МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$.

Обозначим $x^2+18x=t$, тогда $t>0$, т.к. $\log_{12}t$ определён.

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13} = (12^{\log_{12}t})^{\log_{12}13} = 12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}t} = 13^{\log_{12}t}$.

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}$. Обозначим $\log_{12}t=V$, имеем $5^V+12^V \geq 13^V \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^V+\left(\frac{12}{13}\right)^V \geq 1$.

т.к. $\left(\frac{5}{13}\right)<1$ и $\frac{12}{13}<1$, то $f(V)=\left(\frac{5}{13}\right)^V+\left(\frac{12}{13}\right)^V$ убывает, а это означает, что при всех $V\leq V_1$, (где $f(V_1)=1$) $f(V)$ будет ≥ 1, а при всех $V>V_1$ $f(V)<1$. $V_1=2$, т.к. $5^2+12^2=13^2$ — пифагорова тройка. Значит неравенство из условия $\Leftrightarrow V\leq 2$, т.е. $\log_{12}t\leq 2$, т.е. $t\leq 12^2=144$. Возвращаясь к замене имеем $0<x^2+18x\leq 144$

$$\begin{cases} 0<x(x+18) \\ x^2+18x-144\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x(x+18) \\ (x+24)(x-6)\leq 0 \end{cases}$$ по методу интервалов получаем, что система равносильна

$x\in((-\infty;-18)\cup(0;+\infty))\cap[-24;6] \Leftrightarrow x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

№5

$f(a)=f(1\cdot a)=f(1)+f(a) \Rightarrow 0=f(1)$. ~~$f(a\cdot$~~ ~~$f(1)$~~ $0=f(1)=f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a})$.

$f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})=-f(\frac{1}{a})-f(b)=-f(\frac{b}{a}) \Rightarrow$ среди чисел $f(\frac{b}{a})$ и $f(\frac{a}{b})$ либо 1 положительное и одно отрицательное, либо оба нулевые, причём нулевые они тогда и только тогда, когда $f(a)+f(\frac{1}{b})=f(a)-f(b)=0$, т.е. когда $f(a)=f(b)$. Вычислим значения $f(i)$ где $i=\overline{1,24}$.

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=f(2)+f(2)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=f(2)+f(3)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=f(3)+f(4)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=f(2)+f(7)=1$
$f(15)=f(3)+f(5)=1$
$f(16)=f(4)+f(4)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=f(3)+f(6)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=f(4)+f(5)=1$
$f(21)=f(3)+f(7)=1$
$f(22)=f(2)+f(11)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=f(4)+f(6)=0$

Среди них 11 значений 0, 7 значений 1, 2 значения 2, 1 значение 3, 2 значения 4 и 1 значение 5. Значит ~~выбрать 2 числа из~~ ответ равен кол-ву способов выбрать 2 числа с разными значениями функции от них, т.е.

$11\cdot7+11\cdot2+11\cdot1+11\cdot2+11\cdot1+7\cdot2+7\cdot1+7\cdot2+7\cdot1+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1+2\cdot1=77+22+11+22+11+14+7+14+7+2+4+2+2+1+2=$

$=99+44+42+13=198$. Ответ: 198.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

