МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$$

$$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$$

$$y-6x\geq 0$$

$$(y-6x)^2=x(y-6)-(y-6)$$

$$(y-6x)^2=(x-1)(y-6)$$

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ y-6x\geq 0 \end{cases}$$

Пусть $x-1=a$, $y-6=b$.

$$b-6a=y-6-6x+6=y-6x.$$

$$\begin{cases} 9a^2+b^2=90 \\ (b-6a)^2=ab \\ b-6a\geq 0 \end{cases}$$

$$b^2-12ab+36a^2=ab$$

$$b^2-13ab+36a^2=0$$

$$b^2-4ab-9ab+36a^2=0$$

$$b(b-4a)-9a(b-4a)=0$$

$$(b-9a)(b-4a)=0$$

$$b=9a \quad b=4a$$

I. $b=9a$

$$9a^2+81a^2=90$$

$$90a^2=90$$

$$a^2=1$$

$a=1$ $\qquad$ $a=-1$

$b=9$ $\qquad$ $b=-9$

$b-6a>0$ $\qquad$ $b-6a<0.$

$x-1=1 \quad x=2$

$y-6=9 \quad y=15$

II. $b=4a$

$$9a^2+16a^2=90$$

$$a^2=\frac{90}{25}$$

$a=\frac{\sqrt{90}}{5}$ $\qquad$ $a=-\frac{\sqrt{90}}{5}$

$b=\frac{4}{5}\sqrt{90}$ $\qquad$ $b=-\frac{4}{5}\sqrt{90}$

$b-6a<0$ $\qquad$ $b-6a>0$

$x=1-\frac{\sqrt{90}}{5}$

$y=6-\frac{4}{5}\sqrt{90}$

Ответ: $(2, 15)$ и $\left(1-\frac{\sqrt{90}}{5}; 6-\frac{4\sqrt{90}}{5}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$\boxed{26x-x^2>0}$$

$26x-x^2=a$, $a>0$

$$a^{\log_5 12}+a \geqslant 13^{\log_5 a}$$

$\log_5 12>\log_5 5$, т.к. $5>1$.

$$\underbrace{a}_{>0}\underbrace{(a^{\log_5 12-1}+1)}_{>0} \geqslant \underbrace{13^{\log_5 a}}_{>0}$$

Прологарифмируем обе части по основанию 5.

$$\log_5(a(a^{\log_5 12-1}+1)) \geqslant \log_5 13^{\log_5 a}$$

$$\log_5(a^{\log_5 12}+a) \geqslant \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 a+\log_5(a^{\log_5 12-1}+1) \geqslant \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 a+\log_5(a^{\log_5 12-\log_5 5}+1) \geqslant \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 a+\log_5(a^{\log_5 2{,}4}+1) \geqslant \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\log_5(a^{\log_5 2{,}4}+1) \geqslant \log_5 a(\log_5 13-\overset{\log_5 5}{1})$$

$$\log_5(a^{\log_5 2{,}4}+1) \geqslant \log_5 a \cdot \log_5 \tfrac{13}{5}$$

Заметим, что $\log_5 13>\log_5 5$, т.к. $5>1$, значит
$\log_5 13-\log_5 5>0$.

$$\frac{\log_5(a^{\log_5 2{,}4}+1)}{\log_5 \frac{13}{5}} \geqslant \log_5 a.$$ (поделим обе части на $\log_5 \frac{13}{5}$)

по св. логарифма $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$

$$\log_{\frac{13}{5}}(a^{\log_5 2{,}4}+1) \geqslant \log_5 a$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

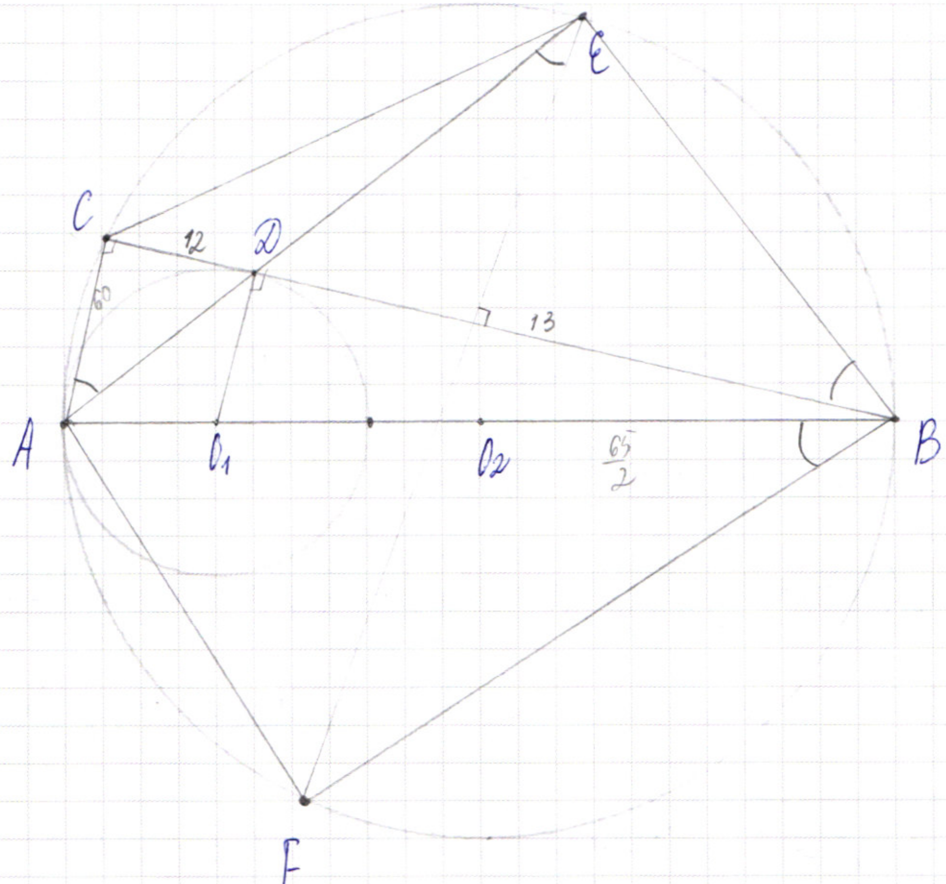
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Пусть O_1 - центр ω, O_2 - центр Ω

