МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & \text{①} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & \text{②} \end{cases}$$

②: $\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}1}{5}$ (сумма sin)

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

① $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$t = tg\,\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

①: $\frac{2t}{1+t^2}\cos 2\beta + \frac{1-t^2}{1+t^2}\sin 2\beta = -\frac{2}{5}$

$1+t^2 > 0$

$2t\cos 2\beta + (1-t^2)\sin 2\beta = -\frac{2}{5}(1+t^2)$

a) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{2t}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}(1-t^2) = -\frac{2}{5}(1+t^2) \Big| : \frac{2}{\sqrt5}$

$t + 1 - t^2 = -\frac{1}{\sqrt5} - \frac{t^2}{\sqrt5}$

$t^2\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right) - t - \left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right) = 0$

$D = 1 + 4\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right) = 1 + 4\left(1-\frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \frac{21}{5}}{2\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)} = \left[\begin{array}{l} \frac{\frac{26}{5}}{2\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)} = \frac{13}{5\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)} = \frac{13}{5-\sqrt5} \\ -\frac{\frac{16}{5}}{2\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)} = -\frac{8}{5\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)} = -\frac{8}{5-\sqrt5} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) д) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{2t}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}(1-t^2) = -\frac{2}{5}(1+t^2) \Big| : \frac{2}{\sqrt{5}}$

$t - 1 + t^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{t^2}{\sqrt{5}}$

$t^2(1+\frac{1}{\sqrt{5}}) - t - (1-\frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$

$D = 1 + 4(1+\frac{1}{\sqrt{5}})(1-\frac{1}{\sqrt{5}}) = 1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \frac{21}{5}}{2(1+\frac{1}{\sqrt{5}})} = \left[\begin{array}{l} \frac{13}{5+\sqrt{5}} \\ -\frac{8}{5+\sqrt{5}} \end{array}\right.$

Ответ:

$tg\alpha = \left[\begin{array}{ll} \frac{13}{5-\sqrt{5}} & \frac{13}{5+\sqrt{5}} \\ -\frac{8}{5-\sqrt{5}} & -\frac{8}{5+\sqrt{5}} \end{array}\right.$

Задание 2

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & (2) \end{cases}$

(2): $x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 45 + 36 + 9$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

(1): $x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - (x-6)}$

$(x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$a = x - 6 \quad b = 2y - 1$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} & (3) \\ a^2 + 9b^2 = 90 & (4) \end{cases}$

$a > 6b$

$(3)^2$: $a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $b=0$

$\cancel{36b^2}=0 \quad a=0 \quad a^2+9b^2=0+0=0\neq 90$ ∅

б) $b\neq 0$

$a^2-13ab+36b^2=0 \,|:b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+36=0 \qquad t=\frac{a}{b}$

$t^2-13t+36=0$

$t_1+t_2=13$ по т. Виета $\Rightarrow$ $t_1=4 \quad \frac{a}{b}=4\Rightarrow a=4b$

$t_1t_2=36 \qquad t_2=9 \quad \frac{a}{b}=9\Rightarrow a=9b$

I) $a=4b \quad a>6b$

$4b>6b \quad -2b>0\Rightarrow \underline{b<0}$

$16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90 \quad b=-\sqrt{\frac{90}{25}}=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad (b<0) \quad a=\frac{-12\sqrt{10}}{5}$

II) $a=9b \quad a>6b$

$9b>6b \quad 3b>0 \Rightarrow \underline{b>0}$

$81b^2+9b^2=90$

$90b^2=90 \Rightarrow b=1 \; (b>0) \quad a=9$

Ответ: $(a;b)=\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{12\sqrt{10}}{5};-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)\\(9;1)\end{array}\right.$

<u>Задание 3</u>

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;10)$

$10x-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$t = 10x - x^2, \quad t > 0$

$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}, \quad t > 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 3^{\log_3 5 \cdot \log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \quad |:t, \quad t > 0$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} \geq t^{\log_3 5 - 1}$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$1 + 3^{\log_3 \frac{4}{3} \log_3 t} \geq 3^{\log_3 \frac{5}{3} \log_3 t}$

$\log_3 t = p$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^p \geq \left(\frac{5}{3}\right)^p$

$\left(\frac{5}{3}\right)^p - \left(\frac{4}{3}\right)^p \geq 1$

$f(p) = \left(\frac{5}{3}\right)^p \uparrow$ $\qquad$ $f(p)$ на бесконечности возрастает быстрее

