МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

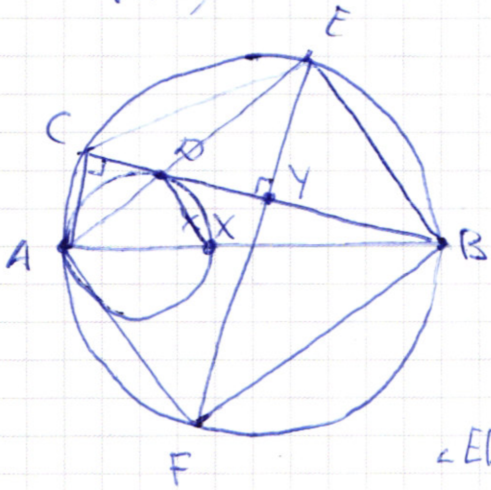
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. (1/2)



Пусть $AB \cap \omega = X$;
$FE \cap CB = Y$

Пусть $\angle CFE = \alpha$, $\angle AFC = \beta$.

$\angle ADX = \angle AEB = 90^\circ$ (тк AX, AB - диам)

$\Rightarrow \angle XDB = \angle EBD$ (из ~~вал~~ $EB \parallel DX$)

$\angle EBD = \angle CFE$ из впис, $\Rightarrow$

$\angle EBD = \angle XDB = \alpha$.

$\angle DAX = \angle XDB = \alpha$ (угол между хорд. и кас).

$\angle EFB = \angle EAB = \angle DAX = \alpha$ (впис.) $\Rightarrow$ тк $\angle AFB = 90^\circ$, а так же равен $\angle AFC + \angle CFE + \angle EFB = 2\alpha + \beta$, то $2\alpha + \beta = 90^\circ$. Тк $\angle EBC = \angle EFC = \alpha$ и $\angle ABC = \angle AFC = \beta$ и $\angle ABF = \angle AEF = 90^\circ - \angle FEB = \angle CBE = \angle FCE = \alpha \Rightarrow \angle EBF = 2\alpha + \beta = 90^\circ$. Из равенства $\angle DAX$ и $\angle ABF$, $AE \parallel BF$, также $CD \parallel BY$ и $AC \parallel FY \Rightarrow$ $\triangle ACD \sim \triangle FYD$ по 3 паралл. стор. $\Rightarrow$ (1) $\frac{CD}{AD} = \frac{YB}{BF}$.

Тк у $AEBF$, $\angle E$, $\angle B$ и $\angle F$ по 90°, $AEBF$ - прямоуг $\Rightarrow$ $AE = BF$. Из подобия $\triangle ADX$ и $\triangle AEB$ по 2 углам,

(2) $\frac{AX}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{BF}$. Из (1) и (2): $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{AX}{AD} = \frac{BF}{YB} \cdot \frac{AB}{BF} \Rightarrow$

(3) $\frac{AX}{CD} = \frac{AB}{BY}$. Тк $BEF = 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - \angle FCE = 90^\circ - \alpha$

и $\angle CEF = 90^\circ - \angle CFE = 90^\circ - \alpha$, ~~CEF~~

№4 (2/2) $\angle ECB = \angle EBC = \alpha + \beta \Rightarrow$ EY - медиана (тк $\triangle CEB$ - равноб. и EY - высота) $\Rightarrow$

$BY = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{\frac{17}{2} + \frac{15}{2}}{2} = 8$

$CD = \frac{15}{2} \Rightarrow$ из (3) $\frac{AX}{\frac{15}{2}} = \frac{AB}{8} \Rightarrow \frac{15}{2} AB = 8 AX \Rightarrow$

(4) $\frac{AX}{AB} = \frac{15}{16}$

$BD^2 = BX \cdot BA$ (степ. точки B окр. ω) $\Rightarrow$

(5) $BX \cdot BA = \frac{17^2}{2^2} = \frac{289}{4}$

$BX = \frac{289}{4AB}$

из (4) и (5): $\frac{289}{4AB^2} = \frac{15}{16}$

$\frac{4AB^2}{289} = \frac{16}{15}$

$AB^2 = \frac{4 \cdot 289}{15} \Leftrightarrow AB = \frac{2 \cdot 17}{\sqrt{15}}$

тк $AX + XB = AB$

и $\frac{AX}{AB} = \frac{15}{16}$,

$BX = \frac{1}{16} AB$

$\frac{1}{16} AB = \frac{289}{4AB} \Rightarrow \frac{AB^2}{4} = 289 \Rightarrow AB^2 = (2 \cdot 17)^2 \Rightarrow$

$AB = 34$, $AX = \frac{15}{16} \cdot 34 = \frac{17 \cdot 15}{8} \Rightarrow$

$r_\Omega = \frac{AB}{2} = 17$; $r_\omega = \frac{255}{16}$

$\triangle AEF = \triangle CFE$ по 2 углам и стороне $\Rightarrow S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ECF} = \frac{CY \cdot EF}{2} = \frac{8 \cdot 17}{2} = 68$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{30^2} = 30$ Тк ACEF равнобок. тр.

