МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $a=x-2$, $b=y-1$. Тогда

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \text{ — не подходит} \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a=4b \\ 25b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-4 \\ y-1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$, $(-2;0)$

№5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$, где p - простое

$f(1)=2f(1)$, т.е $f(1)=0$.

$$\underset{0}{\overset{}{f(1)}}=f\left(\frac{t}{k}\right)+f\left(\frac{k}{t}\right)$$

т.е $f\left(\frac{t}{k}\right)=-f\left(\frac{k}{t}\right)$

Т.е $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right)=$

$=f(a)-f(b)$

Теперь найдем значения $f(m)$ для $m\in[1;24]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=2f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=2f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4.$

$f(18)=f(3)+f(6)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(4)+f(6)=0$

Для всех пар нат. чисел $(1;y)$, где $f(y)>0$ и $y\le 24$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)<0$$

Всего таких пар 13.

Пар нат. чисел $(x;y)$ таких, что $2\le x\le 24$ и $1\le y\le 24$, где $f(y)>f(x)$ (чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$):

а) x, у которых $f(x)=0$, 10. А y, у которых $f(y)>0$, 13.

По правилу произведения $10\cdot 13=130$

б) x, у которых $f(x)=1$, 7. А y, у которых $f(y)>1$, 6.

По правилу произведения $6\cdot 7=42$

в) x, у которых $f(x)=2$, 2. А y, у которых $f(y)>2$, 4

По правилу произведения $2\cdot 4=8$

г) x, у которых $f(x)=3$, 1. А y, у которых $f(y)>3$, 3.

Таких пар $1\cdot 3=3$.

д) x, у которых $f(x)=4$, 2. А y, у которых $f(y)>4$, 1

Таких пар $1\cdot 2=2$

По правилу суммы пар нат. чисел $(x;y)$ таких, что $1\le x\le 24$, $1\le y\le 24$ и $f(x/y)<0$: $13+130+42+8+3+2=$
$=198$

Ответ: 198

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

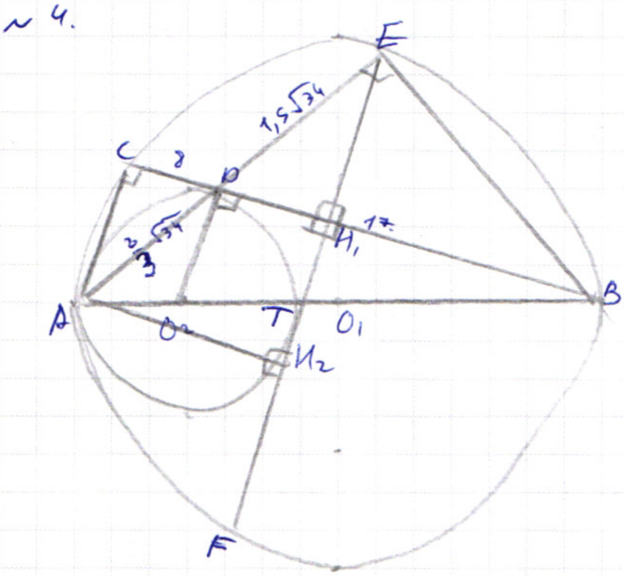
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



Дано: ~~окр-ти~~ AB - диаметр окр-ти Ω

$CD = 8$, $BD = 17$.

Найти: R_1 (рад окр-ти Ω)
R_2 (рад. окр-ти ω)
$\angle ABE$
$S_{\triangle ADE}$

Решение:

Т окр-ти Ω и ω имеют центры O_1 и O_2 соотв.

Точка касания A лежит на линии центров кас-ся окр-тей.