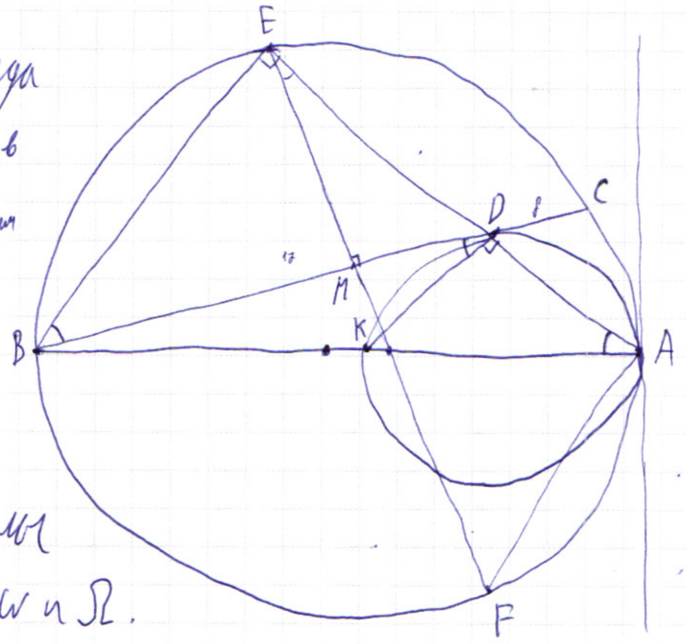
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Пусть $K = \omega \cap AB$, $M = EF \cap BC$, тогда ~~...~~ т.к. Ω и ω касаются в т. A, то у них в т. A общая касательная l и т.к. $l \perp AB$ как радиус проведённый в т. касания l к Ω, то и центр ω лежит на AB $\Rightarrow$ AK диаметр $\Rightarrow$ $\angle ADK = \angle AEB = 90^\circ$ как вписанные углы опирающиеся на диаметры ω и Ω.

Тогда $\angle KAD = \angle KDB$ т.к. угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. $\angle EDB = 180^\circ - \angle ADK - \angle KDB = 90^\circ - \angle KAD$ $\Rightarrow$ $\angle KAD = \angle EAD \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$, т.к. равны вписанные углы, $90^\circ - \angle EBD$ опирающиеся на них $\Rightarrow$ EF – сер. пер. к BC и EF проходит через центр Ω, т.е. EF – диаметр Ω. $BM = MC = \frac{17+8}{2} = 12,5$. $MD = MC - DC = 12,5 - 8 = 4,5$. т.к. $EM = \sqrt{BM \cdot MD}$ как высота в прям. треуг-ке BED, т.е. $EM = \sqrt{12,5 \cdot 4,5} = \sqrt{\frac{5^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{10^2}} = 7,5$. По степени т. M $EM \cdot MF = BM \cdot MC \Rightarrow MF = \frac{12,5 \cdot 12,5}{7,5} = \frac{62,5}{3} \Rightarrow EF = 7,5 + \frac{62,5}{3} = \frac{85}{3} = AB$, как диаметры Ω.

$BD^2 = BK \cdot BA$ по степени т. D отн ω, т.е. $BK = \frac{BD^2}{BA} = \frac{17^2}{\frac{85}{3}} = \frac{17 \cdot 3}{5} = 12,6$. $AK = BA - BK = \frac{85}{3} - 12,6$.

$\angle AFE = \angle EBA = \frac{\overset{\frown}{EA}}{2}$ ~~...~~ $\angle EBA = 90^\circ - \angle EAB = \angle EDM = \operatorname{arctg}\left(\frac{EM}{MD}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{7,5}{4,5}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$.

т.к. $\angle EAF = 90^\circ$ т.к. EF – диаметр, то $\triangle EMD \sim \triangle EAF$ по 2-м углам с коэффициентом $\frac{ED}{EF} \Rightarrow S_{AEF} = S_{EMD} \cdot \left(\frac{EF}{ED}\right)^2$.

по т. Пифагора $ED^2 = EM^2 + MD^2 = (7,5)^2 + (4,5)^2 = (1,5 \cdot 5)^2 + (1,5 \cdot 3)^2 = (1,5)^2 \cdot (25 + 9) = 2,25 \cdot 34$. $S_{\triangle EMD} = \frac{EM \cdot MD}{2} = \frac{7,5 \cdot 4,5}{2}$. Итого получаем $S_{AEF} = \frac{2,25 \cdot 3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{\frac{85}{3} \cdot \frac{85}{3}}{2,25 \cdot 34} = \frac{25 \cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}$.