$g(p) = \left(\frac{4}{3}\right)^p \uparrow$ $\qquad$ $g(p) \Rightarrow \exists!\, p: f(p) - g(p) = 1$

$p = 2 \quad \frac{25 - 16}{9} = \frac{9}{9} = 1$

$\left(\frac{5}{3}\right)^p - \left(\frac{4}{3}\right)^p \geq 1 \Rightarrow p \geq 2 \Rightarrow \log_3 t \geq 2 \Rightarrow t \geq 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x - x^2 \geq 9$

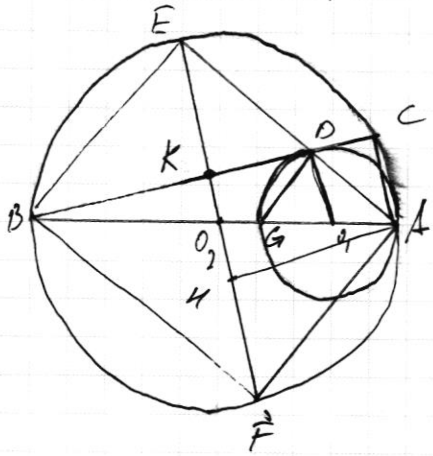
$x^2 - 10x + 9 \leq 0$

$x_1 + x_2 = 10$ $\quad$ по т. Виета $\quad$ $x_1 = 1$

$x_1 x_2 = 9$ $\qquad\qquad\qquad\quad$ $x_2 = 9$ $\quad \Rightarrow \quad x \in [1; 9]$

Ответ: $x \in [1; 9]$

Задание 4



$\frac{BO_1}{AB} =$ $\quad$ $O_1D \perp BC$ $(BC$ - кас.$)$

$\angle ACB = 90^\circ$ $(AB$ - диаметр$)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \parallel O_1D \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BC} =$

$= \frac{BD}{BD + CD} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}} = \frac{17}{32}$

$\frac{AO_1}{AB} = 1 - \frac{BO_1}{AB} = \frac{15}{32} = \frac{AO_1}{2AO_2} = \frac{r}{2R}$

$\frac{r}{R} = \frac{15}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle GO_1D = 2\alpha \Rightarrow \angle GAD = \alpha$

$DO_1 \parallel AC \Rightarrow \angle GO_1D = \angle O_1AC = 2\alpha \Rightarrow \angle CAD = \angle O_1AC - \angle GAD = 2\alpha - \alpha = \alpha$

$\angle ACD = \angle ACB = 90° \Rightarrow \angle CDA = 90° - \alpha \Rightarrow \angle EDK = 90° - \alpha$ (верт. углы)

$\left.\begin{array}{l} EF \perp BC \\ O_1D \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel O_1D \Rightarrow \angle ADO_1 = \angle DEK$ (соотв.) $\Rightarrow \angle O_1AD = \angle DEK$ ($\triangle DO_1A$ - равнобед.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEK = \alpha \Rightarrow \angle ABF = \alpha$

~~$\angle EDK = 90$~~

$\left.\begin{array}{l} \angle BEA = 90° \text{ (AB - диаметр)} \\ \angle EAB = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABE = 90° - \alpha \Rightarrow \angle EBF = \cancel{\alpha} + 90° - \cancel{\alpha} = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр $\Rightarrow BK = CK = \dfrac{\frac{15}{2} + \frac{17}{2}}{2} = \dfrac{32}{4} = 8$

$\left.\begin{array}{l} \angle EDK = \angle CDA \text{ (верт.)} \\ \angle EKD = \angle ACD = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle EDK \sim \triangle CDA \Rightarrow \dfrac{AC}{EK} = \dfrac{CD}{KD} = \dfrac{CD}{BK - CD} =$

$= \dfrac{\frac{15}{2}}{8 - \frac{15}{2}} = \dfrac{\frac{15}{2}}{\frac{1}{2}} = 15 \Rightarrow EK = \dfrac{AC}{15}$

Пусть $AC = x$

$EK = \dfrac{x}{15}$ $KO_2 = \dfrac{x}{2}$ (по т. Фалеса) $\Rightarrow EO_2 = R = \dfrac{x}{15} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{17x}{30}$