По теореме о кас-ной и секущей

$$BD^2 = AB \cdot TB$$

$$\cancel{28}\,289 = 2R_1 \cdot (2R_1 - 2R_2)$$

$$\frac{289}{4} = R_1^2 - R_1R_2 \quad (1)$$

Проведем CA. Т.к. $\angle ACB$ - вписанный и опирается на диаметр, то $\angle ACB = 90°$

Проведем DO_2 - радиус окр-ти ω
$DO_2 \perp CB$ (по св-ву кас-ной)

Тогда $\triangle DBO_2 \sim \triangle ACB$ (1 пр-к подобия)

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB}$$

$$\frac{17}{25} = \frac{2R_1 - R_2}{2R_1}$$

$$34R_1 = 50R_1 - 25R_2$$

$$R_1 = \frac{25R_2}{16} \quad (2)$$

Подставим (2) в 1:

$$\frac{289}{4} = \frac{625}{256}R_2^2 - \frac{25R_2^2}{16}$$

$$\frac{289}{4} = \frac{225}{256}R_2^2$$

$$R_2^2 = \frac{289 \cdot \cancel{256}\,64}{\cancel{4} \cdot 225}$$

$$R_2 = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$$

$$R_1 = \frac{\cancel{25}\,5}{\cancel{16}\,2} \cdot \frac{\cancel{136}\,17}{\cancel{15}\,3} = \frac{85}{6}$$

По т. Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{\frac{85^2}{9} - 25^2} = \sqrt{\frac{85^2 - 9 \cdot 25^2}{9}} = \frac{\sqrt{10 \cdot 160}}{3} = \frac{40}{3}$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{1600}{9} + 64} = \sqrt{\frac{2176}{9}} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$CD \cdot DB = AD \cdot DE$ (по т. о пропорциональных отр-ках в окр-ти

$$DE = \frac{CD \cdot DB}{AD} = \frac{\cancel{5} \cdot 17 \cdot 3}{\cancel{5}\sqrt{34}} = \frac{17 \cdot 3}{34_2}\sqrt{34} = 1{,}5\sqrt{34}$$

Проведем EB. Т.к $\angle AEB$ -вписанный и опирается на диаметр, то $\angle AEB = 90°$

~~По т. Пифагора~~ $EB = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 85^2}{36} - \frac{25^2}{36} \cdot 34} =$

$= \cancel{\frac{\sqrt{25 - 28900 - 21250}}{6}}$

$$\sin \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\sqrt{34} \cdot \cancel{3}}{\underset{2}{\cancel{6}} \cdot \cancel{25}\,17} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

$\angle AFE = \angle ABE$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу)

$$\cos \angle ABE = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ABE} = \sqrt{1 - \frac{25 \cdot 34}{34^2}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

Т.е $\angle AFE = \underline{\arccos \frac{3\sqrt{34}}{34}}$

Ↄ CB и EF пересекаются в H_1. Проведем $AH_2 \perp EF$.

$$\cos \angle ABE = \frac{EB}{AB} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

$$EB = AB \cdot \frac{3\sqrt{34}}{34} = \frac{85}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}\sqrt{34}}{34} = \frac{85\sqrt{34}}{34}$$

$EH_1 \perp CB$ (по усл.)

$2S_{\triangle DEB} = EH_1 \cdot DB =$

Ответ: $R_1 = \frac{85}{6}$, $R_2 = \frac{136}{15}$, $\angle AFE = \arccos \frac{3\sqrt{34}}{34}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ ~~$\sin 2\alpha + 4$~~

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \underbrace{(1+\cos 4\beta)}_{2\cos^2 2\beta} + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta \,(\underbrace{\cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha}_{= \sin(2\alpha+2\beta)}) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\quad$ 1сл $\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt5}{5}$

Тогда $\frac{2\sqrt5}{5} \cdot \sin 2\alpha + \frac{\sqrt5}{5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot \sqrt5$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1.$

$4\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha} = 0$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 0.$

$\cos\alpha\,(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ — не подходит, т.к тогда } \operatorname{tg}\alpha \text{ не определен} \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad | : \cos\alpha \text{ (здесь } \cos\alpha \neq 0\text{, т.к тогда бы } 2\sin\alpha = 0\text{, что противоречит } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1) \end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}.$