Ответ: $R(\Omega) = \frac{85}{3}$, $r(\omega) = \frac{85}{3} - 12,6$, $\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$, $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

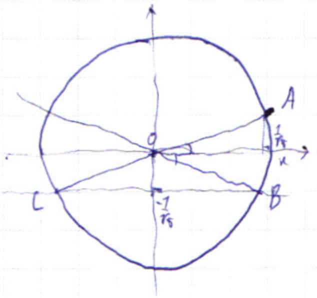
№1

$-\frac{4}{5} = \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{(2\alpha+4\beta)+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$. Отметим углы $2\alpha+2\beta$ и 2β на окружности. Т.к. $\cos^2 2\beta + \sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$,

и $\angle xOA = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$, то 2β - это одна из точек A или B, а $2\alpha+2\beta$ -

одна из точек B или C. Тогда возможны 4 случая



1) 2β - A, $2\alpha+2\beta$ - C 2) 2β - A, $2\alpha+2\beta$ - B 3) 2β - B, $2\alpha+2\beta$ - B 4) 2β - B, $2\alpha+2\beta$ - C.

Тогда 1) $2\alpha = \pi + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, но тогда $\operatorname{tg}\alpha$ не определён.

2) $2\alpha = -2\cdot\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ т.е. $\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{\sqrt5}}{\frac{2}{\sqrt5}} = -\frac{1}{2}$.

3) $2\alpha = 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha = \pi n \Rightarrow$ т.е. $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

4) $2\alpha = -2\cdot\left(\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=2\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=2\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2-13=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \\ a-2b=2\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

Чтобы упростить, мы затем вернемся к замене в самом конце.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geq 0 \\ (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geq 0 \\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geq 0 \\ (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$ Возможны 2 случая

1) $a-b=0$, тогда $b^2+9b^2=25$, т.е. $b=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, и т.к. $a-2b=-b\geq 0$, то $b=a=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, т.е. $\begin{cases} x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \\ y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases}$

2) $a-4b=0$, т.е. $(4b)^2+9b^2=25$, т.е. $25b^2=25$, т.е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \end{array}\right.$, но т.к. $a-2b\geq 0$, то 2-й случай невозможен и $a=4, b=1$, возвращаясь к замене, получаем $x=6, y=2$.

Ответ: $\{(6;2);\ (-\sqrt{\frac{5}{2}}+2;\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1)\}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$\boxed{\frac{12n+11}{4n+3} \le an+b \le -8n^2-30n+17}$

1) ~~$-8n^2-30n-17$ – парабола с ветвями~~ вниз

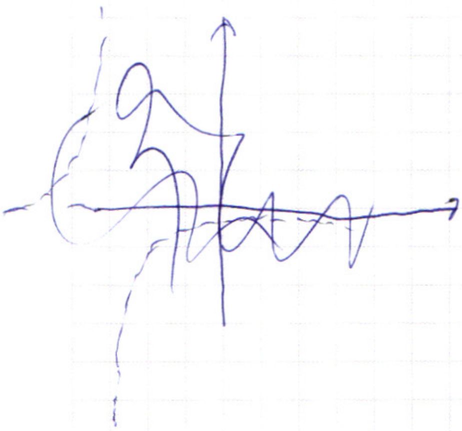
с ~~вершиной в т. $\left(\frac{-30}{2\cdot 8}; \frac{30^2+4\cdot 8\cdot 17}{-4\cdot 8}\right)$~~ $= \left(-2+\frac{1}{8};\right.$

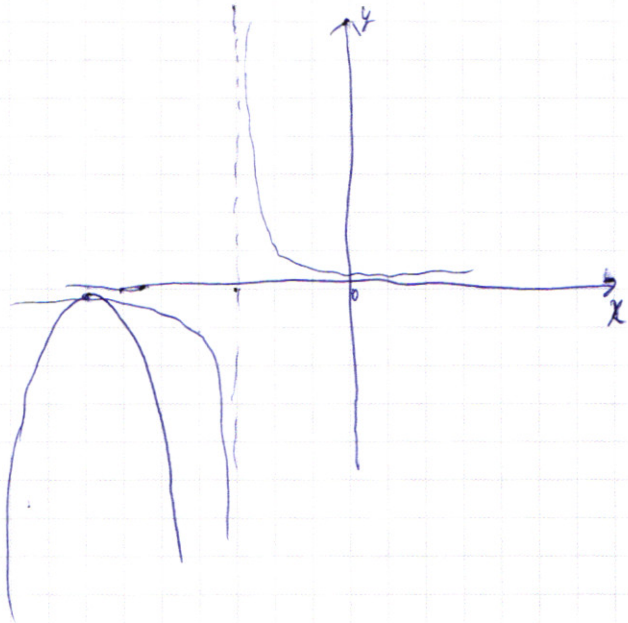
2) $\frac{12n+11}{4n+3} = 3+\frac{2}{4n+3} \le an+b \le -8n^2-30n-17$, $\exists c = b-3$, тогда $\frac{2}{4x+3} \le an+c \le -8n^2-30n-20$.

