МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

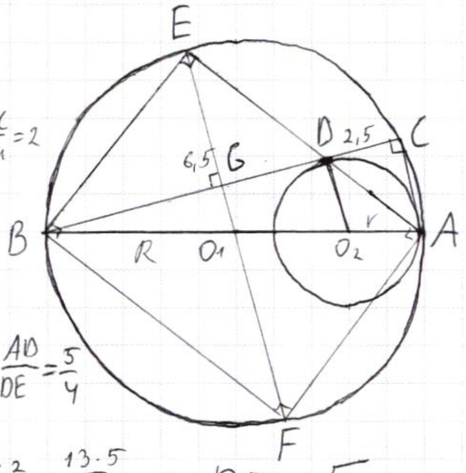
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Решение:

1) $\triangle ABC \sim \triangle O_1GB$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AB}{O_1G} = \frac{BC}{BG} = \frac{AC}{BO_1} = 2$

$\frac{BC}{BG} = 2 \Rightarrow BG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(CD + BD) = 4,5$

$\Rightarrow GD = BD - BG = 2$

2) $\triangle ACD \sim \triangle EGD$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AC}{EG} = \frac{CD}{GD} = \frac{AD}{DE} = \frac{5}{4}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{AD}{DE} = \frac{5}{4} \\ AD \cdot DE = BD \cdot CD = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} \text{ (по свойству пересек. хорд в окр.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{4}DE^2 = \frac{13 \cdot 5}{4} \Rightarrow DE = \sqrt{13}$

$AD = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

$AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

3) $\triangle ADO_2 \sim \triangle AEO_1$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{DO_2}{EO_1} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

4) В $\triangle BED$ по т. Пифагора:

$BD^2 = BE^2 + DE^2 \Rightarrow BE = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - (\sqrt{13})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

В $\triangle AEB$ по т. Пифагора:

$AB^2 = BE^2 + AE^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\sqrt{13}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{1521}}{8} = \frac{39}{8}$

$\Rightarrow r = \frac{5}{9}R = \frac{\cancel{39}^{13}}{8} \cdot \frac{5}{\cancel{9}_3} = \frac{65}{24}$

5) $tg\angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{\frac{3}{2}\sqrt{13}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \angle AFE = arctg\,\frac{3}{2}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $\frac{39}{8}$; $\frac{65}{24}$; $arctg\,\frac{3}{2}$; $\frac{351}{16}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№ 6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30,\ x\in[1;3]$$

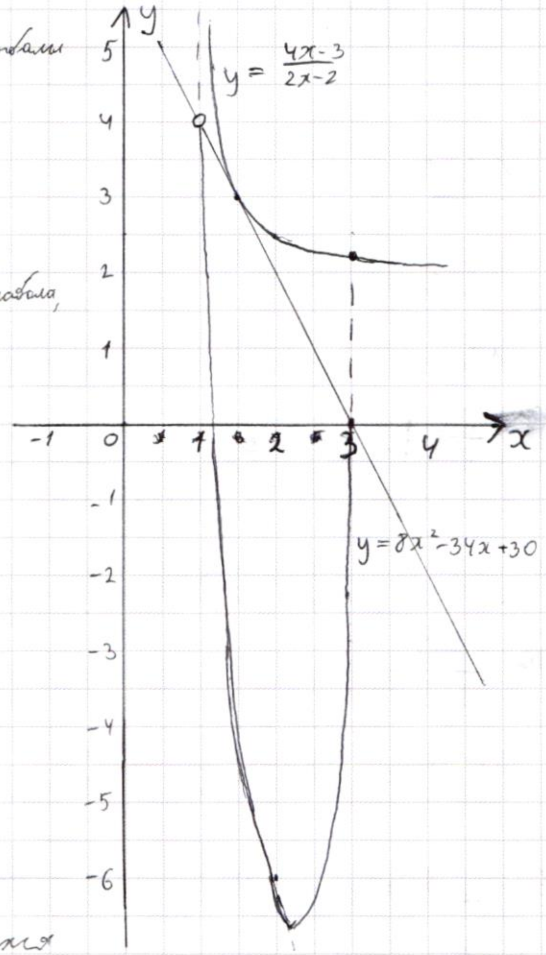
Рассмотрим ф-цию $y=\frac{4x-3}{2x-2}$, графиком явл. ветвь гиперболы