~~Получается меньше 3 значений. Что противоречит указанным. $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt5}{5}$ Но т.к. $\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}$~~

2сл $\sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = -\frac{\sqrt5}{5}$

Тогда. $\frac{2\sqrt5}{5} \cdot \sin 2\alpha - \frac{\sqrt5}{5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot \sqrt5$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha\ \cancel{+\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha=0$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha=0$$

$$\sin\alpha\,(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0.\\ \sin\alpha+2\cos\alpha=0\,|:\cos\alpha\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0.\\ \operatorname{tg}\alpha=-2\end{array}\right.$$

(* $\cos\alpha\neq0$, т.к. тогда бы $\sin\alpha=0$, что противоречит этому, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$)

При $\sin\alpha=0$ $\operatorname{tg}\alpha=0$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=0$, $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$\frac{2}{4x+3} \le ax+b-3 \le -8x^2-30x-20$

$f(x)=ax+b$

$f\left(-\frac{11}{4}\right)=-\frac{11}{4}a+b\le 2$

$-11a+4b\le 8$

$-\frac{3}{4}a+b\le -2$

$-3a+4b\le -8$

$-8a\le 16$

$a\ge -2$

$b\le -2$

$\begin{cases} -11a+4b=8 \\ -3a+4b=-8 \end{cases}$

$-8a=16$

$a=-2$

$b=-3,5$

$\left(\frac{2}{4x+3}\right)' =$

$=2\cdot\frac{-4}{(4x+3)^2}=$

$-\frac{8}{(4x+3)^2}$

22500

85·28900

7225

625 × 34

625 × 34 = 2500 + 1875 = 21250

№7 Осталось: 3 часа 23 мин.

7 задач. 1 и 2 перепис., 3 надо решить, 5 посм., 6 посмотреть, 4 посмотреть ещё.

$8x^2+30x+20$

$D=900-4\cdot 20\cdot 8=$

$=900-640=360$

$x=\frac{-30+6\sqrt{10}}{16}=\frac{-15+3\sqrt{10}}{8}$

$x=\frac{-30-6\sqrt{10}}{16}=\frac{-15-3\sqrt{10}}{8}$

$x_0=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

$-\frac{11}{4}=-2\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}$

$y_0=-8\cdot\frac{225}{64}+30\cdot\frac{15}{8}-20=$

$=-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-20=\frac{225}{8}-20$

$=\frac{65}{8}=8\frac{1}{8}$

$4x^2+15x+10=0$

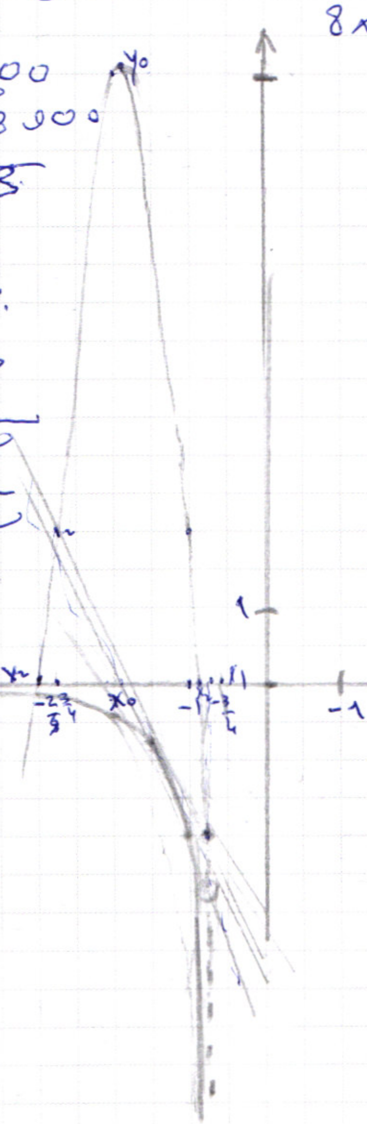
$D=225-4\cdot4\cdot10=65$

$x=\frac{-15+\sqrt{65}}{2}$

$\frac{-15+3\sqrt{10}}{8}\approx -\frac{3}{4}$

x_1

$\frac{-15-3\sqrt{10}}{8}>3$



$-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-20=2,5-4,5=-2$

$-2\frac{3}{4}$: $-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot11}{8}-20=\frac{165}{2}-20-\frac{121}{2}=22-20=2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{1532 \cdot 5 \cdot 8}$ $1530 : 5$ $\sqrt{\frac{7650}{6}}$

