МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

H – точка пересечения BC и FE. Тогда $BH = CH = \frac{13+12}{2} = \frac{25}{2}$

~~Пусть~~ AD – биссектриса, значит $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{12}$. Пусть $AB = 13x$, $AC = 12x$. В $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$169x^2 = 144x^2 + 25^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$.

т.е. $AB = 65$, $R = \frac{1}{2}AB = \frac{65}{2}$. Пусть X – точка пересечения AB и ω. $BX \cdot AB = BD^2$ по св-ву секущей и касательной. $(2R - 2r)\cdot 2R = BD^2$. $(AX = 2r)$.

$4R(R-r) = 13^2 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{65}{2}\cdot\left(\frac{65}{2} - r\right) = 13^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} - \frac{r}{13}\right) = 1 \Leftrightarrow 25 - \frac{10}{13}r = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10r = 24\cdot 13 \Leftrightarrow r = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

$\angle AFE = \angle ABE = 90° - \angle BAE$ (опираются на $\overset{\frown}{AE}$)

~~$HE\cdot FH = BH\cdot HC = \frac{65^2}{4} = HE(2R - HE) = HE(65 - HE)$. т.е. $65HE - HE^2 = \frac{65^2}{4} \Leftrightarrow 4HE^2 - 260HE + 65^2 = 0$~~ . Но $90° - \angle BAE = 90° - \angle DAC = \angle ADC$. $AC = 12x = 60$, $\operatorname{tg}\angle ADC = \frac{AC}{CD} = \frac{60}{12} = 5$, $\angle ADC = \operatorname{arctg} 5 = \angle AFE$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AF\cdot AE$. $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$, т.е. $AE = 5AF$, т.е. $S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot 5AF^2$.

$AF^2 + AE^2 = (2R)^2 = 65^2 = 26AF^2 \Leftrightarrow 65\cdot 5 = 2AF^2 \Leftrightarrow$

$2AF^2 = 5^2\cdot 13 \Leftrightarrow AF = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AF^2\cdot 5 = \frac{125\cdot 26}{2\cdot 4} = \frac{125\cdot 13}{2\cdot 2} = \frac{125\cdot 13}{4}$

Ответ. $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$;

$S_{AEF} = \frac{125 \cdot 13}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть $2\alpha+2\beta=x$, $2\beta=y$. $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y=\frac{-2}{17}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x\cos y=-\frac{1}{17}$. т.е. $\frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\cos y=-\frac{1}{17}$,

т.е. $\cos y=\frac{1}{\sqrt{17}}$. $\cancel{1+\operatorname{tg}^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}}$, ~~т.м.с.~~

$\cancel{\operatorname{tg}^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=}$

$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, т.е. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1=$

$=16$, т.е. $\operatorname{tg} x=\pm\frac{1}{4}$, $x=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$1+\operatorname{tg}^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$, т.е. $\operatorname{tg}^2 y=17-1=16$,

$\operatorname{tg} y=\pm 4$, $y=\pm\operatorname{arctg}4+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\pm\operatorname{arctg}4}{2}\right)=$

$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pm\operatorname{arcctg}4\pm\operatorname{arctg}4}{2}\right)$.

$\operatorname{arctg}4+\operatorname{arcctg}4=\frac{\pi}{2}$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ или

$\operatorname{tg}-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}4-\operatorname{arcctg}4}{2}\right)$ или

$\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arcctg}4-\operatorname{arctg}4}{2}\right)$. Если пусть $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}4-\operatorname{arcctg}4}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{2\operatorname{arctg}4-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}4-\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}4)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}4)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{4-\frac{1}{2}}{1+4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{7}{2}}{3}=\frac{7}{6}$

Если $tg\alpha = tg\left(\frac{arcctg4 - arcctg4}{2}\right)$, то $tg\alpha = -tg\left(\frac{arcctg4 - arcctg4}{2}\right) = -\frac{7}{6}$

Ответ. $tg\alpha = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{7}{6}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(\frac{x}{y}\cdot y) = f(x)$, т.е. $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(\frac{x}{y}) < 0 \iff f(x) < f(y)$

Выпишем для всех $n \in \mathbb{N}$, $4 \le n \le 28$, все $f(n)$: $f(4) = 2f(2) = 0$, т.к. 2 – простое. $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$, $f(6) = f(2) + f(3) = 0$, т.к. 2 и 3 – простые; $f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$, $f(8) = f(2) + f(4) = 0$, $f(9) = f(3) + f(3) = 0$, $f(10) = f(2) + f(5) = 1$, $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$, $f(12) = f(4) + f(3) = 0$, $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(3) + f(5) = 1$; $f(16) = f(4) + f(4) = 0$, $f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(18) = f(9) + f(2) = 0$; $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$; $f(20) = f(4) + f(5) = 1$, $f(21) = f(3) + f(7) = 1$, $f(22) = f(2) + f(11) = 2$, $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$, $f(24) = f(8) + f(3) = 0$, $f(25) = 2f(5) = 2$, $f(26) = f(2) + f(13) = 3$; $f(27) = f(3) + f(9) = 0$, $f(28) = f(7) + f(4) = 1$.