x	1,5	2	3
y	3	2,5	2,25

Рассмотрим ф-цию $y=8x^2-34x+30$, графиком явл. парабола, ветви которой направлены вверх

x	1	2	3
y	4	-6	0

Рассмотрим ф-цию $y=ax+b$, прямая пропорц., график – прямая.



Построим графики ф-ций в одной координатной плоскости.

Чтобы выполнялось нер-во $ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$ на отрезке $[1;3]$, необходимо условия, при которой график $y=ax+b$ был выше точек графика $y=8x^2-34x+30$, являющихся ограничением отрезка $[1;3]$.

Минимальное расстояние между графиками $y=ax+b$ и $y=8x^2-34x+30$ будет, при пересечении прямой $y=ax+b$ параболы в точках с абсциссами $x=1$; $x=3$, т.е. в точках $(1;4)$ и $(3;0)$

Тогда уравнение прямой $y=ax+b$ примет вид $y=-2x+6$

Аналогично, ~~...~~ нер-во $\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b$ будет выполняться если график прямой $y=ax+b$ будет ниже графика $y=\frac{4x-3}{2x-2}$ в координатной плоскости, либо будет пересекать его в одной точке.

Проверим положение графика ф-ции $y=-2x+6$ относительно графика ф-ции $y=\frac{4x-3}{2x-2}$, найдём точки пересечения.

$$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2} \Leftrightarrow -4x^2+16x-12=4x-3 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow (2x-3)^2=0 \Rightarrow x=1{,}5$$

$\Rightarrow$ прямая $y=-2x+6$ – касательная к графику ф-ции $y=\frac{4x-3}{2x-2} \Rightarrow \frac{4x-3}{2x-2}\leqslant -2x+6\leqslant 8x^2-34x+30$

Пара чисел a и b $(-2;6)$ – искомая. При любых других значениях a и b не будут соблюдаться графические условия нер-ва $\frac{4x-3}{2x-2}\leqslant ax+b\leqslant 8x^2+34x-30$

Ответ: $(-2;6)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$\sin(30^\circ+60^\circ)=$ $2-\sin(60^\circ-30^\circ)\cdot\sin(60^\circ+30^\circ)$

$\cos(30^\circ+60^\circ)=$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\cos(\alpha+2\beta)\cdot\sin(\alpha+2\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\alpha=-\frac{9}{17}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$\log_4 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq \log_4\left(|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2-6x\right)$$

$$\log_4(x^2+6x)\log_4 3 \geq \log_4\left(|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2-6x\right)$$

$$\log_4(x^2+6x)^{\log_4 3} \geq \log_4\left(|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2-6x\right)$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2-6x \quad \Big| : x^2+6x$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3-1} \geq \frac{|x^2+6x|^{\log_4 5}}{x^2+6x}-1$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$y=\frac{4x-3}{2x-2}$ $y(1,5)=3$