1) $O_1D \perp BC$ по св. r, опущенного в т. касания,

$\angle ACB = 90°$, т.к. опирается на диаметр (по св.)

$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ по I пр. ~ △ ($\angle ACB = \angle O_1DB = 90°$, $\angle DBO_1$ - общий)

$\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$ $\quad$ $BO_1 = 2R - r$, $BA = 2R$, где R - радиус Ω, r - радиус ω

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25}$ $\quad$ $26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$

$r = \frac{24}{25}R$.

по Т. Пифагора в△ O_1DB: $\quad$ $O_1D^2 + DB^2 = O_1B^2$

$r^2 + 169 = (2R - r)^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\sin 2\alpha \frac{-2}{17}$.

$1-2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1-\frac{2\cdot 1}{17} = \frac{15}{17}$

$\cos(4\alpha+4\beta) = \frac{15}{17}$.

I. $\sin(4\alpha+4\beta) = \frac{8}{17}$ II $\sin(4\alpha+4\beta) = -\frac{8}{17}$.

$\cos(2\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha - \sin(2\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha + \cos(2\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha\left(\cos(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha+4\beta)\right) - \sin 2\alpha\left(\sin(2\alpha+4\beta)-\cos(2\alpha+4\beta)\right) = \frac{23}{17}$

$\cos(2\alpha+4\beta)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha) - \sin(2\alpha+4\beta)(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha) = \frac{23}{17}$.

$\sqrt{1-\left(\sin 2\alpha+\frac{2}{17}\right)^2}\left(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\right) + \left(\sin 2\alpha+\frac{2}{17}\right)\left(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\right) = \frac{23}{17}$.

$\sqrt{1-\left(\sin^2 2\alpha+\frac{4}{17}\sin 2\alpha+\frac{4}{289}\right)}\left(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\right) + \left(\sin 2\alpha+\frac{2}{17}\right)\left(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\right) = \frac{23}{17}$.

$\sqrt{\cos^2 2\alpha+\frac{4}{17}\sin 2\alpha+\frac{4}{289}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

$r^2+169=4R^2-4Rr+r^2$

$169=4R^2-4R\cdot\frac{24}{25}R$

$169=4R^2-\frac{96R^2}{25}$

$169=\frac{4R^2}{25}$

$R=\frac{13\cdot5}{2}$

$R=\frac{65}{2} \Rightarrow r=\cancel{\frac{24}{25}}\cdot\cancel{\frac{65}{2}}=\frac{65}{2}\cdot\frac{24}{25}=31,2$

$\times\begin{array}{r}13\\24\\\hline 52\\26\\\hline 312\end{array}$

2) $AC\perp BC$ и $FE\perp BC \Rightarrow AC \parallel FE$ по пр. $\parallel$ прямых

$\Downarrow$

$\angle CAE=\angle AEF$ по св $\parallel$ прямых

$\angle AEF=\angle ABF$ по св впис. угл, $\angle CAE=\angle CBE$ по св впис. угл

$\Downarrow$

$\angle CAE=\angle CBE=\angle AEF=\angle ABF$

~~△ в △CA~~ $\frac{DO_1}{CA}=\frac{13}{25}$ по выше д-ву

$CA=DO_1\cdot\frac{25}{13}$

$CA=r\cdot\frac{25}{13}=\frac{312\cdot25}{10\cdot13}=60$

Тогда $tg\angle CAD=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

$\angle CAD=\angle AEF \Rightarrow \angle AEF=arctg\left(\frac{1}{5}\right)$

по Т. Пифагора $AD=\sqrt{3600+144}=\sqrt{3744} \Rightarrow \cos\angle CAD=\cos\angle AEF=\frac{60}{\sqrt{3744}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4 (продолжение 2)