Опустим $AH \perp EF$ и ~~$CM \perp EF$~~, из симм, $FH = ME = \frac{34-30}{2} = 2 \Rightarrow$ $\operatorname{tg} \angle AFE = \frac{AH}{FH} = \frac{CY}{EY} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \angle AFE = \operatorname{arctg} 4$.

Ответ: $\angle AFE = \operatorname{arctg} 4$, $S_{\triangle AEF} = 68$; $r_\Omega = 17$; $r_\omega = \frac{255}{16}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. (1/2)

1) Из условия $f(x/y) + f(y) = f(x) \Rightarrow$

$$f(x/y) = f(x) - f(y)$$

2) Запишем ~~неко~~ значения $f(x)$ для x-простого и $2 \le x \le 25$:

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$;
$f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$

3) Заметим, что если некоторое составное число b такое, что $2 \le b \le 25$, то $b = 25$ или $\left[\begin{array}{l} b \vdots 2 \\ b \vdots 3 \end{array}\right.$,

тк ~~наименьшее~~ составное число, некратное 2 и 3 — 25 (тк. 5 — следующее простое после 3, а $25 = 5^2$).

4) ~~Тогда~~ $f(25) = f(5) + f(5) = 2$; а $f(b)$ для оставшихся:

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$
$f(8) = f(2) + f(4) = 0$
$f(9) = f(3) + f(3) = 0$
$f(10) = f(2) + f(5) = 1$
$f(12) = f(3) + f(4) = 0$
$f(14) = f(2) + f(7) = 1$
$f(15) = f(3) + f(5) = 1$
$f(16) = f(4) + f(4) = 0$
$f(18) = f(9) + f(2) = 0$

$f(20) = f(10) + f(2) = 1$
$f(21) = f(7) + f(3) = 1$
$f(22) = f(11) + f(2) = 2$
$f(24) = f(12) + f(2) = 0$.

Итого имеем аргументов таких, что значение ~~g~~ $f = 0$: — 10.

таких, что $f = 1$ — 7

$f = 2$ — 3

$f = 3$ — 1

$f = 4$ — 2

$f = 5$ — 1

№5 (2/2)

Тогда, чтобы $f(x/y)$ было <0, $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow$

$f(x) < f(y)$:

5) Пусть $f(x)=0$, таких 10.

Тогда $f(y)\geq 1$, а таких 14. $\Rightarrow$ пар $10\cdot 14=140$

Пусть $f(x)=1$, таких 7.

Тогда $f(y)\geq 2$, таких 7 $\Rightarrow$ пар $7\cdot 7=49$.

Аналогично,

$f(x)=2$, их 3 $\Rightarrow$ $f(y)\geq 3$, их 4 $\Rightarrow$ пар $3\cdot 4=12$

$f(x)=3$, их 1 $\Rightarrow$ $f(y)\geq 4$, их 3 $\Rightarrow$ пары 3.

$f(x)=4$, их 2 $\Rightarrow$ $f(y)\geq 5$, их 1 $\Rightarrow$ пары 2.

При $f(x)\geq 5$, $f(y)\leq 5 \Rightarrow f(x)\geq f(y) \Rightarrow$ пар 0.

Итого пар $\overset{189}{140+49}\overset{201}{+12}+3+\overset{2}{\cancel{4}}=206$

Ответ: 206.

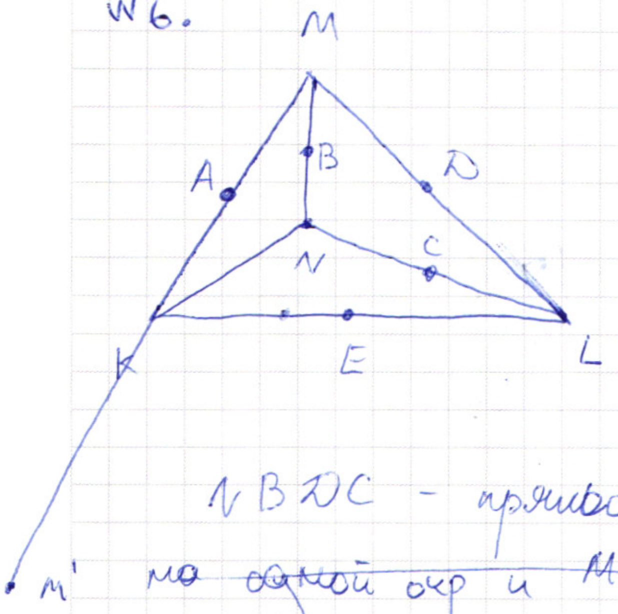
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