Пусть $f(x) = 0$. Таких x всего 9 (из этого промежутка). Тогда $f(y) = 1$ (всего таких y 8) или $f(y) = 2$ (таких y 3) или $f(y) = 3$ (таких y 2) или $f(y) = 4$ (таких y 2) или $f(y) = 5$ (такой y 1). Всего $9 \cdot (25 - 9) = 9 \cdot 16 = 144$ таких вариантов. Если $f(x) = 1$ (8 вариантов) то $f(x) = 2$ или 3 или 4 или 5. Всего $8 \cdot (25 - 9 - 8) = 64$ варианта. Если $f(x) = 2$, то $f(y) = 3$ или 4 или 5, т.е. всего $3 \cdot (25 - 9 - 8 - 3) =$

$= 15$ вариантов. Если $f(x)=3$, то $f(y)=4$ или 5, всего $2\cdot(2+1)=6$ вариантов. Если $f(x)=4$, то $f(y)=5$, таких варианта 2. $f(x)\neq 5$, т.к. ~~только край одном~~ тогда $f(x)-f(y)\geq 0$. Всего $144+64+15+6+2=$
$= 231$ вариант.

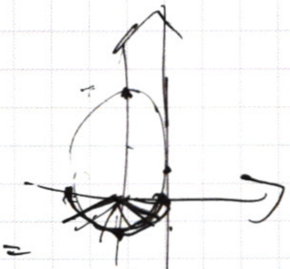
Ответ. 231

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x-y) =$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \left(\frac{x-y}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$



tg

$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$

$\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arcctg}\alpha =$

$= \frac{\pi}{2} \operatorname{arcctg}\alpha$

$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$x \in (\pi; 2\pi)$

$\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{BD}{DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{DE} =$

$\frac{BD}{DC} =$

$t^{\log_5 12} \geq t(1 + t^{\log_5 13 - 1})$

$\log_5 12 \geq \log_t(t^{\log_5 13 - 1} + 1) + 1$

$180 - \alpha -$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$b = \frac{13a \pm \sqrt{169a^2 - 4 \cdot 36 a^2}}{2} = \frac{13a \pm \sqrt{25a^2}}{2} = \frac{13a \pm 5a}{2}$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

$x^2 - 26x = t$ $\quad tg(x-y) =$ $\quad 2\beta = y$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$-2a = \sqrt{ab}$

$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$26x - x^2 \leq 0$ $\quad 9a^2 + 16a^2 = 90$

$a^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$ $\quad a =$

$x^2 \geq 26x$

$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx\,tgy} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

$CH_4 +$ $\quad b = -2a$ $\quad -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$x \cdot \log_5 12 = \log_5 13$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$x = \frac{\log_5 13}{\log_5 12}$

$|t|^{\log_5 12} \geq t$ $\quad x^2 \geq 26x$

$t \geq 0$

$t^{\log_5 12} \geq t + t^{\log_5 13}$ $\quad x^2 - 26x$

$t > 0$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \geq t$

$t^{\log_5 12}\left(1 - \frac{\log_5 13}{\log_5 12}\right) \geq t$ $\quad$ Пусть $t \geq 1$

$t^{\log_5 12}$ $\quad$ Пусть $t < 1$

$\log_5 12 (\quad t$

Тогда

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x = -\sin^2 x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=$

$36a^2 = 360-4b^2 \quad -3b^2-13ab+360=0$

$xy-y= y(x-1) \quad -6(x-1)=$

$9a^2+\frac{9a^2\pm5a^2\pm6a^2\sqrt5}{4}$ $= y(x-1)-6(x-1)=(x-1)(y-6)$

$9(x^2-2x+1)+(y^2-12y+36)=90$

$-27a^2$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$y-6 \quad -6(x-1)$

$b^2+36a^2-12ab=ab$

$b^2+36a^2-13ab=0$

$9a^2+b^2=90$

$b-a=\sqrt{ab}$, $b-a\geq0$

$8a^2+3a\cdot\left(\frac{3a\pm a\sqrt5}{2}\right)=90$

$b^2+a^2-2ab=ab$

$8a^2+3a^2\left(\frac{3\pm\sqrt5}{2}\right)=90$

$b^2+a^2=3ab$

$a^2\left(8+3\cdot\frac{(3\pm\sqrt5)}{2}\right)=90$

$8a^2+3ab=90$

$a^2-3ab+b^2=0$

$a^2\left(\frac{16+9\pm3\sqrt5}{2}\right)=90$

$a=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-4b^2}}{2}=$

$tg(\alpha+\alpha)=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$a^2(25\pm3\sqrt5)=180$