$$\cos\angle CBA = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$$

$$\angle EBA = \angle EBC + \angle CBA = \angle CAD + \angle CBA$$

$$\cos\angle EBA = \cos(\angle CAD + \angle CBA) = \cos\angle CAD \cdot \cos\angle CBA - \sin\angle CAD \cdot$$
$$\cdot \sin\angle CBA = \frac{60}{\sqrt{3744}} \cdot \frac{5}{13} - \frac{12}{\sqrt{3744}} \cdot \frac{\cancel{60}^{12}}{\cancel{65}_{13}} = \frac{300-144}{13\sqrt{3744}} = \frac{56}{13\sqrt{3744}}$$

$$\sin\angle EBA = \sin(\angle CAD + \angle CBA) = \sin\angle CAD \cdot \cos\angle CBA +$$
$$+ \sin\angle CBA \cdot \cos\angle CAD = \frac{12}{\sqrt{3744}} \cdot \frac{5}{13} + \frac{\cancel{60}^{12}}{\cancel{65}_{13}} \cdot \frac{60}{\sqrt{3744}} =$$

$$= \frac{60+720}{13\sqrt{3744}} = \frac{780}{13\sqrt{3744}} = \frac{60}{\sqrt{3744}}$$

$$\begin{array}{r} \times\,288 \\ 12 \\ \hline 576 \\ 288 \\ \hline 3456 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7200 \\ -\,3456 \\ \hline 3744 \end{array}$$

по Т. sin: $\frac{AE}{\sin\angle EBA} = 2R$

$$AE = \frac{60 \cdot 65}{\sqrt{3744}}$$

$$\angle EBF = 2\angle CAD + \angle CBA$$

$$\sin\angle EBF = \sin(2\angle CAD) \cdot \cos\angle CBA + \sin\angle CBA \cdot \cos(2\angle CAD) =$$
$$= 2\sin\angle CAD \cdot \cos\angle CAD \cdot \cos\angle CBA + \sin\angle CBA \cdot (2\cos^2\angle CAD - 1) =$$
$$= 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{3744}} \cdot \frac{60}{\sqrt{3744}} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13}\left(2 \cdot \frac{3600}{3744} - 1\right) =$$
$$= \cancel{\frac{120 \cdot 60}{\ldots}} = \frac{120 \cdot 60}{3744 \cdot 13} + \frac{12}{13}\left(\frac{7200-3744}{3744}\right) =$$
$$= \frac{7200 + 12\cdot 7200 - 12 \cdot 3744}{13 \cdot 3744} = \frac{\cancel{13}^{1} \cdot 7200 - 12 \cdot \cancel{3744}^{288}}{\cancel{13}_{1} \cdot 3744} = \frac{7200 - 12\cdot 288}{3744}$$
$$= \frac{7200 - 3456}{3744} = 1 \Rightarrow \angle EBF = 90° \Rightarrow EF \text{ — диаметр по нк.}$$

по окр $S_\triangle AEF$: $S_{\triangle AEF} = \frac{AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF}{2} = \frac{60 \cdot 65 \cdot 65 \cdot \cancel{12}^{6}}{\sqrt{3744} \cdot \sqrt{3744} \cdot \cancel{2}_{1}} = \frac{65^2 \cdot \cancel{360}^{10}}{\cancel{3744}} =$
$= \frac{\cancel{65}^{5} \cdot 65 \cdot 10}{\cancel{13} \cdot 8} = \frac{50 \cdot 65}{8} = \frac{3250}{8}$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$; $R = \frac{65}{2}$; $r = 31{,}2$; $S = \frac{3250}{8}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \qquad x \in \left[\frac{2}{3};2\right]$$