$34 \cdot 33 \cdot 55$. $306 \cdot 5 \cdot 5$ $\cancel{306} \cdot 25$ $\frac{\cancel{15} \cdot \sqrt{34}}{62}$

Решение:

Проведем AC. Т.к $\angle ACB$ опирается на диаметр, то $\angle ACB = 90°$

$DO_2 \perp CB$ (т.к CB – нас-ная к окр-ти, DO_2 – радиус этой окр-ти)

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (1пр-к подобия)

$\frac{DB}{CB} = \frac{BO_2}{BA}$ ①

$\frac{17}{25} = \frac{2R_1 - R_2}{2R_1}$

$CA = \sqrt{\frac{85^2}{9} - 25^2} =$

$= \sqrt{\frac{85^2 - 25^2 \cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{(85-75)(85+75)}{3}}$

$= \sqrt{\frac{10 \cdot 160}{3}} = \frac{40}{3}$

Проведем BE. Т.к $\angle AEB$ опирается на диаметр., то $\angle AEB = 90°$.

По т. Пифагора $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{1600}{9} + 64} =$

$= \frac{\sqrt{2176}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$\underset{AD}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} \cdot DE = \underset{8}{CD} \cdot \underset{17}{DB}$

$DE = \frac{\cancel{8} \cdot 17 \cdot 3}{\cancel{8} \cdot \sqrt{34}} = \frac{17 \cdot 3 \cdot \sqrt{34}}{34_2} = 1{,}5\sqrt{34}$

вписанной?

$\cos\angle ABE = \sqrt{1}$

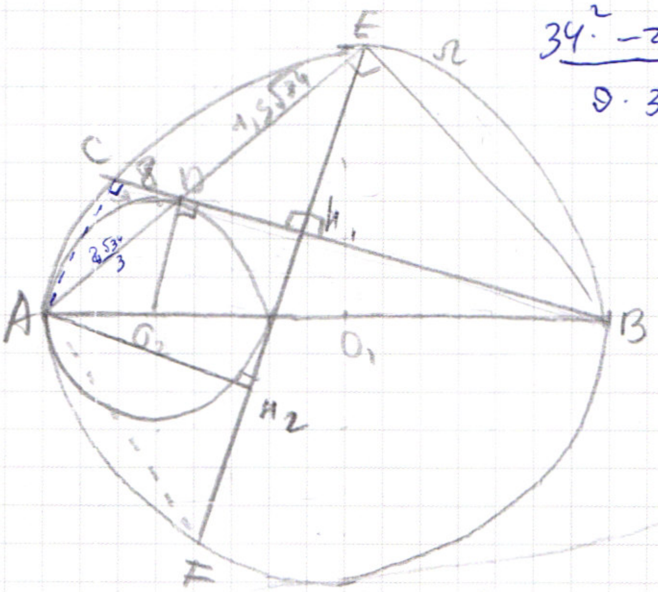
$\frac{34^2 - 25 \cdot 34}{9 \cdot 34}$

Осталось 2ч. 21 мин.

$\sqrt{\frac{25^2}{\cancel{36}9} - \frac{25^2}{36} \cdot 34} = \frac{325}{3} \frac{\sqrt{34}}{3}$

$= \cancel{4 \cdot 8} = \frac{25}{\cancel{3}} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{34}$

№4.



$EB = AB \cdot \cos\angle ABE =$

$BH^2 = 2R_1(2R_1 - 2R_2)$

$289 = 4R_1^2 - 4R_1R_2$

$\frac{289}{4} = R_1^2 - R_1R_2$

Точка касания лежит на линии центров касающихся окр-тей.