$AB = 2R = \dfrac{17x}{15}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ $\quad \dfrac{17x^2}{15^2} = x^2 + BC^2$

$x^2\left(\left(\dfrac{17}{15}\right)^2 - 1\right) = BC^2$ $\quad \cancel{x^2\left(\frac{2}{15}\right.}$ $x^2 \cdot \dfrac{2}{15} \cdot \dfrac{32}{15} = BC^2$ $\quad x^2 \cdot \dfrac{8^2}{15^2} = BC^2$

$x = \dfrac{15}{8} BC = \dfrac{15 \cdot 16}{\cancel{8}} = 30$ $\quad R = \dfrac{17x}{30} = 17$ $\quad r = \dfrac{15}{16} R = \dfrac{15 \cdot 17}{16}$

$\angle CAB = 2\alpha \Rightarrow \angle CBA = 90° - 2\alpha$ $\quad \sin\angle CBA = \dfrac{x}{\frac{17x}{15}} = \dfrac{15}{17} = \sin(90° - 2\alpha) = \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{15}{17}$ $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{1}{17} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\angle EFA = 90° - \alpha$ $\quad \cos\angle EFA = \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle EFA = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$AH \perp EF \Rightarrow AH \parallel KD$ BK

$\frac{AH}{KD}$? $\angle AO_2H = \angle KO_2B$ (верт.) $\angle BKO_2 = \angle AHO_2$ (накр.) $BO_2 = AO_2$ $\Bigg\} \Rightarrow \triangle BKO_2 = \triangle AHO_2 \Rightarrow BK = AH = 8$

$$S_{AFE} = \frac{EF \cdot AH}{2} = \frac{2R \cdot AH}{2} = R \cdot AH = 7 \cdot 8 = 56$$

Ответ: $R_\Omega = 17$ $\angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{17}}$

$r_\omega = \frac{15 \cdot 17}{16}$ $S_{AEF} = 56$

Задание 5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) = f(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(1) = 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p - простое

$$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$f(a^\alpha) = f(a) + f(a^{\alpha-1}) = \alpha f(a)$$

$$f(a) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \alpha_k\left[\frac{p_k}{4}\right]$$

$$f(x/y) = f(x) - f(y)$$

$p \in \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$

$f(2) = f(3) = 0$ $f(17) = f(19) = 4$

$f(5) = f(7) = 1$ $f(23) = 5$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 0: & 10\ 3 \\ 1: & 7\ 13 \\ 2: & 2\ 13 \\ 3: & 1\ 13 \\ 4: & 1\ 11 \\ 5: & 1\ 13 \end{cases}$$

$f(x) < f(y)$

$$f(x) = 0: \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2^1 & 2^1 \cdot 3 & 3 \\ 2^2 & 2^2 \cdot 3 & 3^2 \\ 2^3 & 2^3 \cdot 3 & \cancel{1} \\ 2^4 & 2 \cdot 3^2 & \end{bmatrix}$$

Всего: $10 \cdot 12 + 7 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 + 1 =$

$= \cancel{132}\ 120 + 35 + 6 + 3 =$

$= \cancel{167}\ 155 + 9 = \cancel{176}\ 164$

$$f(x) = 1: \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 5 & 2 \cdot 5 & 3 \cdot 5 & 2^2 \cdot 5 \\ 7 & 2 \cdot 7 & 3 \cdot 7 & \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 2: \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \cdot 11 \end{bmatrix}$$

$2 \cdot 13 > 25$

Ответ: 164

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36-3$

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

$f'(x) = -60 \frac{x - \frac{69}{60}}{(4x-5)}$ $\quad \frac{69}{60} > 1 \Rightarrow \forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $f(x) \uparrow$

$f_{max} = f(1) = 0$

$g(x) = -32x^2+36-3$

$g'(x) = -64x+36$ $\quad x_{вер} = \frac{36}{64} \in [\frac{1}{4}; 1]$

$g(x) \nearrow$ на $[\frac{1}{4}; \frac{36}{64}]$ $\quad g_{max} = \max\{g(1); g(\frac{1}{4})\} = 1$

$g(x) \searrow$ на $[\frac{36}{64}; 1]$

$0 \le ax+b \le 1$

I) $a=0 \Rightarrow b \in [0; 1]$

II) $a>0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{4}+b \ge 0 \\ \cancel{\frac{a}{4}}+a+b \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{4}+b \ge 0 \\ -a-b \ge -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{4}a \ge -1$