$=\frac{3b\pm b\sqrt5}{2}$

$a^2=\frac{180}{25\pm3\sqrt5}$

$b=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-4a^2}}{2}$

$AD\cdot DE=12\cdot13$

$(2R-2r)\cdot2R=13^2$

$2\cdot3a\cdot a\sqrt5=6a^2\sqrt5$

$\frac{BD}{DC}=\frac{AD}{DE}$ DE

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{DE}$

$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x+y)+\sin(x-y)=\frac{-2}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(5) = 1$; $f(7) = 1$

$\frac{4}{20}; \frac{5}{25}; \frac{4}{28}$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $f(11) = 2$ $f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$\frac{2}{k}$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ $f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(4) = 2f(2)$

$f\left(\frac{2}{5}\right) + f(5) = 0$

$\cos y = -\sin x$ $\frac{\sin x}{\cos y} = -1$

$f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{2}{5}\right)$ 4 5 6 ... 28

$\frac{4}{20}; \frac{10}{25}$

$\frac{4}{10}; \frac{6}{15}; f(5), f(7) \ldots, f$ $f\left(\frac{7}{2}\right) = f(7) + f($

$= f(4$

$f\left(\frac{7}{y}\right) < 0$ $f(1) = 2f(1)$ $f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f(1) = 0$

$= f(2)$

$\frac{1}{y} =$ $f\left(\frac{1}{5}\right) + f(5) = 0$ $f(2) = 0$

$= 0$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) =$

$f(3) = 0$

$x : y$ $f(9) = 0$

$= \sin x \cos y +$ $f(4) = 0$ $f(10) = 1$

$+ \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin x \cos y =$

$= 2 \sin x \cos y$ $f(5) = 1$ $f(11) = 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $f(6) = 0$ $f(12) = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3) = f(1)$ $f(13) = 3$

$= 0$ $f(7) = 1$ $f(14) = 1$

$f(8) = f(6) = 0$ $f(15$

$\operatorname{tg} \alpha =$ $f\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \ldots f\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ $\frac{4}{28}$ 2

$=$

$f\left(\frac{1}{7}\right) = -1$; f

$f\left(\frac{2}{k}\right) + f(k) = f(2) = 0$ $f\left(\frac{2}{k}\right) = -f(k)$

$2 \sin x \cos y = -\frac{2}{77}$ $\sin x \cos y = -\frac{1}{77}$ $= -\sin^2 x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4}{20}$; $\frac{5}{25}$; $\frac{4}{28}$

$k = 5, 7, 10, 11$

$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \ldots \frac{15}{25}$

$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} ; \ldots \frac{12}{28}$

$\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$

$\frac{3}{11} = \frac{6}{22}$

$\frac{3}{13} = \frac{6}{26}$

$\frac{3}{14} = \frac{6}{28}$

$f\left(\frac{2}{k}\right) + f(k) = 0$

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} ; \ldots ; \frac{10}{25}$

$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} ; \frac{8}{28}$

$\frac{2}{11} = \frac{4}{22}$

$\left(\frac{3}{k}\right) + f(k) = 0$

$\frac{260 \pm \sqrt{260^2 - 865}}{8} =$

$4 \cdot \frac{5}{2} = 10$

26

$10 \cdot \left(\frac{65}{2} - r\right) = 13$

$325 - 13 = 105$

$312 = 105$

$\frac{156}{5}$

$26 + r^2 = \frac{26^2 \cdot 25}{4} = 13^2 \cdot 25$

целое   целое

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

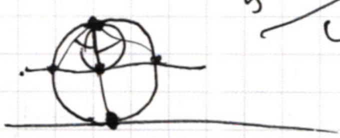
$f(x) \geq f(y)$

$\frac{25 \cdot 26}{4}$

$\frac{5 \cdot 25 \cdot 26}{4} =$

4

$150 + 64 = 214$ 216   231



$1 + 2 + 2 + 3 + 8 + 10 = 21 + 5 = 26$

$4R(R - r) = 13^2$

$\frac{AB}{AC} = \frac{13}{12} =$

$= 25 \cdot 26$

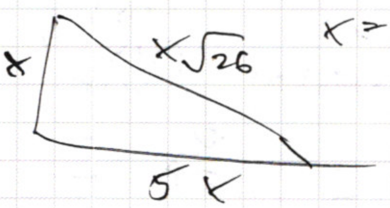
$\frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$