$\exists d = \frac{a}{2}$, тогда $\frac{1}{4n+3} \le dn+c \le -4n^2-15n-10$, $z = 4n$, тогда $-11 \le y < -3$ и

$\frac{1}{z+3} \le \frac{d}{4}z+c \le -\frac{z^2}{4}-\frac{15}{4}z-10$. – парабола с ветвями вниз с вершиной $\left(-\frac{15}{2}; \frac{\left(\frac{15}{4}\right)^2-10}{-16}\right)$

гипербола с асимптотами $x=-3$ и $y=0$. $\left(-\frac{15}{2}; \frac{-65}{256}\right)$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(\alpha+4\beta)+\sin\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = ?$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin 2\beta\cos 2\beta + \cos 2\beta \sin 2\beta + \sin\alpha = -\frac{4}{5}$

$0 = f(1) = f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a)+f(\frac1a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) = -f(\frac1a)$

$5^{\log_x t} + t \geq t^{\log_x 13}$ $\quad (\log_x t)^{\log_x 13} = 13^{\log_x t}$ $\quad \log_x t = v$

$f(a) = f(a\cdot 1) = f(a)+f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$5^{\log_x t} + x^{\log_x t} \geq 12$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 2 \end{cases}$$

$f(\frac{a}{b}) = f(a)+f(\frac1b) = -f(\frac1a)-f(b) = -f(\frac{b}{a})$

$5^v + x^v \geq 13^v$

$xy - x - 2y + 2 = (x-2)(y-1)$

$(\frac{5}{13})^v + (\frac{12}{13})^v \geq 1$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 - 13 = 2$

$$\begin{cases} x-2y = 2\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 5^2 \end{cases}$$

$f(\frac{a}{b}) = f(a)-f(b)$

$\frac{-18+30}{2} = 6$ $\quad \frac{-18-30}{2} = -24$

$2\ v\leq 2\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$ $\quad x^2+18x-144\leq 0$

или обращается в 0.

$x^2+18x = t \geq 0$

$\log_x t \leq 2$ $\quad f(\frac{b}{a})$ и $f(\frac{a}{b})$ равно 1 $\quad 5^{\log_x(x^2+18x)} + x^2+18x$

$0 \leq t \leq 144$

$f(1\cdot b) = f(1)+f(b)$ $\quad 0\leq 18x+x^2\leq 144$

$5^{\log_x t} + t \geq t^{\log_x 13}$ $\quad x^{\log_x t\cdot\log_x 13} = 13^{\log_x t}$

$\boxed{f(1)=0}$ $\quad f(2)=0$ $\quad f(3)=0$ $\quad x\in[-24;-18]$

$5^{\log_x t} + t \geq 13^{\log_x t}$ $\quad f(\frac{a}{b}) = 0$ $\quad f(a)+f(\frac1b) = f(a)-f(b) = 0$ $\quad 5^{\log_x t} = x^{\log_x 5\cdot\log_x t} = t^{\log_x 5}$

$5 = 12^{\log_x 5}$

$5^{\log_x t} + 12^{\log_x t} \geq 13^{\log_x t}$ $\quad \log_x t = v$

$t = 12^{\log_x t}$

$0 = f(4) = f(2)+f(2) = 0$ $\quad 5^v + x^v \geq 13^v$

$(x^{\log_x 5})^{\log_x t} = x^{\log_x 5\cdot\log_x t} = t^{\log_x 5} + t \geq t^{\log_x 13}$