$\cancel{8-6x \,|\, 3x-2}$

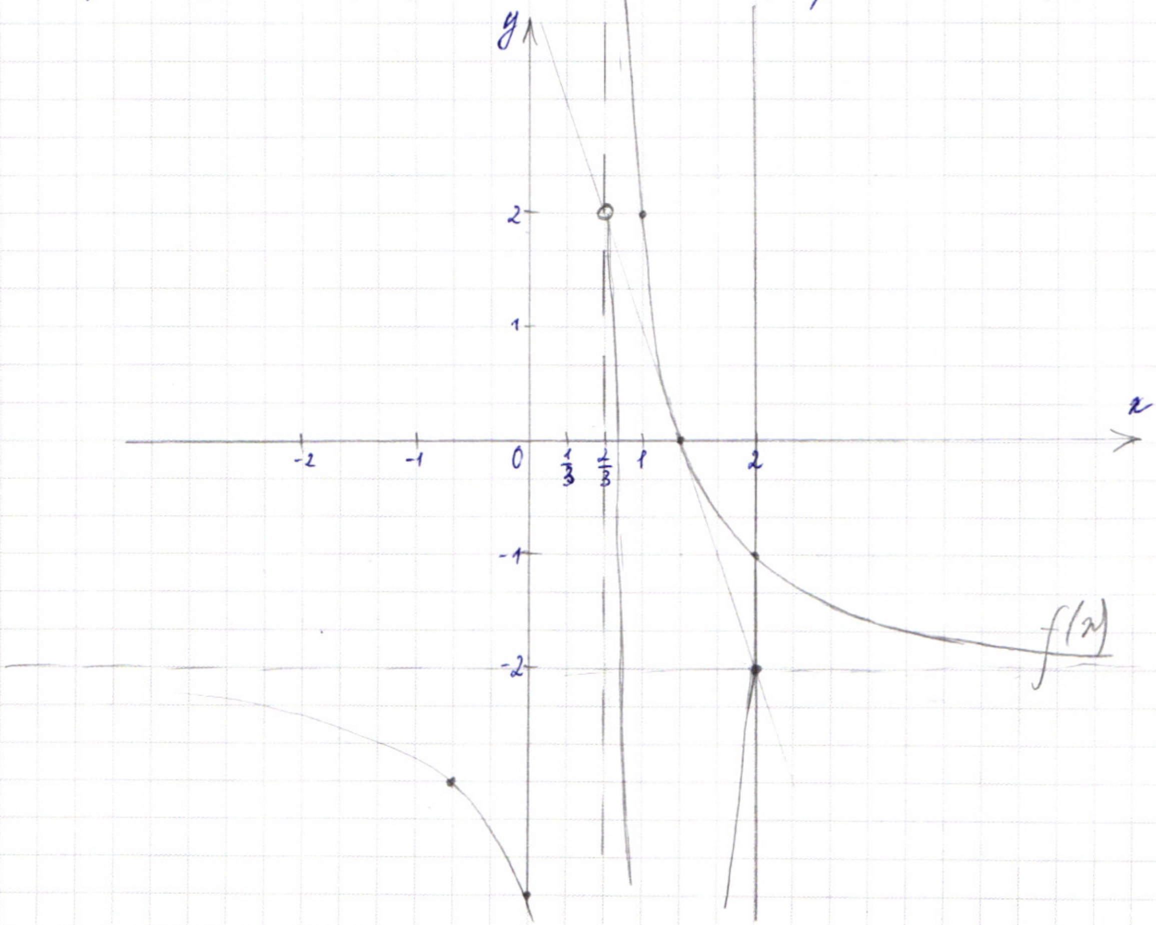
$$\begin{array}{r|l} -6x+8 & 3x-2 \\ \underline{-6x+4} & -2 \\ 4 & \end{array}$$

$$-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$f(x)=\frac{4}{3x-2}-2$$

$$g(x)=18x^2-51x+28.$$

~~Построим данные графики~~ Построим графики этих функций.



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 6 (продолжение 2)

$72b = -a^2 - 102a - 585$

$2a + b \geq -2$

$2a - \frac{a^2}{72} - \frac{102a}{72} - \frac{585}{72} + 2 \geq 0$

$-\frac{a^2}{72} - \frac{51}{36}a + 2a - \frac{65}{8} + 2 \geq 0$

$-a^2 - 102a + 144a - 65 \cdot 9 + 2 \cdot 72 \geq 0$

$-a^2 + 42a - 9(65 - 16) \geq 0$

$-a^2 + 42a - 9 \cdot 49 \geq 0$

$a^2 - 42a + 9 \cdot 49 \leq 0$

$(a-21)^2 \leq 0$

$a = 21$.

$\cancel{42 + b \geq -2}$ $\cancel{b = 44}$ $\cancel{14 + b \geq 2}$ $\cancel{b = 12}$

$\cancel{\frac{2}{3}a + b \geq 2}$

$\cancel{\frac{2}{3}a - \frac{a^2}{72} - \frac{102a}{72} - \frac{585}{72} - 2 \geq 0}$

Но при таком a решений нет, т.к.

$y = ax + b$ тогда пересечёт $g(x)$ на $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\Downarrow$

единствен. значение a и b — $(-3; 4)$.

$\frac{8-6x}{3x-2} = ax + b$.

$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} = ax+b \\ f(2) \geq -2 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2 \end{cases}$

$8 - 6x = (3x-2)(ax+b)$

$8 - 6x = 3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b$.

$3ax^2 + (3b - 2a + 6)x - 2b - 8 = 0$

$a \neq 0$

$ax + b \geq -2$

$\begin{cases} 2a + b \geq -2 \\ \frac{2}{3}a + b \geq 2 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

Теперь заметим, что крайние положения прямой $y=ax+b$ — это когда она проходит через точки $(2;-2)$ и $(\frac{2}{3};2)$ и когда касается гиперболы $f(x)=\frac{4}{3x-2}-2$.

Заметим, что $a\neq 0$, иначе $x=b$, но в таком случае условие не выполняется.

Найдём крайние положения:

$2a+b=-2$

$\frac{2}{3}a+b=2$.

$2a-\frac{2}{3}a=-4$

$\frac{4}{3}a=-4$

~~$a=-3$~~ ~~$b=-2-\frac{8}{3}$~~ касается графика $g(x)$ в $(\ ;0)$

$a=-3$ $\quad b=-2+6=4$ $\quad (-3;4)$ — подходит.

