + 17 =$

$= 60+17-80+\frac{10}{4}+\frac{1}{2}$

$-3+\frac{1}{2}+\frac{10}{4}$

$3-\frac{1}{2}-\frac{10}{4}$

$-8\cdot\frac{121}{16} + \frac{11\cdot 30}{4} - 17 =$

$= -\frac{121}{2} + \frac{11\cdot 15}{2} - \frac{34}{2} =$

$= \frac{-121+165-34}{2} = 5$

$-\frac{8\cdot 9}{16} + \frac{3\cdot 30}{4} - \frac{34}{2}$

$-\frac{9}{2} + \frac{3\cdot 15}{2} - \frac{34}{2} =$

$= \frac{45-34-9}{2} = 1$

$\frac{17}{16}\ 89$

$3\cdot 23$

$\frac{356}{2}\ 178$

15

1

32

17

224

32

544

$400-44-$

$356 =$

$=$

$2\sqrt{3\cdot 23}$

≈ 16

$\frac{-30 \pm 16}{8}$

$-8+30-17$

$-32+60-17$

-49

320

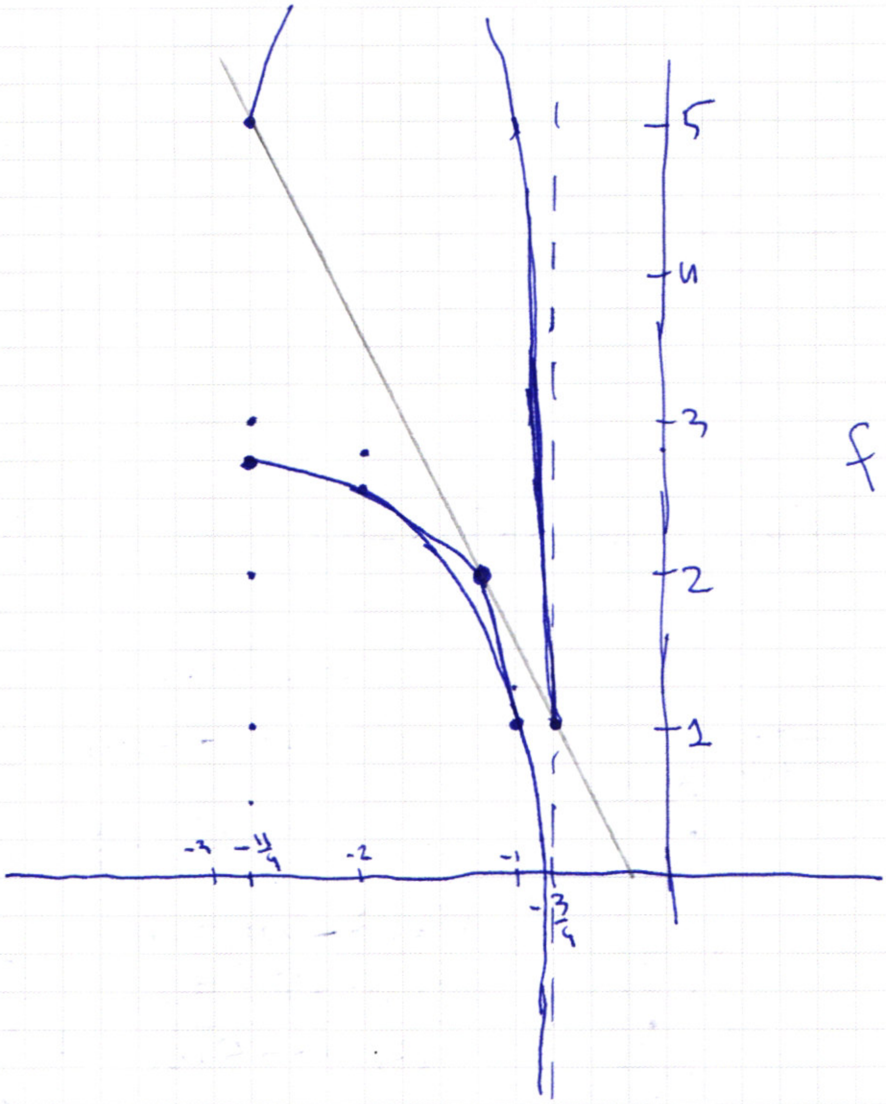
330

черновик ☑ чистовик ☐

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$f(x_0)=$

$-\frac{5}{4}$

$-\frac{25}{2}+\frac{30\cdot 5}{4}-\frac{34}{2}=$

$=\frac{-25-34+75}{2}=$

$=\frac{50-34}{2}=8$

$3+\frac{2}{4x+3}$

$3-\frac{2}{5}$

$-5+3$

$\frac{-12\cdot\frac{3}{4}+11}{-\frac{3}{4}\cdot 4+3}$

$\frac{-12\cdot\frac{11}{4}+11}{-4\cdot\frac{11}{4}+3}=\frac{-22}{-8}=$

$\frac{24\cdot 2}{8}=3-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}\cdot 2+6=1$

