МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos(90-\alpha-\beta) =$

$= \cos((90-\alpha)-\beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$

$\cos(\alpha+\alpha) =$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

~~$1-2\cos$~~

~~$\sin^2\alpha$~~

$= 1-2\sin^2\alpha$

$1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$1-\sin^2\alpha$

$\sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

~~$(1-2\sin^2\alpha)(1-2\sin^2\beta) +$~~

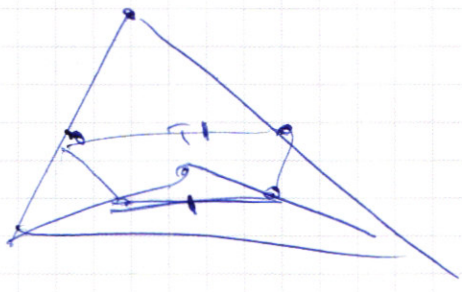
~~$+ \; 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot$~~

~~$(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\varphi + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

$2\beta = \varphi \qquad 2\alpha = \gamma$

$\sin(\gamma+\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(\gamma+2\varphi) + \sin\gamma = -\frac{2}{17}$



$\sin\gamma \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\gamma \cdot \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \cdot \cos\gamma + \sin\gamma = -\frac{2}{17}$

$\sin\gamma \cdot (1-2\sin^2\varphi) + 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\gamma + \sin\gamma = -\frac{2}{17}$

$AD^2 = (2R)^2 - 456$

$ED = \frac{BD\cdot DC}{AD}$

$BD = 13$

$CD = 12$

$(2R)^2 = 5^2\cdot 13^2$

$44+36 = 80$

$80+40 = 120$

$120+32+24 = 176$

56

$\sin\gamma \cdot \cos 2\varphi$

$\sin\gamma \cdot (1 - 2\sin^2\varphi) + 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\gamma + \sin\gamma = \frac{2}{17}$

$\sin\gamma\cdot\cos\varphi + \cos\gamma\cdot\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\gamma + \cos\gamma\cdot \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$9\cdot 6 = \cancel{36}\ 54$

$\cancel{17}\quad 51$

$17 \times 3 = 51$

$3 + 28 = 31$

$+18 \quad -18$

$9x^2 - 18x$

$(3x)^2 - 3\cdot 3\cdot 2x + (3)^2 =$

$= (3x - 3)^2$

$36 + 18 = 54$

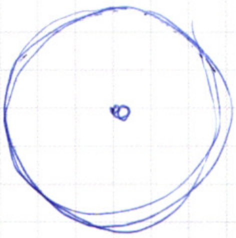
$(3x-3)^2 - 18 + y^2 - 12y = 45$

$(a-3)^2 + (y-6)^2 = 99$

$y^2 - 12y + 6^2 = (y-6)^2$

$54 + 45 = 99$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 45 + 36 + 18 = 99$



$y - 6x \geq 0$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$

$(y - 6x)^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - \cancel{12xy} + \cancel{36x^2}$

$xy - y + 6 - 6x =$

$= y(x-1) + 6(1-x) =$

$y^2 - 13xy + 36x^2 = (-6x - y + 6)$

$= (y-6)(x-1)$

$(y - 6x) + (6x + y) = 6 + xy$

$17 \times 17 = 289$

$28 \times 24 = 672$

$3x \to a$

$y - 2a = \sqrt{\frac{ya}{3} - 2a - y + 6}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

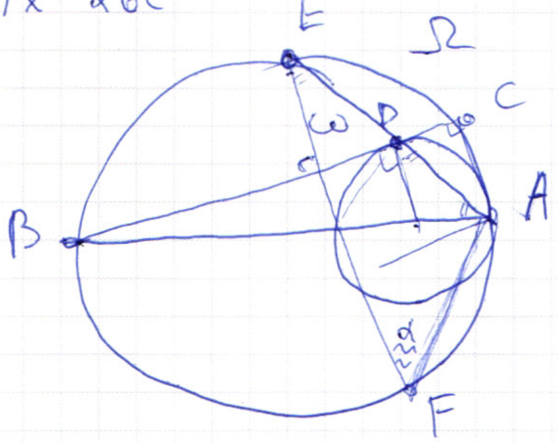
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

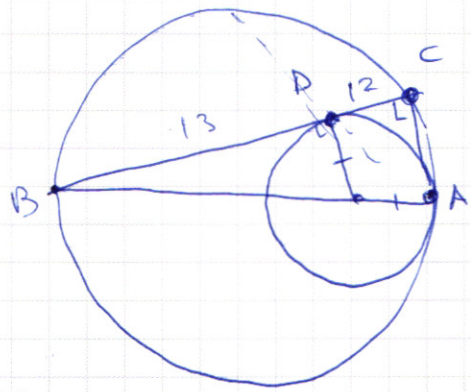
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

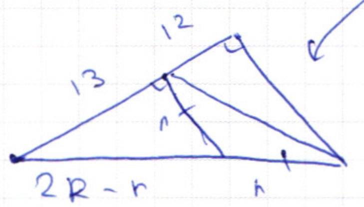
$\cancel{x^2 = 26}$



$CD = 12$

$BD = 13$





$\sqrt{4R^2-(25)^2}$

$\frac{13}{25} = \frac{2R}{2R-r}$

26 50

$2R\cdot 13 = 25\cdot 2R - 25r$

$25r = 24R$

$r = \frac{24}{25}R$

$\frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R} =$

$= \frac{r}{\sqrt{4R^2-25^2}}$

$\frac{\frac{24}{25}R}{\sqrt{4R^2-25^2}} = \frac{13}{25}$

$\frac{\left(\frac{24}{25}\right)^2\cdot R^2}{4R^2-25^2} = \frac{13^2}{25^2}$

$25\cdot 25 = 625$; $13\cdot 13 = 169$

$625 - 169 = 456$

$50-26=24$

26

$15\cdot 13 = 195$

$13\cdot 12 = 156$

$13\cdot 12 = 156$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r|l} 456 & 2 \\ 228 & 2 \\ 114 & 2 \\ 57 & \end{array}$$