Теперь рассмотрим точку касания (при этом $f(2)\geq -2$) и $f(\frac{2}{3})\geq 2$)

$$\begin{cases}18x^2-51x+28=ax+b\\ f(2)\geq -2\\ f(\frac{2}{3})\geq 2\end{cases}$$

$f(2)=2a+b\geq -2$

$f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}a+b\geq 2$

$18x^2-(51+a)x+28-b=0$.

$(51+a)^2-72(28-b)=0$

$51^2+102a+a^2-72\cdot 28+72b=0$

$9\cdot 289+102a+a^2-9\cdot 8\cdot 28+72b=0$

$9(289-224)+a^2+102a+72b=0$.

$a^2+102a+72b+659=0$.

№6 (продолжение 3)

$\cancel{\frac{D}{4}} = D = (3b-2a+6)^2 + 4\cdot 3a\cdot(2b+8) =$

$= 9b^2+4a^2+36-12ab+36b-24a+24ab+96a =$

$= 9b^2+4a^2+36+12ab+36b+72a = 0.$

$2a+b \neq -2$

единств. реш. при $a=-3$, $b=4$.

$(12+6+6)^2 + 4\cdot(-9)\cdot 16 = 24^2 - 24^2 = 0.$

Ответ: единств. пара $(-3;4)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\ \cos(2\alpha+2\beta)$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$ 2) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

1) $-\frac{2}{17} - \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$-\frac{2}{17} - \sin 2\alpha = \sin\left(2\beta + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$.

$-\frac{2}{17} = \sin 2\alpha + \sin\left(2\beta + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$.

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$26x-x^2>0$$

$$26x-x^2=a$$

$$\log_a b=\frac{\log_k b}{\log_x a}$$

$$a^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5 a}$$

$$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$$

$$a^{\log_5 12}+5^{\log_5 a} \geq 13^{\log_5 a}$$

$$\log_5(a^{\log_5 12}+a) \geq \log_5 13^{\log_5 a}$$

$$\log_5 a\cdot\log_5 13$$

$$a^{\log_5 12}=t$$

$$\log_5 t=\log_5 a^{\log_5 12}$$

$$t+$$

$$\log_5 t=\log_5 12\cdot\log_5 a$$

$$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$$

$$a(a^{\log_5 12-1}+1) \geq 13^{\log_5 a}$$

$$a\cdot(a^{\log_5 2{,}4}+1) \geq 13^{\log_5 a}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\sin(2\beta)\cdot\cancel{\cos}$$

$$\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta+\sin(2\beta)$$

$$f(ab)=f(a)+f(b) \qquad \boxed{x>0}$$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$ для любого простого p

$$4\leq x\leq 28 \qquad f\left(\frac{x}{y}\right)<0.$$

$$4\leq y\leq 28$$

$$\cos(4\alpha+4\beta)-\sin(2\alpha+4\beta)-\sin 2\alpha=1.$$

$$\cos(4\alpha+4\beta)-\cancel{\sin}(90^\circ-2\alpha-4\beta)-\sin 2\alpha=1$$

$$-2\sin\left(\frac{90^\circ+2\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{6\alpha+4\beta-90^\circ}{2}\right)-\sin 2\alpha=1.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ для всех x на $[\frac{2}{3}; 2]$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