$17 \mid 8$, $2,125$

x	2	3
y	2,5	2,25

$y=8x^2-34x+30$ $x_0=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2,125$

x	1	2	3
y	4	-6	0

$(1;4);(3;0)$

$a+b=4$

$3a+b=0$

$a=-2$

$b=6$ $y=-2x+6$

$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

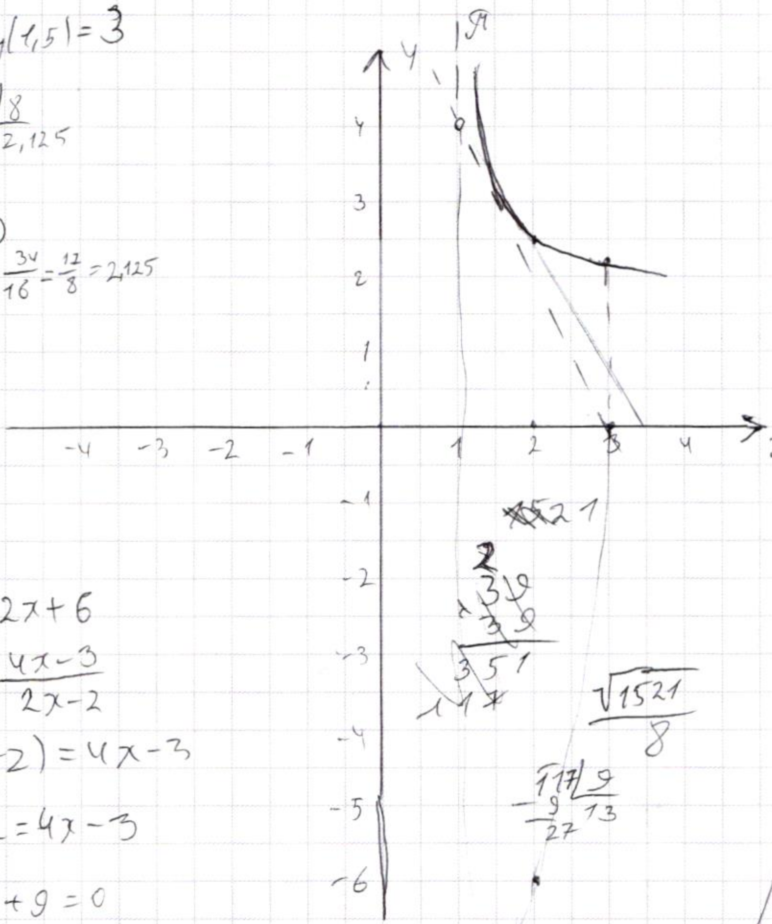
$(-2x+6)(2x-2)=4x-3$

$-4x^2+16x-12=4x-3$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2$

$\boxed{x=1,5}$



$39 \cdot 39 = 351$, 117, 1521

$\frac{\sqrt{1521}}{8}$

$\frac{117}{9} = 13$

Ответ: $(-2;6)$

$AE=9\sqrt{13}$

$\frac{r}{R}=\frac{AD}{AE}=\frac{5}{9}$

$\cos\alpha=\frac{AE^2-2R^2}{-2R^2}$

$=\frac{AD^2-2r^2}{-2r^2}$

$BE=\sqrt{40\cdot 13+\frac{13^2}{4}}$

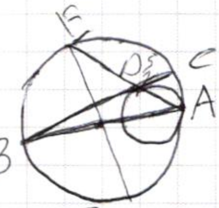
$BE=\sqrt{\frac{13^2}{4}-16\cdot 13}$

$R=\frac{\sqrt{\frac{81}{25}\cdot 13-\frac{2}{4}\sqrt{13}}}{2}$

$\frac{81}{25}-\frac{9}{4}=\frac{324-225}{100}$

$R=\boxed{\frac{3\sqrt{11}}{20}}$

$r=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{20}\sqrt{11}=\boxed{\frac{\sqrt{11}}{12}}$