Пусть A, B, C, D, E – сер. KM, MN, NL, ML, KL соотв.
Известно, что плоскость высекает окружность на сфере. $\Rightarrow NBDC$ – впис. четырехугол, а так же параллелограмм $\Rightarrow$

$NBDC$ – прямоугольник. Так как ABN – лежат ~~на одной окр и~~ $\cancel{MB \cdot MN = MA^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1^2\right)}$, ~~то окр ABN кас. KM, то есть сфера кас. KM.~~

Пусть $MK \cap$ сферу $= M'$ (отличная от A)

тогда из. ст. точки M: $MM' = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2$, $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = MB \cdot MN$, $\quad MA = \frac{1}{2}$

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Замена, $t=x-6$; $p=2y-1$:

$$\begin{cases} t-6p=\sqrt{tp} \\ t^2+(3p)^2=90 \end{cases}$$

$\cancel{|t|>|7p|}$

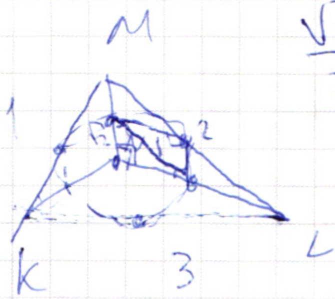
$\cancel{(7p)^2+(3p)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{9}{2}$

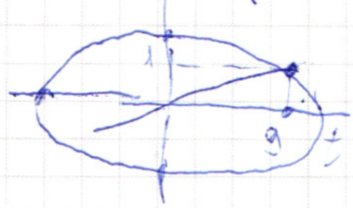
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$

$\frac{\sqrt{171}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{171}$

$85{,}5 \quad \frac{171}{2} \quad 9$

$p = 1$

$1 - \frac{4}{4x-5} \le ax + b \le -($



$t^2 - 12tp + 36p^2 = tp$

$t^2 - 13pt + 36p^2 = 0$

$t = 9, \ p = 1$

$t^2 - t + 9p^2 - 6p = 90 - \sqrt{tp}$

$-3 + 18 = 3 \quad 81 - 13 \cdot 9 + 36 = 0$

$81 \quad 9$

$9 \cdot 9 - 13 \cdot 9 + 36 = 0$

$t(t-1) + 3p(3p-2) = 90 - \sqrt{3p}$

$54 \quad 36$

$81 \quad (t-9)(p-1)$

$tp - 9p - t + 9$

$\sqrt{6 \cdot 9}$

9

$9p^2 - 36p^2 + 13pt = 90$

$5k^2 \ge 90$

$|t| > |6p|$

$-27p^2 + 13pt - 90 = 0$

$\Downarrow$

$k^2 \ge 18$

$5k^2 < 90$

$t > 6p$

$t = 9, \ k = 3$

$k^2 < 18$

$9 \quad t^2 + k^2 = 90$

$t > 2k$

$\Downarrow$

$4k^2 \quad t - 2k = \sqrt{\frac{tk}{3}}$

$t^2 > 4k^2 \Rightarrow$

t^2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\frac{17}{2}}{x} = \frac{y}{\frac{15}{2}}$ $\quad xy = \frac{15\cdot17}{4}$ $\quad \frac{8}{\frac{15}{2}} = \frac{R}{r} = \frac{16}{15}$

$\frac{15}{2} / 8 = y / x+y$

$\frac{15}{16} = \frac{y}{x+y}$

$xy = \frac{15\cdot17}{4}$

$x = \cancel{y}\ \frac{15\cdot17}{4y}$

$\frac{15}{16} = \frac{y}{\frac{15\cdot17}{4y}+y}$

$\frac{15}{16} = \frac{y}{\frac{4y^2+15\cdot7}{4y}}$

$(R-r)R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\frac{15}{16} = \frac{4y^2}{4y^2+15\cdot7}$

$R^2 - Rr = \frac{17^2}{4}$

$\frac{R}{r} = \frac{x+y}{y} = \frac{16}{15}$

$15\cdot7 = \frac{1}{16}\cdot\frac{4y^2}{4}$

$\times\ \frac{17}{15}$

$30\cdot8 + \cancel{15}\ 15\cdot7\cdot4 = y^2$

240

255

8

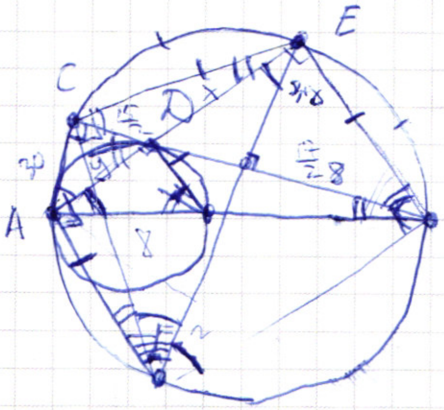
$y = 2\cdot\sqrt{15\cdot7}$

$x = \frac{15\cdot17}{8\cdot\sqrt{1517}} = \frac{\sqrt{15\cdot17}}{8}$

$\frac{t\cdot2 + t\cdot\frac{1}{8}}{2t} = 1 + \frac{1}{16}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$BD=\frac{17}{2}$ $CD=\frac{15}{2}$