$\frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28$ $\quad 8+28-34=2$

$18\cdot 4 - 102+28 =$

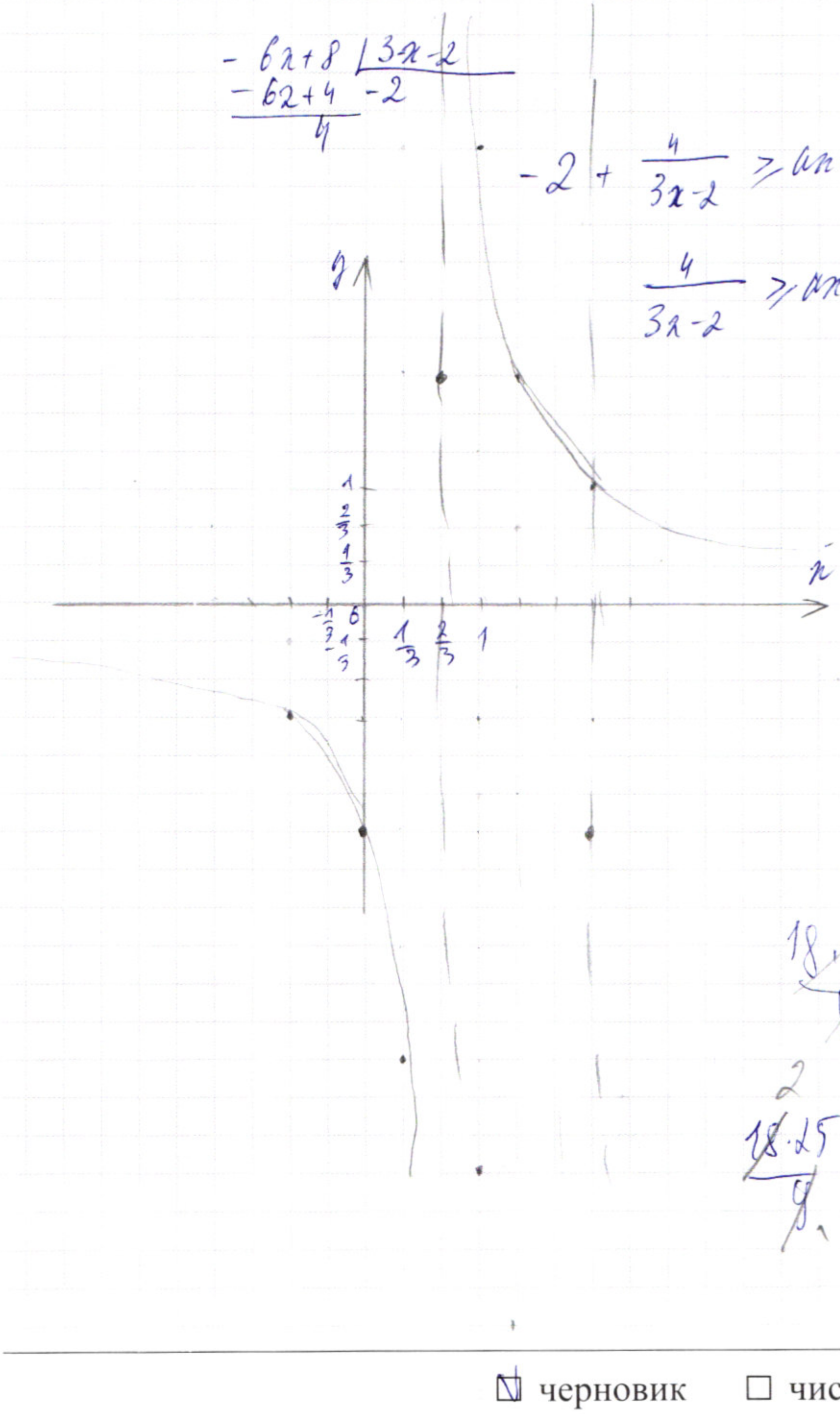
$= 100-102$

$8-6x \,|\, 3x-2$

$-6x+8 \,|\, 3x-2$
$-6x+4 \quad -2$
4

$-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b$

$\frac{4}{3x-2} \geq ax+b-2$



$\frac{18\cdot 25}{9} - \frac{51\cdot 5}{3} + 28 =$

$= 50+28-85 =$
$= 78-85$

$18x^2-51x+28$

$x=1$

$18+28-51 = 46-51$

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$ $\quad \frac{18}{12}$

$\frac{18\cdot 16}{9} - \frac{51\cdot 4}{3} + 28$

$\frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28$ $\quad 60-68=-8$

$\frac{18\cdot 25}{9} - \frac{51\cdot 5}{3} + 28$

$50+28-85 = 78-85 = -7$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28$

$72+28-102 =$

$= 100-102 = -2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9b^2+(b^2+12b+36)b^2=90(b^2+12b+36)$

$9b^2+b^4+12b^3+36b^2=90b^2+108b+36\cdot 90.$

$b^4+12b^3-45b^2-108b-36\cdot 90=0.$

$b=2$

$16+12\cdot 8-45\cdot 4-108\cdot 2-36\cdot 90$

~~$16+12\cdot 8$~~

$$\begin{cases}(y-6x)^2=(x-1)(y-6)\\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90\end{cases}$$

$(x-1)=a \quad (y-6)=b.$

$b-6a=y-6-6x+6=y-6x.$

$$\begin{cases}(b-6a)^2=ab.\\ 9a^2+b^2=90\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^2-12ab+36a^2=ab.\\ 9a^2+b^2=90\end{cases}$$

$b^2-13ab+36a^2=0.$

$(b^2-4ab)-9ab+36a^2=0$

$b(b-4a)-9a(b-4a)=0$

$(b-9a)(b-4a)=0$

$b=9a \quad b=4a.$

$9a^2+81a^2=90$

$90a^2=90$

$a^2=1$

$a=1 \quad b=9$

$a=-1 \quad b=-9$

$9a^2+16a^2=90$

$a^2=\frac{90}{25}$

$a=\frac{\sqrt{90}}{5}$

$a=-\frac{\sqrt{90}}{5}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$\cancel{\log_5 |x^2-26x|^{\log_5 12}}$

$\cancel{x^2-26x}$

$26x-x^2=a$

$\cancel{a^{\log_5 12}+26a}$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$a^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 a}-a$$

$$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$$

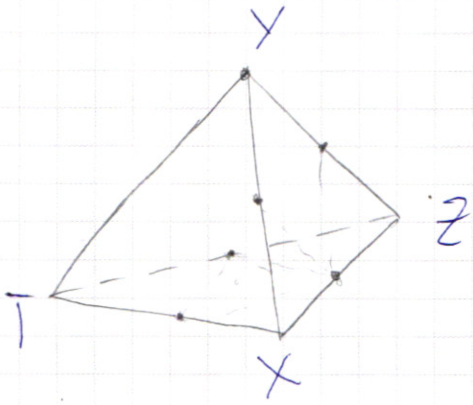
$$\log_5(a^{\log_5 12}+a) \geq \log_5 13^{\log_5 a}$$