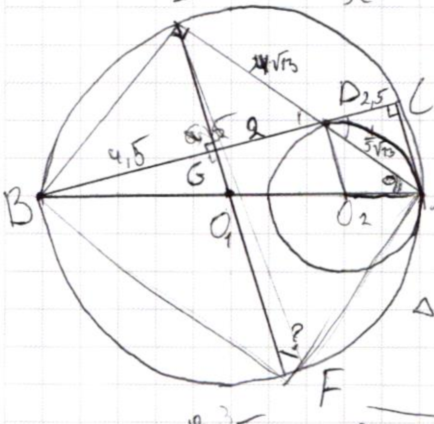


$\angle AFE=\arcsin\frac{\frac{3\sqrt{13}}{5}}{\frac{3\sqrt{13}}{10}}$

$\arcsin 6\sqrt{\frac{13}{17}}$

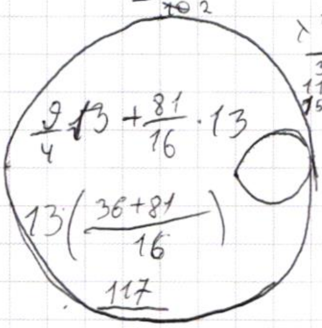
$\frac{5}{4}DE^2=\frac{13\cdot 5}{4}$

Ω



$r:R=2$

$\frac{\sqrt{117\cdot 13}}{8}$



$\frac{9}{4}13+\frac{81}{16}\cdot 13$

$13\left(\frac{36+81}{16}\right)$

117

$117 \cdot 13 = 351$, 1521

$AD=\sqrt{13}$

$DE=\frac{4}{5}\sqrt{13}$

$\Rightarrow AE=\frac{9}{5}\sqrt{13}$

$\frac{r}{R}=13\left(\frac{13}{4}-1\right)$

$13\cdot\frac{9}{4}$

$\sqrt{\frac{13^2}{4}-13}$

$27\cdot 13=351$

$\sqrt{13\left(\frac{13}{4}-1\right)}$

$ED\cdot AD=6,5\cdot 2,5$

$\triangle ACD\sim\triangle EGD$ $\frac{CD}{GD}=\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{GD}=\frac{5}{4}$

$\arctan\frac{\frac{9}{5}\sqrt{13}}{\frac{3}{2}\sqrt{13}}\Rightarrow\boxed{\arctan\frac{6}{5}}$

$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot 13=\frac{27\cdot 13}{20}=\boxed{1,35\cdot 13}$

$\begin{cases} ED\cdot AD=6,5\cdot 2,5 \\ \frac{AD}{DE}=\frac{5}{4} \end{cases}$ $13\cdot\frac{9}{4}$ $AD=\frac{5}{4}DE$ $\boxed{\frac{3\sqrt{13}}{2}}$

$AD^2=\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}=13\Rightarrow AD=\sqrt{13}\Rightarrow DE=\frac{4}{5}\sqrt{13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

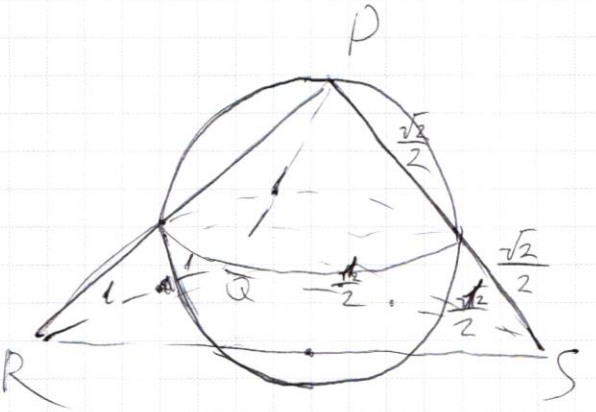
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

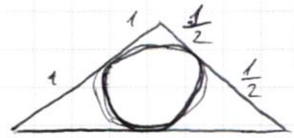
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





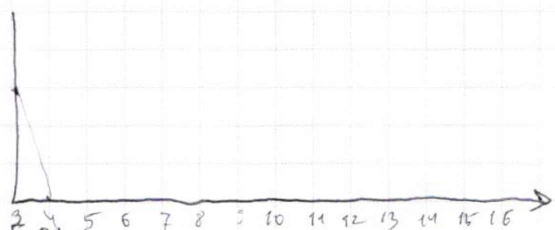
$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(xy) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{y}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow \left[\frac{x}{4}\right] - \left[\frac{y}{4}\right] =$

$(0;4); (0;5), (0;6) \ldots$

$(1;4); (1;5$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)