$f(5) = 1$ $\quad f(\frac{a}{b}) = f(a)+f(\frac1b)$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$ $\quad f(1\cdot a) = 0+f(a)$ $\quad t\geq t^{\log_x 13} - t^{\log_x 5} = t^{\log_x 5}(t^{\log_x 13-\log_x 5}-1) =$

$f(8) =$ $\quad f(a\cdot\frac1a) = 0 = f(a)+f(\frac1a)$ $\quad f(a) = -f(\frac1a)$ $\quad = t^{\log_x 5}(t^{\log_x\frac{13}{5}}-1)$

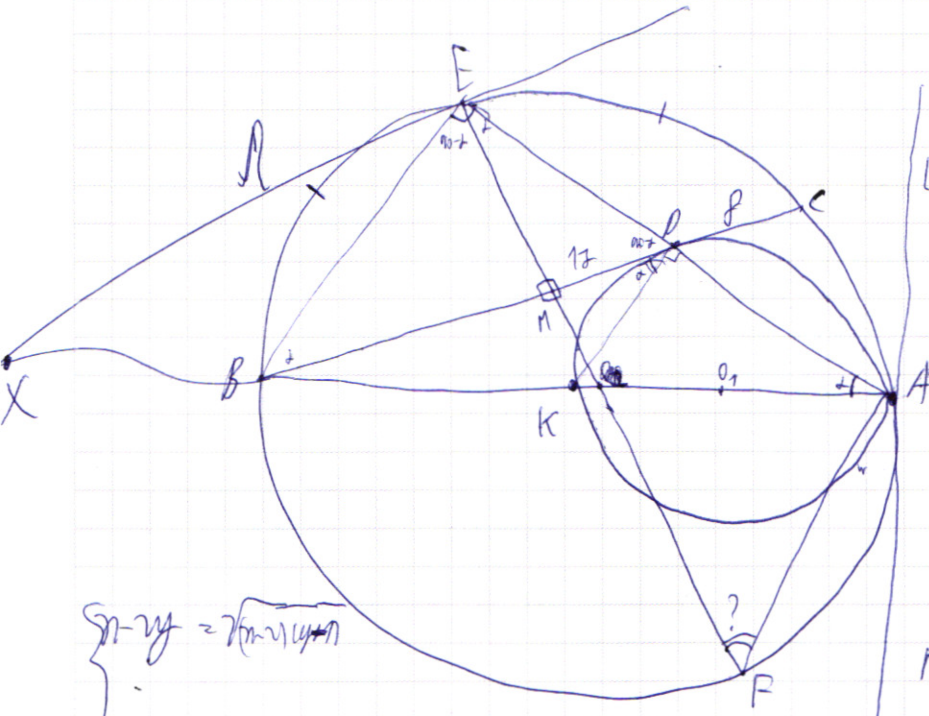
$f(\frac{a}{b}) = f(a)+f(\frac1b)$ $\quad f(\frac{b}{a}) = f(b)+f(\frac1a) = -f(\frac1b)-f(a) = -f(\frac{b}{a})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$R_1 = ?$ $CD = 8$

$R = ?$ $BD = 17$

$S_{AEF} = ?$

$\angle AFE = ? = 90 - \alpha ?$

$17^2 = BD^2 = BK \cdot BA = BK \cdot 2R$

$ED \cdot DA = 17 \cdot 8$

E - середина BC

$MB = MC = \frac{25}{2}$ $MD = 4{,}5$

$EM = 7{,}5$ $EM = \sqrt{12{,}5 \cdot 4{,}5} = \frac{65}{16}$

$MF = \frac{12{,}5 \cdot 12{,}5}{7{,}5} =$

$\sqrt{\frac{5^4 \cdot 3^2}{10^2}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 9}{10}} =$

$\sqrt{\frac{5^3 \cdot 5 \cdot 3}{10^2}} = \frac{5^2 \cdot 3}{10} = 7{,}5$

$\frac{125}{7{,}5} = \frac{5}{3} \cdot 12{,}5 =$

$\frac{625}{3}$

$\begin{cases} 5x - 2y = 2\sqrt{(x-2)(y+1)} \\ \sin(2\alpha + 2\beta) - \frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5} \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\alpha = (\pi n + 90 - \arcsin\frac{1}{\sqrt5})$