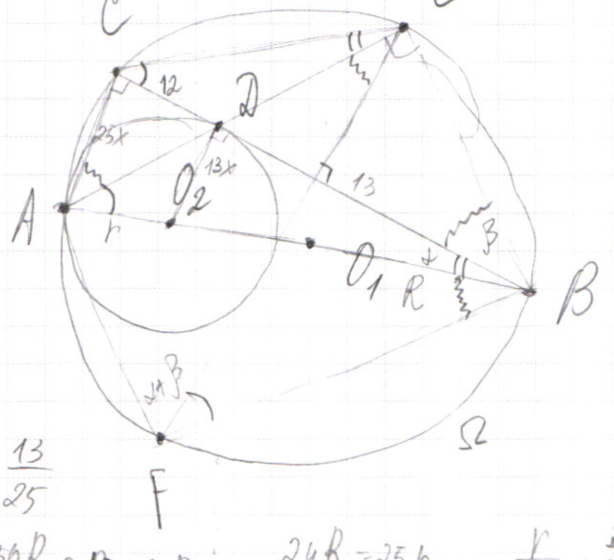
$103 \times 36 = 618 + 309 = 3708$

$3708 + 36 = 3744$

$104 \times 36 = 624 + 312 = 3744$

$65 \times 56 = 3250$





$25^2+25^2x^2=4R^2$

$13^2+13^2x^2=(2R-r)^2$

$25^2(1+x^2)=4R^2$

$13^2(1+x^2)=(4R^2-4Rr+r^2)$

$\frac{25}{13}=\frac{2R}{2R-r}$ $\qquad \frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{25}$

$50R-25r=26R$ $\qquad 24R=25r$ $\qquad \frac{r}{R}=\frac{24}{25}=0{,}96.$

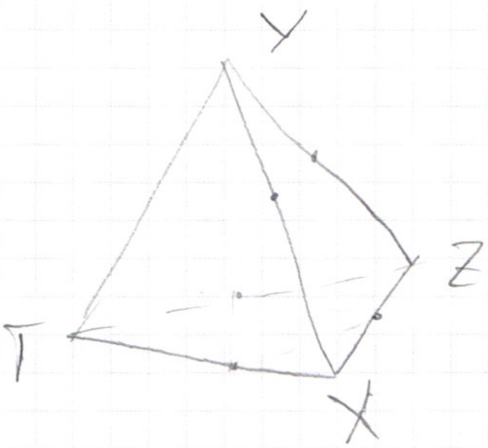
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$-2\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\sin(3\alpha+2\beta-45^\circ)-2\sin\alpha\cos\alpha=1$

$\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\sin(3\alpha+2\beta-45^\circ)+\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin3\alpha\cdot\cos(2\beta-45^\circ)+\cos3\alpha\cdot\sin(2\beta-45^\circ))+\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}$



$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$, для простого p

$4\le x\le 28$

$4\le y\le 28$

$f(\frac{x}{y})<0$

$f(2)=[\frac{1}{2}]=0$

$160+64=224$

$\frac{28}{8}$ ... $\cancel{3\cdot 24}$

$\frac{-3\cdot 4}{3}+4=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$289 - 225 = 64$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta) +$

$64 + 225$

$+ \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot(\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta) +$

$+ \sin 2\alpha$

$\frac{1}{17} + \frac{16}{17}$ $\qquad \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad -\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ 2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\beta\right)\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$(\cos 2\beta - \sin 2\beta)(\cos 2\beta + \sin 2\beta)$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \cancel{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta}$

$\sin 2\alpha(\cos 2\beta + \cos 4\beta) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta + \sin 4\beta) + \sin 2\alpha$

$1 - 2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1 - 2\cdot\frac{1}{17} = \frac{15}{17}$. $\qquad \cos(4\alpha+4\beta) = \frac{15}{17}$.

$9a^2+$

$$\begin{array}{r} 288 \\ \times\ 13 \\ \hline 864 \\ 288\ \ \\ \hline 3744 \end{array}$$

$$a+a^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 a}$$

$$\log_5\left(a+a^{\log_5 12}\right) \geq \log_5 13^{\log_5 a}$$

$$\log_5\left(a+a^{\log_5 12}\right) \geq \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\log_5\left(a\cdot\left(1+a^{\log_5 2,4}\right)\right) \geq \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\frac{\log_5 a}{\log_5\left(1+a^{\log_5 2,4}\right)} \geq \log_5 a \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 a \,/\, \frac{\log_5 13 - 1}{\log_5(1+a_3} \leq 0$$