$a \in [0; \frac{4}{3}]$ $\quad b \in [-\frac{a}{4}; 1-a]$

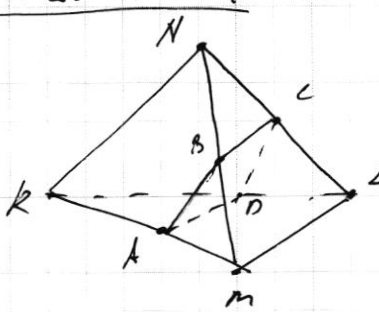
III) $a<0 \Rightarrow \begin{cases} a+b \ge 0 \\ \frac{a}{4}+b \le 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -a+b \le 0 \\ \frac{a}{4}+b \le 1 \end{cases}$ $\quad -\frac{3}{4}a \le 1$

$a \in [-\frac{4}{3}; 0)$ $\quad b \in [-\frac{a}{4}; 1-a]$

Ответ: $(a, b) = (t, k)$: $\begin{matrix} t \in [-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}] \\ k \in [-\frac{a}{4}; 1-a] \end{matrix}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задание 7



ABCD - впис.

~~$BC = AD = \frac{LM}{2}$ (ср. линия)~~ $\Rightarrow$ ABCD - параллелогр.

$\Rightarrow$ ~~ABCD - прямоуг.~~

$BC = AD = \frac{LM}{2}$ (ср. линия)
$AB = CD = KN/2$ (ср. линия)
ABCD - впис
$\Rightarrow$ ABCD - прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp AD$
$AB \parallel KN$ (ср. линия)
$AD \parallel LM$ (ср. линия)
$\Rightarrow KN \perp LM$

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0$

~~$144 - 12y$~~

$2xy - 12y - x + 6 = 2y(x-6) - (x-6) = (2y-1)(x-6)$

$(x-6) + 9(2y-1) = 90$

$(x-6) - 6(2y-1) = x - \cancel{6} - 12y + \cancel{6} = x - 12y$

$a = x - 6 \qquad b = 2y - 1$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

~~$3\dots b^2 \dots ab = 90$~~

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 36 = 0$

$t = \frac{a}{b} \qquad t^2 - 13t + 36 = 0$

$D = 169 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{18}{2} = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}$ ✓

$t + 3^{\log_3 t + \log_3 \frac{4}{3}} \geq 3^{\log_3 t + \log_3 \frac{5}{3}}$

$\log_3 t = p$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^p \geq \left(\frac{5}{3}\right)^p$

$\left(\frac{5}{3}\right)^p - \left(\frac{4}{3}\right)^p \geq 1$

~~$a \neq 0 \quad b \neq 0$~~ $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

$p = 2$

$36 \cdot 4 = 144$

$\boxed{3}$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$t = 10x - x^2$

$t > 0$

а если почему ок?

$t + |t|^{\log_3 4} = 5^{\log_3 t}$

~~$t = 3$~~ $\quad t + t^{\log_3 4} = 5^{\log_3 t}$

$t + 3^{\log_3 t \log_3 4} = 3^{\log_3 t \log_3 5}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} = t^{\log_3 5}$

$f(t) = t + t^{\log_3 4} \qquad g(t) = t^{\log_3 5}$

$1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1} \qquad \log_3 5 \cdot t^{\log_3 5 - 1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

$x+y=a$, $x-y=b$; $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$; $2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad\frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sqrt5-\sqrt5\,tg^2\beta=1+tg^2\beta$ $\quad -tg^2\alpha tg\beta+tg\alpha(1-tg^2\beta)+tg\beta+2\sqrt5=0$

$(1+\sqrt5)tg^2\beta=\sqrt5-1$

$tg^2\beta=\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}$

$D=(1-tg^2\beta)^2+4(tg^2\beta+2tg\beta\sqrt5)=$

$=\left(\frac{\sqrt5+1-\sqrt5+1}{\sqrt5+1}\right)^2+4\left(\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}\pm2\sqrt5\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}}\right)=$

$=\frac{4}{6+2\sqrt5}+4\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}\pm8\sqrt5\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$

$\cancel{x^2}-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$y\le\frac{x}{12}$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(y\cdot\frac{1}{y}) = f(y)+f(\frac{1}{y}) = f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y) < 0$