$X = AB \cap \omega$

$BX \cdot BA = BD^2$

$DA \cdot DE = BD \cdot DC$

$tg(\alpha+\beta)\cdot CD = AC$

$tg(B)\cdot CB = AC$

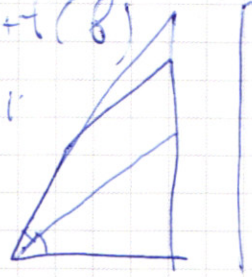
$CB = 16$

$AC = CB \cdot tgB$

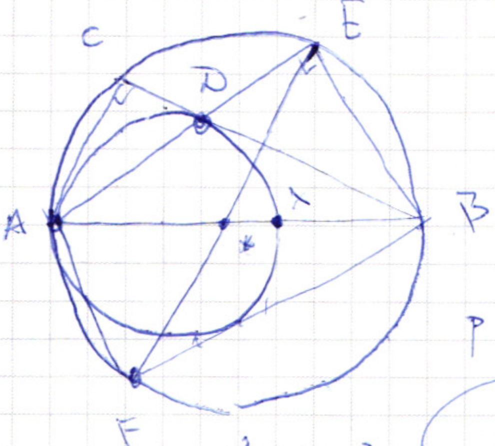
$\frac{tg\alpha + tgB}{1 - tg\alpha \cdot tgB}$

$f(p) = F$

$f(ab) = f(a) + f(b)$



$f(p) = [P/4]$



$(34-16)(34+16) =$

$= 50 \cdot 18$

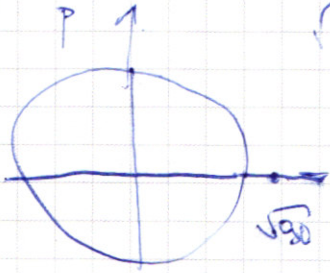
$AC = 3 \cdot 2 \cdot 5 =$

$= 30$

$\sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$\cos B = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

$\sin B = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$



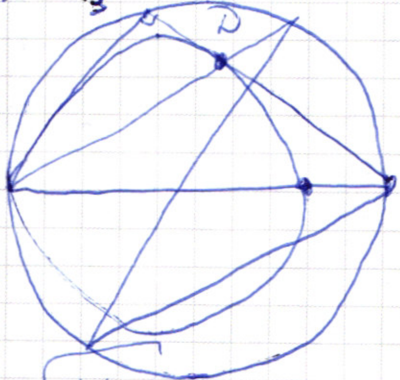
$\sin 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \sin$

$x(2y-1) - 6(-1+2y)$

$t^2 - 4kt + 4k^2 = \frac{kt}{3}$

$\sqrt{(x-6)(2y-1)}$



$2k < t$

$t > 2k$

$t > 6p$

$\times 17$
17
119
$170+$
289

$(x-6)^2 - 36 +$

$+ (6y-3)^2 - 9 = 45$

$t^2 - 12pt + 36p = tp$

$t^2 - 11pt + 36p = 0$

$36y^2 - 36y + 9$

$t(t-5p)$

$\begin{cases} t - 2k = \sqrt{\frac{kt}{3}} \\ t^2 + k^2 = 90 \end{cases}$

$x - 6 = t$

$2y - 1 = p$ $6p(36-6t)$

$9(4y^2 - 4y + 1)$

$\begin{cases} t - 6p = \sqrt{t \cdot p} \\ t^2 + 9p^2 = 90 \end{cases}$

$(3p)^2$

$k = 3p$

$(x-6)^2 + 9\cdot(2y-1)^2 = 90$

$x - 6 - 6\cdot(2y-1) = x - 12y$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть x, p – простые.

$f(x/y \cdot y) = f(x/y) + f(y) = f(x)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 0$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14, 15, 16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18, 20, 21, 22, 24, \cancel{2}) = 0$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(25) = 1$

$f(5) = 1 \Rightarrow$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(25) = 1$

24 числа

8 ненулевых

16 нулей.

3 по 1 $\Rightarrow$

$3 \cdot 16$

1 по 2 $\Rightarrow$

$1 \cdot 16 + 3$

1 по 3 $\Rightarrow$

$1 \cdot 16 + 3 + 1$

2 по 4 $\Rightarrow$

$2 \cdot (16 + 3 + 1 + 1)$

1 по 5 $\Rightarrow$

$1 \cdot (16 + 3 + 1 + 1 + 2)$