$$\log_x(a+b) = \log_x a + \log_x b$$

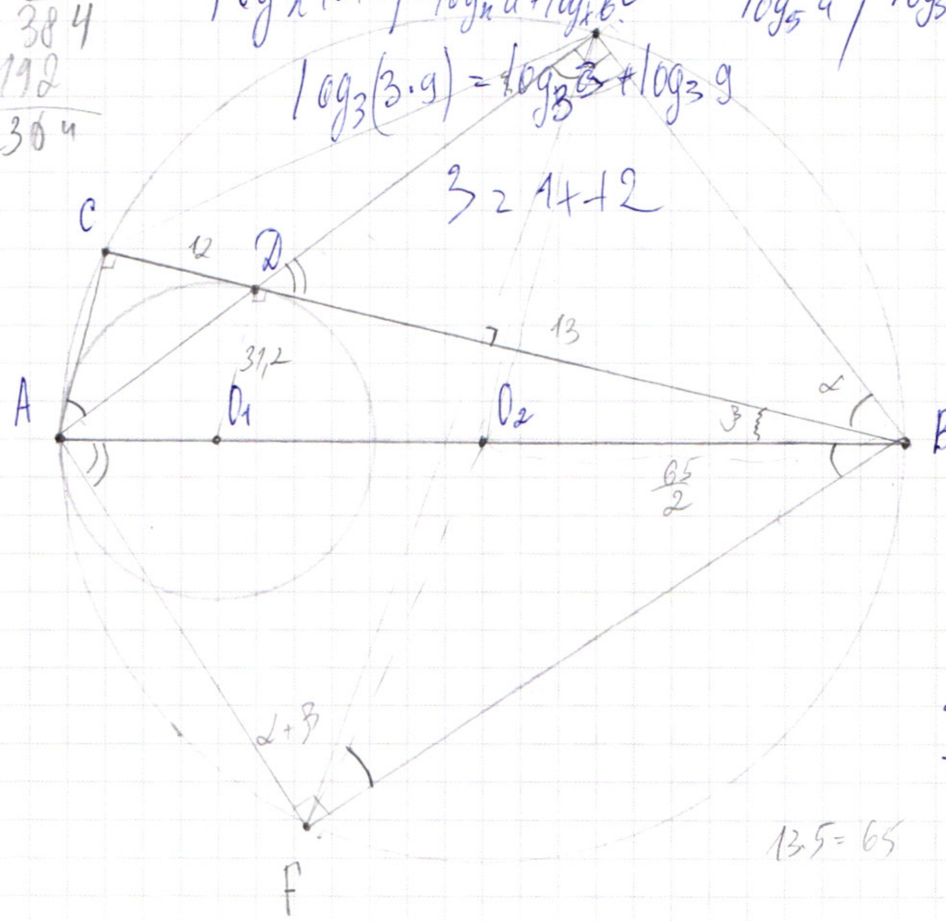
$$\log_3(3\cdot 9) = \log_3 3 + \log_3 9$$

$$3 = 1+2$$

$$\begin{array}{r} 650 \\ 650 \\ \hline 32500 \\ 390\ \ \\ \hline 422500 \\ +\ \ 2304 \\ \hline 424804 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 48 \\ 48 \\ \hline 384 \\ 192\ \ \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 652 \\ 652 \\ \hline 1304 \\ 3260\ \ \\ 3912\ \ \ \ \\ \hline 425104 \end{array}$$



$3b - 2w + 6.$

$-4\cdot 9\cdot 16$

$$\frac{r}{R} = \frac{24}{25}$$

$13\cdot 5 = 65$

$$r^2 + 169 = (2R-r)^2$$

$$r^2 + 169 = (4R^2 - 4Rr + r^2)$$

$$169 = 4R^2 - 4Rr$$

$$169 = 4R^2 - 4R\cdot\frac{24R}{25}$$

$$4R^2 - \frac{96R^2}{25} - 169 = 0$$

$$\frac{4}{25}R^2 = 169$$

$$R^2 = \frac{13^2\cdot 5^2}{2^2}$$

$$R = \frac{65}{2}$$

$$r = \frac{24\cdot \cancel{65}^{13}}{\cancel{25}_5\cdot 2}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 24 \\ 13 \\ \hline 72 \\ 24\ \ \\ \hline 312 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cancel{\sin(\alpha+\beta)=}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2\cos^2\beta - 1) + 2\sin\beta\cos\beta\cdot(2\cos^2\alpha - 1) =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta.$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$9 - 6 = \sqrt{9-6-9+6}$

$9+36-18-72$

$9(x^2-2x+1) + (y^2-12y+36) = 90$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90.$

$x - 1 = a$

$y - 6 = b$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$3 = \sqrt{30-12-15+6}$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$6x - 6 \neq a$

$\cancel{y^2 - 12yx + 36x^2 = xy}$

$y - 6x + 6 - 6$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = x(y-6) - (y-6)$

$b - 6a$

$(y-6x)^2 = (x-1)(y-6)$

$\frac{9\cdot b^2}{(b+6)^2} + b^2 = 90$

$9a^2 + b^2 = 90$

$9b^2 + (b+6)^2 b^2 = 90(b+6)^2$

$ab = b - 6a$ $\quad$ $a(b+6) = b$ $\quad$ $a = \frac{b}{b+6}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)