$\cancel{f(x)=}$ $\cancel{x \geq 2}$ $r = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}\cdot 11^{\alpha_5}\cdot 13^{\alpha_6}\cdot 17^{\alpha_7}\cdot 19^{\alpha_8}\cdot 23^{\alpha_9}$

$y = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}\cdot 7^{\beta_4}\cdot 11^{\beta_5}\cdot 13^{\beta_6}\cdot 17^{\beta_7}\cdot 19^{\beta_8}\cdot 23^{\beta_9}$

$f(2)=f(3)=0$

$f(5)=f(7)=1$

$f(11)=f(13)=3$

$f(17)=f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(x) = \left[\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\right.$ $f(x)=\left[\begin{array}{l}0;\ 10\\1;\ 7\\2\\3\\4\\5\end{array}\right.$

$f(x)=0$; $x=2^1$, $x=2^2$, $x=2^3$, $x=2^4$; $x=3^1$, $x=3^2$; $x=2^1\cdot3^1$, $x=2^2\cdot3^1$, $x=2^3\cdot3^1$, $x=2\cdot3^2$

$f(x)=1$ $x=5$, $x=2\cdot5$, $x=2^2\cdot5$, $x=3\cdot5$; $x=7$, $x=2\cdot7$, $x=3\cdot7$

$f(x)=2$

6. $f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$ $f'(x)=\frac{16(4x-5)-4(16x-16)}{(4x-5)^2}=$

$=\frac{4x-5-64x-64}{(4x-5)^2}=\frac{-60x-69}{(4x-5)^2}=-60\,\frac{x-\frac{69}{60}}{(4x-5)^2}$

$\frac{1}{4}$ 1 $\frac{69}{60}$ $f(x)=0$ $b_{max}=f(1)=0$

$g(x)=-32x^2+36x-3$

$g'(x)=-64x+36$ $x_0=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$

$g(\frac{1}{4})=-32\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3=-2+9-3=4$

$g(1)=-32+36-3=1$ $g_{min}=1$

$0\leq x+s\leq 1$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

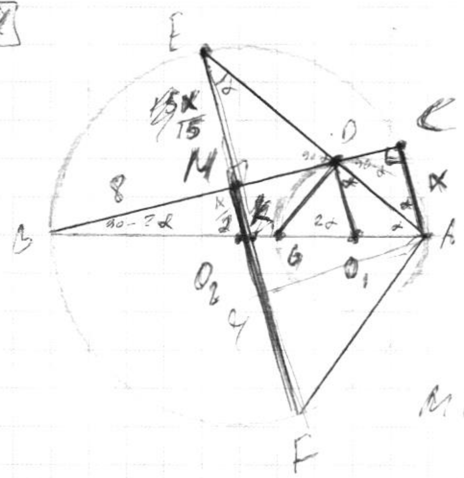
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$\frac{BO_1}{AB} = \frac{15}{17}$ $\frac{AO_1}{2AO_1} = \frac{2}{17}$

$\frac{AO_1}{AB} = \frac{2}{17}$ $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{4}{17} = \frac{r}{R}$

$K = O_2$ $\frac{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}}{2} = \frac{\frac{32}{2}}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$MD = \frac{17}{2} - 8 = \frac{17}{2} - \frac{16}{2} = \frac{1}{2}$ $CD = \frac{15}{2}$

$\frac{EO_1}{AC} = \frac{OD}{MD} = \frac{MD}{CD} = \frac{1}{15}$

$O_2B = \frac{x}{15} + \frac{x}{2} = \frac{17}{30}x$

$AB = \frac{17}{15}x$ $BC^2 = \left(\frac{17}{15}\right)^2 x^2 - x^2 = x^2\left(\left(\frac{17}{15}\right)^2 - 1\right) = \frac{17^2 \cdot 4}{66}$

$= x^2 \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{32}{17} = x^2 \cdot \frac{64}{17^2} = x^2 \cdot \frac{8^2}{17^2}$

$x = \frac{17}{8} \cdot 32 = 68$ $R = AO_2 = BO_2 = \frac{17x}{30} = \frac{17 \cdot 68}{30} = \frac{17 \cdot 34}{15}$

$r = AO_1 = \frac{4}{17} \cdot AO_2 = \frac{4}{17} \cdot \frac{17 \cdot 34}{15} = \frac{4 \cdot 34}{15}$