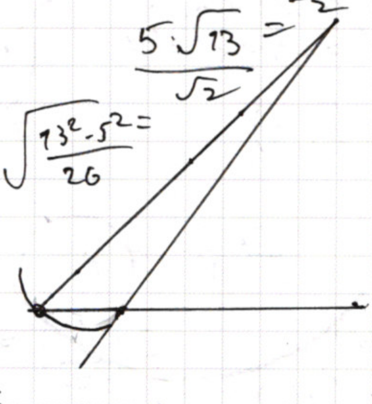
$x\sqrt{26} = 65$

$x = \frac{65}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 5^2}{26}} =$

$AB = 13x$

$AC = 12x$





$169x^2 = 144x^2 + 25^2$

$25x^2 = 25^2$

$x = 5$

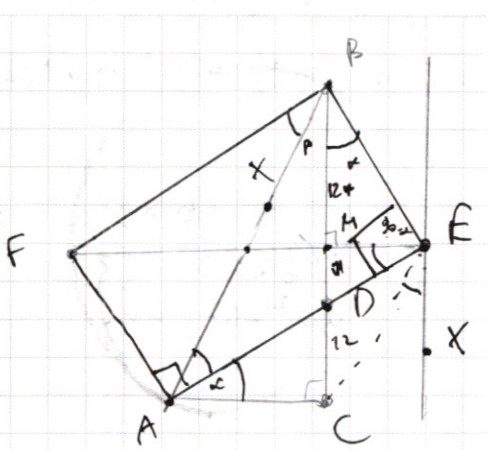
$\frac{5x^2}{2} = \frac{125 \cdot 26}{8}$

☐ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



~~им~~ Докажем, что AD — биссектриса $\angle BAC$ (так называемая лемма Архимеда). Рассмотрим гомотетию в точке A, переводящую малую окружность в большую. Тогда D перейдет в E, BC перейдет в прямую, параллельную BC, проходящую через E. BC касается ω, значит образ BC касается образа ω, т.е. BC переходит в касательную к Ω, проходящую через E, причем параллельную BC. То есть $\angle CBE = \angle CEX$ (по св-ву секущей и касательной) и $\angle BCE = \angle CEX$ как накрест лежащие, значит, $\breve{BE} = \breve{CE}$, т.к. $\angle CBE = \angle BCE$, т.е. $\angle BAE = \angle EAC$. Перейдем к решению задачи. $\angle BAE = \angle EAC = \angle CBE$ по св-ву углов, опирающихся на одну хорду. Тогда $\angle CBA = 90 - 2\angle CAE$, $\angle FBA = \angle FEA$ (опираются на $\breve{FA}$) $= \angle EAC$ как накрест лежащие ($FE \parallel AC$, т.к. $AC \perp BC$ (AC — диаметр) и $FE \perp BC$ по условию). $\angle FBE = \angle FBA + \angle ABC + \angle CBE = \angle CAE + 90 - 2\angle CAE + \angle CAE = 90^\circ$, т.е. FE — диаметр Ω, она делит пополам BC, т.к. $FE \perp BC$. Пусть

2. $\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

Пусть $y-6=b$, $x-1=a$.

Тогда: $y-6x = b-6a = \sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{(x-1)(y-6)} = \sqrt{ab}$;

$9x^2+y^2-18x-12y=45 \Leftrightarrow (9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=$

$=90 \Leftrightarrow 9a^2+b^2=90$

То есть: $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \quad (1) \\ b-6a\geq 0 \quad (2) \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} 90-5a^2-13ab+36a^2=0 \\ b-6a\geq 0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}}$

Решим (1) как кв. ур-е относительно b:

$b = \dfrac{13a \pm \sqrt{13^2a^2-4\cdot 36a^2}}{2} = \dfrac{13a \pm 5a}{2}$

То есть $b=9a$ или $b=4a$. ~~Если $b=4a$, то $b-6a\leq 0$, то есть, чтобы выполнялось (2), в этом случае $a=0=b$. Но тогда $9a^2+b^2=0\neq 90$.~~

Если $b=9a$: ~~То есть $b=9a$~~ $\Rightarrow 9a^2+b^2 = 9a^2+81a^2=90a^2=90$.

То есть $a=\pm 1$. Если $a=1$, то $b=9$. Если $a=-1$, то $b=-9$. Проверкой легко убедиться, что $a=1$, $b=9$ — решение, а $a=-1$; $b=-9$ — нет, т.к. тогда $b-6a<0$.

Если $b=4a$, то $b-6a=-2a=\sqrt{ab}$, т.е. $a\leq 0$. Если $a=0$, то $b=-2a=0$, и $9a^2+b^2\neq 90$. Если $a<0$, то $b=-2a>0$, но тогда $ab<0$, т.е. подкоренное выражение (ab) меньше 0. То есть $a=1$; $b=9 \Rightarrow x=2$, $y=15$

Ответ. $x=2$; $y=15$