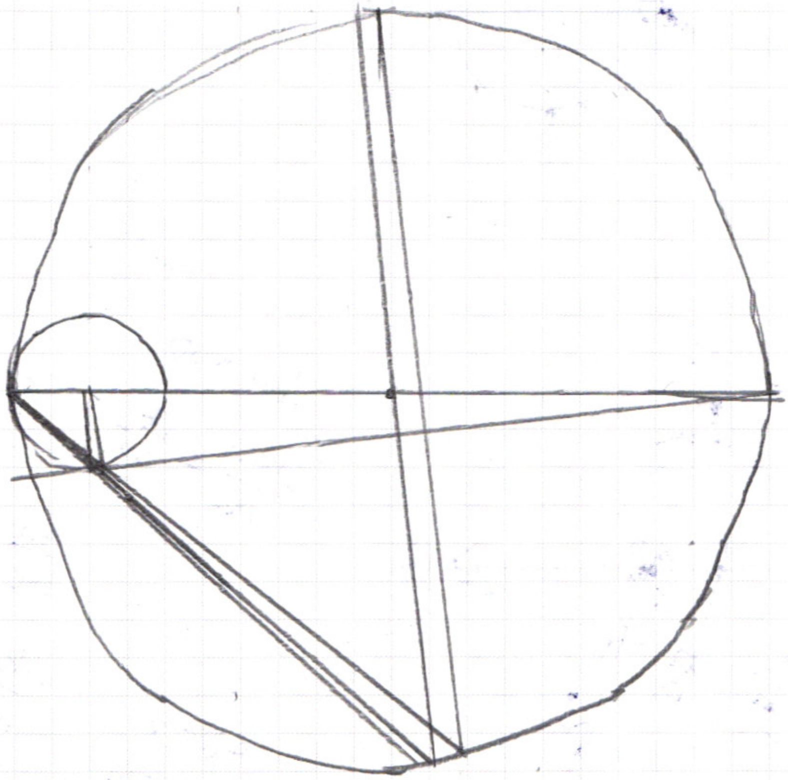
$\frac{3}{2}+6=1$ $\quad 1-1-\frac{1}{2}$

$\frac{2\,tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1}\cdot 2\pm\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha\pm(1-2\sin^2\alpha)=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$4\sin\alpha+\cos\alpha$



$$\begin{array}{r} 289 \\ -225 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 15 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ \times 136 \\ \hline 816 \\ 408 \\ 136 \\ \hline 18496 \end{array}$$

300

$$\frac{\left(\frac{136}{15}\right)^2+\left(\frac{289}{15}\right)^2-17^2}{2\cdot\frac{136\cdot 289}{15}}$$

$$\frac{233}{2\cdot 225}$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot 233}}{15}$$

$$\frac{136^2+289^2-17^2\cdot 15^2}{2\cdot 15\cdot 136\cdot 289}$$

$$\frac{8}{225}+1=2\cos^2$$

$136 \,\underline{|4} =$

$= 25+9=34$

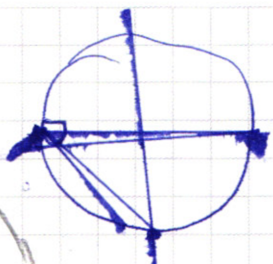
$8^2\cdot 17^2+17^2\cdot 17$

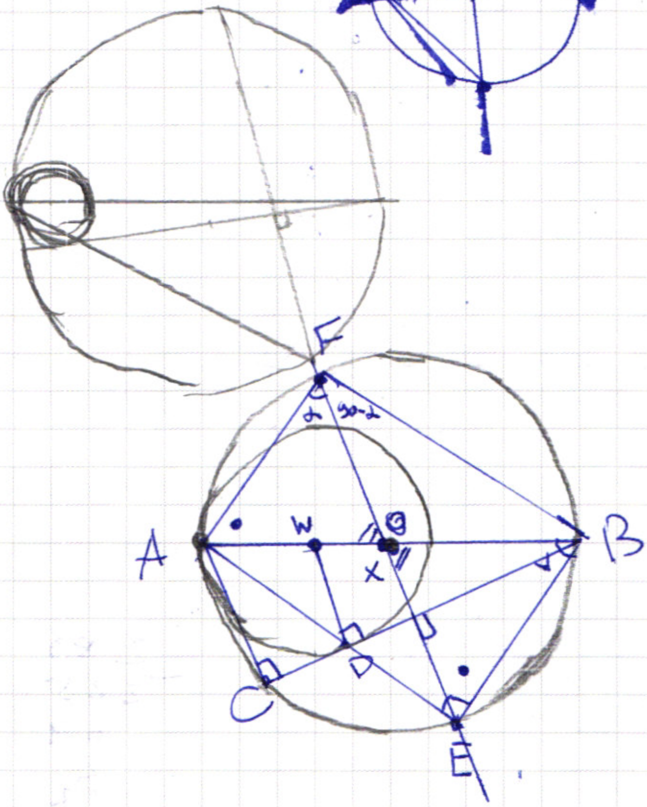
$8\cdot 17$

✓ ☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$AW = WD$

$\frac{WD}{AC} = \frac{17}{25}$

$\frac{AW}{AC} = \frac{17}{25}$

$\frac{AW}{AB} = \frac{8}{25}$

$CD = 8$

$BD = 17$

$\frac{25}{8} AW = AB$

$\frac{25}{17} AW = AC$

$CF = CB$

$BC = 25$

$\frac{AW}{AC} = \frac{\cancel{16}}{25}$

$\frac{AW}{AB} = \frac{8}{25}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{17}{8}$

2
85
8
425

425
−136
289

5
17
8
6

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

$AB = \frac{17}{8} AC$

$AC = x$

$25^2 + x^2 = \frac{17^2}{8^2} x^2$

$9 \cdot 25$

$25^2 = \left(\frac{17^2}{8^2} - \frac{8^2}{8^2}\right) x^2$

$x = \frac{46}{3}$

$\frac{17}{8} \cdot \frac{46}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3}$

$25^2 = \frac{9 \cdot 25}{8^2} x^2$

$\frac{17 \cdot 5}{\frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3}} = AO$

$5 = \frac{3}{8} x$

$AW = \frac{16}{25} \cdot \frac{17 \cdot 5}{6} =$

$25 = \frac{9}{64} x^2$