$\sin(90^\circ - 2\alpha) = \frac{x}{\frac{17}{15}x} = \frac{15}{17} = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = \frac{2}{17}$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

5 $f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(x/4) = f\left(x \cdot \frac{1}{4}\right) = 2f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \alpha_3\left[\frac{p_3}{4}\right]$ $f(x) \geq 0$

$f\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) = f$ $f(1 \cdot x) = f(1) + f(x) = f(x) \Rightarrow f(1) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

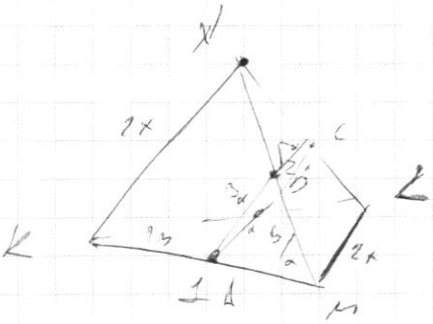
I) $a=0 \qquad 0 \le b \le 1$

II) $a>0 \qquad \frac{1}{4}a+b \ge 0 \qquad \begin{cases} \frac{1}{4}a+b\ge 0 \\ -a-b \ge -1 \end{cases} \qquad -\frac{3}{4}a \ge -1$

$a+b \le 1 \qquad 0<a\le \frac{3}{4}$

понятно

3)



$\cancel{1^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cos\alpha = 1+3^2-6\cos\beta}$

$2-2\sqrt{?}\cos\alpha = 3-6\cos\beta$

$6\cos\beta-2\sqrt{?}\cos\alpha=1$

$2<2x\le 4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt5}$

а) $\cancel{\sin 2\beta} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \quad \frac{1}{\sqrt5}$ +

$tg\,\beta = \pm 2 \qquad tg\,\alpha = t$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2(\alpha+\beta)) = \frac{2\,tg(\alpha+\beta)}{1+tg^2(\alpha+\beta)} = \frac{2\,\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}}{1+\frac{(tg\alpha+tg\beta)^2}{(1-tg\alpha\,tg\beta)^2}} =$

$= \frac{2(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\,tg\beta)}{(1-tg\alpha\,tg\beta)^2(tg\alpha+tg\beta)^2} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\,tg\beta) + \frac{1}{\sqrt5}(1-tg\alpha\,tg\beta)^2(tg\alpha+tg\beta)^2}{(1-tg\alpha\,tg\beta)(tg\alpha+tg\beta)} =$

$= \frac{\cancel{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\,tg\beta)}\left(2+\frac{1}{\sqrt5}(1-tg\alpha\,tg\beta)(tg\alpha+tg\beta)\right)}{\cancel{(1-tg\alpha\,tg\beta)(tg\alpha+tg\beta)}} = 0$

$tg\alpha \neq \frac{1}{tg\beta} = ctg\beta$

$tg\alpha \neq -tg\beta$

$2 + \frac{1}{\sqrt5}(tg\alpha + tg\beta - tg^2\alpha\, tg\beta - tg\alpha\, tg^2\beta) = 0$

$2\sqrt5 + tg\alpha(1-tg^2\beta) - tg^2\alpha\, tg\beta + tg\beta = 0$

а) $tg\beta = 2, \quad tg\alpha = t$

$2\sqrt5 - 3t - 2t^2 + 2 = 0$

$2t^2 - 3t + 2(1+\sqrt5) = 0$

$D = 9 - 16(1+\sqrt5) = 9 - 16 - 16\sqrt5 < 0$?

б) $tg\beta = -2$

$2\sqrt5 - 3t + 2t^2 - 2 = 0$

$2t^2 - 3t + 2(\sqrt5 - 1) = 0$

$D = 9 - 16\sqrt5 + 16 = 25 - 16\sqrt5 < 0$?

$25 = \sqrt{625}$

$16\sqrt5 = \sqrt{1280}$

$256 \cdot 5 = 1280$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta +$

$+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

a) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta - \frac{2}{5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \cos(2\alpha+2\beta)\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = \cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha = \cos(2\alpha+2\beta)(1-\sin 2\beta)$

$1-\sin 2\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\sin\beta\cos\beta = (\cos\beta - \sin\beta)^2$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+\beta)\cos\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cancel{-\frac{2}{\sqrt{5}}}\cos 2\beta = \cancel{-\frac{2}{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)