$\angle AFE = \angle ABE$

$\sin\angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{\cancel{25}3 \cdot \sqrt{34}}{\cancel{6} \cdot \cancel{25}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$(a+h)h = ah + h^2$

$(2R_1 - R_2)^2 - R_2^2 =$

$\cancel{4R_1^2 - 4R_1R_2 + R_2^2}$

① $\frac{17}{25} = \frac{2R_1 - R_2}{2R_1}$ (Подобие $\triangle BDO_2$ $\triangle BCA$)

$34R_1 = 50R_1 - 25R_2$

$16R_1 = 25R_2$

$R_1 = \frac{25}{16}R_2$

$\frac{289}{4} = \frac{625}{256}R_2^2 - \frac{25}{16}R_2^2$

$\frac{289}{4} = \frac{225}{256}R_2^2$

$R_2^2 = \frac{\cancel{256}64}{225} \cdot \frac{289}{\cancel{4}}$

$9 \cdot 64 = 576$

$R_2 = \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{136}{15}$

$1088 : 2 = 544 \cdot 4 = 136 \cdot 4 \cdot 4 = 34 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

$R_1 = \frac{\cancel{25}5}{\cancel{16}2} \cdot \frac{\cancel{8} \cdot 17}{\cancel{15}3} = \frac{85}{6}$

$\frac{8}{3} + \frac{3}{2} = \frac{25}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ p простое

$f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$ $\quad f(2) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0.$

$f(4) = 2f(2) = 0.$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0.$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0.$

$f(9) = 2f(3) = 0.$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0.$

$(x; y)$ нат.

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(18) = f(3) + f(6) = 0.$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4.$

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(4) + f(6) = 0.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{f\left(\frac{14}{7}\right) = -f\left(\frac{7}{2}\right) =}$

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right) = 0}$ $\quad f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right)$

5. 7. 10. 11 13

14 15 17 19. 20

21 22 23

$f\left(\frac{2}{y}\right) = \underset{0}{f(2)} + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right)$

$$\frac{f(ab)}{f\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{f(a) + f(b)}{f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)}$$

$-f(b)$

$$\frac{f(35)}{f\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{f(5) + f(7)}{f(5) + f\left(\frac{1}{7}\right)}$$

1

$\frac{f(5)}{f(35)} = \frac{1}{2}$

$\underset{0}{f(1)} = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) =$ $f(a) - f(b)$

$f\left(\frac{27}{5}\right) = -f\left(\frac{5}{22}\right) =$

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{20}{5}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right)$

$= f(4) = 0.$

$\underset{0}{f(1)} = f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{a}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = -f\left(\frac{b}{a}\right)$

Написать.

13 +

остался 1 час 16 минут.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{25}{6}\sqrt{34} < \frac{85}{3}$

$\frac{5\sqrt{34}}{2} < 17$

$5\sqrt{34} < 34$

$25 \cdot 34 < 34 \cdot 30$

№1 ?

$\angle AFE < 90^\circ$

№1. Остался 1 час 42 мин.

$2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

$\cos x(2\sin x + \cos x) = 0$

$\cos x = 0$ — не подходит.

$2\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\frac{\cos x}{2}$

$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$

№3.

1. $t > 0$.

2. $t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12} - t = 0$

$t^{\log_5 13 - 1} - t^{\log_5 12 - 1} - 1 = 0$

$t^{\log_5 \frac{13}{5}} - t^{\log_5 \frac{12}{5}} = 1$

Какие св-ва я знаю:

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$2^{\log_2 5} = 5^{\log_2 2}$

5

$5^{\log_{12}(x^2+12x)} + x^2 + 12x \geq (x^2+12x)^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12}(x^2+12x)} \geq (x^2+12x)\left((x^2+12x)^{\log_{12} 13 - 1} - 1\right)$