$\alpha = (\pi n + \arcsin\frac{1}{\sqrt5})$

$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi n$

$-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}$

$-\frac{11}{4} \le x < -\frac{3}{4}$ $-11 \le 4x < -3$

$243 + 55 = 198$

$2\beta = (0, B)$

$2\alpha + 2\beta = (B, C)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2 \cdot 3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2 \cdot 4) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 0$

$f(10) = f(2 \cdot 5) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(3) + f(6) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$n - 0$

$7 - 1$

$2 - 2$

$2 - 4$

$1 - 5$

$\alpha = 110$ $\angle = 90$

$\frac{24^2 - 11^2 - 7^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2 - 1^2}{2}$

$\frac{366}{16} = \frac{89}{8}$

$(7{,}5 \cdot 5)^2 + (7{,}5 \cdot 3)^2 = (7{,}5)^2$

$x^2 + 2x + 1$

$D = 0$

$(-1, 9)$

$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{D}{4a}\right)$

$\frac{1}{4+3} \le$

$-\frac{30}{7}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

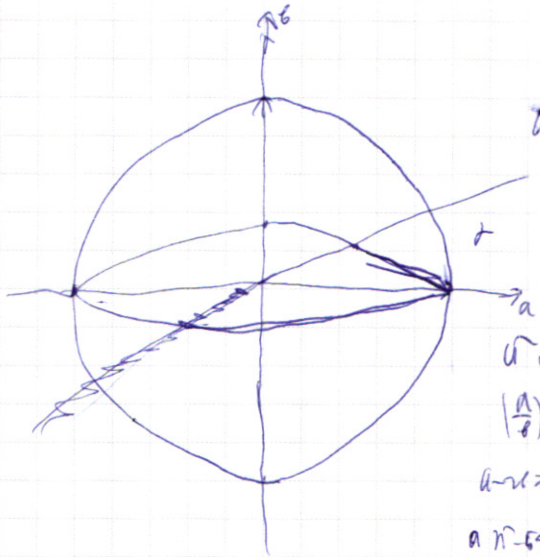
$$\begin{cases} x-2y = 2\sqrt{(x-2)(y+1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 5^2 \end{cases}$$

$x-2=a$

$y-1=b$

$$\begin{cases} \cancel{a+2b+2 = 2\sqrt{ab}} \quad a-2b = 2\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=5^2 \end{cases}$$

$a^2+b^2=5$



$a^2+4b^2-5ab=0$

$\left(\frac{a}{b}\right) \quad (a-4b)(a-b)=0$

$a-2b\geq 0$

$a\ x^2-5x+4$

$b=25$

$a-2b\geq 0 \quad a\geq 0 \quad b\geq 0$

$(a-4b)(a-b)=0$

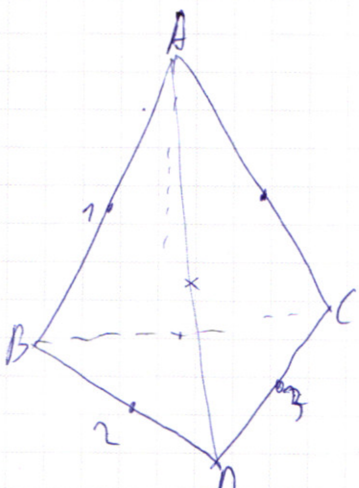
$a=b \qquad 10a^2=25$

$\cancel{a=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad b=\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$a=4b$

$8x^2+30x-17=0 \qquad 16b^2+9b^2=5^2$

$b=\pm 1 \quad b=1 \quad a=4$



$D = 900+32\cdot 17 = 900+544 = 1444$

$544 \cdot 1444 \quad \frac{1444}{4} = 361 = 38^2$

$x = \frac{30\pm 38}{-16}$

$\frac{1}{2}; \ -\frac{68}{16} = -4\frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)