$(x^2+12x)^{\log_{x^2+12x} 5 \cdot \log_{12}(x^2+12x)} > 0$

$\log_{12} 13 - \log_{12} 12 \quad \log_{12}\frac{13}{12}$

$(x^2+12x)^{\log_{12} 5} \geq (x^2+12x)\left((x^2+12x)^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$

$(x^2+12x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geq (x^2+12x)^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\operatorname{tg}\alpha-?$

$\underbrace{\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\cos2\alpha\cdot\sin4\beta}+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cdot2\cos^2 2\beta+\cos2\alpha\cdot\underbrace{\sin4\beta}_{2\cos2\beta\cdot\sin2\beta}=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta\,\underbrace{(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}=-\frac{2}{5}$

$\frac{\cos2\beta}{\sqrt5}=\frac{2}{5}$ $\quad\cos2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$

A ~~$\sin2\beta=\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\sqrt{1-\frac{5}{25}}=$~~ $=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin2\beta=\sqrt{1-\frac{4\cdot5}{25}}=\frac{\sqrt5}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\cos2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1.$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+\cos2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\underbrace{\cos2\alpha}_{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}+\underbrace{1}_{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$

$3\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha=0. \quad :\cos^2\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-3=0.$

$t=\operatorname{tg}\alpha$

$t^2-2t-3=0.$

$\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=3\end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha=-1.$

$\operatorname{tg}\alpha=3$

$-?$

$2\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$

$\cos\alpha(2\cos\alpha+4\sin\alpha)=0.$

$\cos\alpha=0.$

~~$\operatorname{tg}\alpha=-2$~~

$2\sin\alpha+\cos\alpha=0.$ $\quad\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-\cancel{2y}x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\underline{198}$$

$$10\cdot 13+$$

$$\frac{0}{10}\cdot 13+\frac{1}{7}\cdot 6+$$

$$+\frac{2}{2}\cdot 4+1\cdot 3+25$$

$$=130+42+8+3+2=$$

$$=135$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

$$93(y-1)^2=25$$

$$] \ a=x-2 \qquad \underbrace{x-2y}=\overset{a}{x-2}-2\overset{b}{(y-1)}=$$

$$b=y-1. \qquad =x-\cancel{2}-2y+\cancel{2}=x-2y$$

$$a-2b.$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-4ba+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$153+55$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$a\ b\quad t^2-5t+4=0.$$

$$(t-4)(t-1)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} a=4b \\ 25b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a=b. \\ 10b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$$

не подх.

$$\begin{cases} a=-\sqrt{2{,}5} \\ b=-\sqrt{2{,}5} \end{cases} \quad \begin{cases} a=\sqrt{2{,}5} \\ b=\sqrt{2{,}5} \end{cases}$$

$$a\geq 2b.$$

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+12x)}+x^2+12x\geq (\underbrace{x^2+12x}_{>0\ \text{по ОДЗ}})^{\log_{12}13}$$

ОДЗ:

$$x^2+12x>0$$

$$x(x+12)>0$$

$+ \quad -12 \quad - \quad 0 \quad +$

$$5^{\log_5(x^2+12x)}$$

$$(x^2+12x)^{\log_{12}13}=\left(5^{\log_5(x^2+12x)}\right)^{\log_{12}13}=5^{\log_{12}(x^2+12x)\cdot\log_5 13}$$

$$(x^2+12x)=5^{\log_5(x^2+12x)}=5^{\log_{12}(x^2+12x)\cdot\log_5 12}$$

$$5^{\log_{12}(x^2+12x)}+5^{\log_{12}(x^2+12x)\cdot\log_5 12}\geq 5^{\log_{12}(12x+x^2)\cdot\log_5 13}$$

$$t=5^{\log_{12}(x^2+12x)} \qquad t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}-t^{\log_5 5}\leq 0.$$

$$t+t^{\log_5 12}\geq t^{\log_5 13} \qquad 13^{\log_{12}(x^2+12x)}-12^{\log_{12}(x^2+12x)}-5$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)