$2^3 \dots$

$\frac{a}{b} = c$ $a = bc$

$f(a) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$

$\times\frac{13}{13}$ 39 13 169

$f(a) = f(c) + f(b)$

$f(c) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(a) - f(b) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(c) =$

$= f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) =$

$= \alpha_1\left[\frac{q_1}{4}\right] + \dots$

$\times\frac{169}{25}$ 845 338 4225

3769

4225 -456 3769

$\times\frac{33}{33}$ 99 99 1089

$\times\frac{13}{13}$ 39 13 169

$\times\frac{23}{23}$ 69 46 529

$f(a) = 0$ $f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$

$\left[\frac{27}{4}\right] = 7$

$4{,}5$

$f\left(\frac{a}{b}\right)$

$\times\frac{53}{53}$ 159 265 2809

$\times\frac{73}{73}$ $\times\frac{63}{63}$

$\cancel{f\left(\frac{1}{b}\right) =}$

$f(ab) =$
$= f(a) + f(b)$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$= \cancel{f(1) + f\left(\frac{1}{b}\right)}$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$f\left(\frac{b}{b}\right) = 0 =$

$= f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$\cancel{f}$ $\cancel{= f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)}$

$\frac{29}{4}$ 7

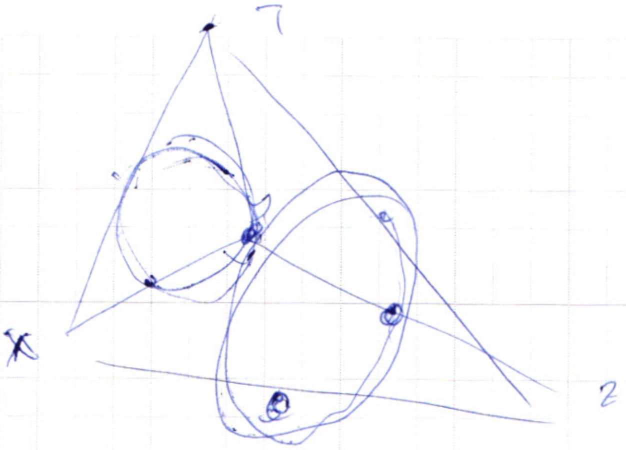
$28 - 4 = 24$

25

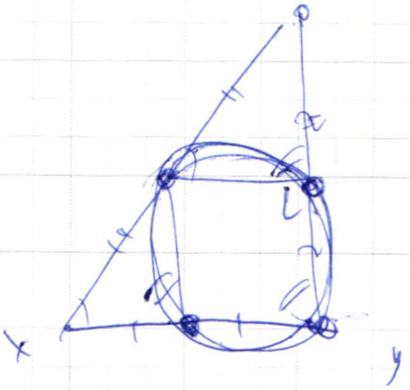
$f(x) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \dots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$

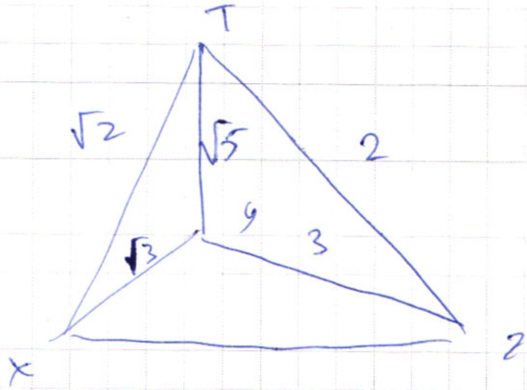
☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

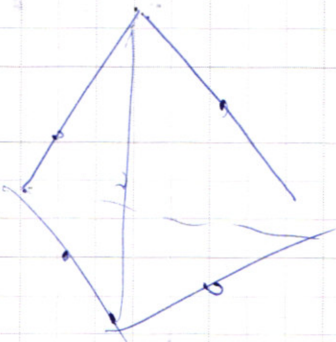


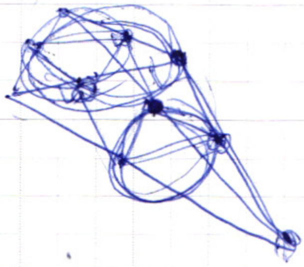
$2+3=5$

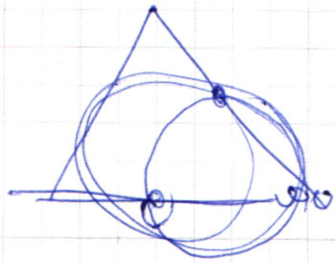


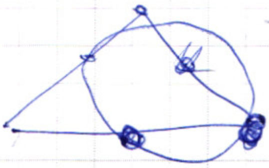


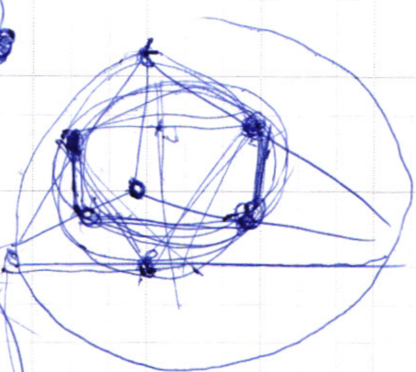
$4+5=9$











МФТИ

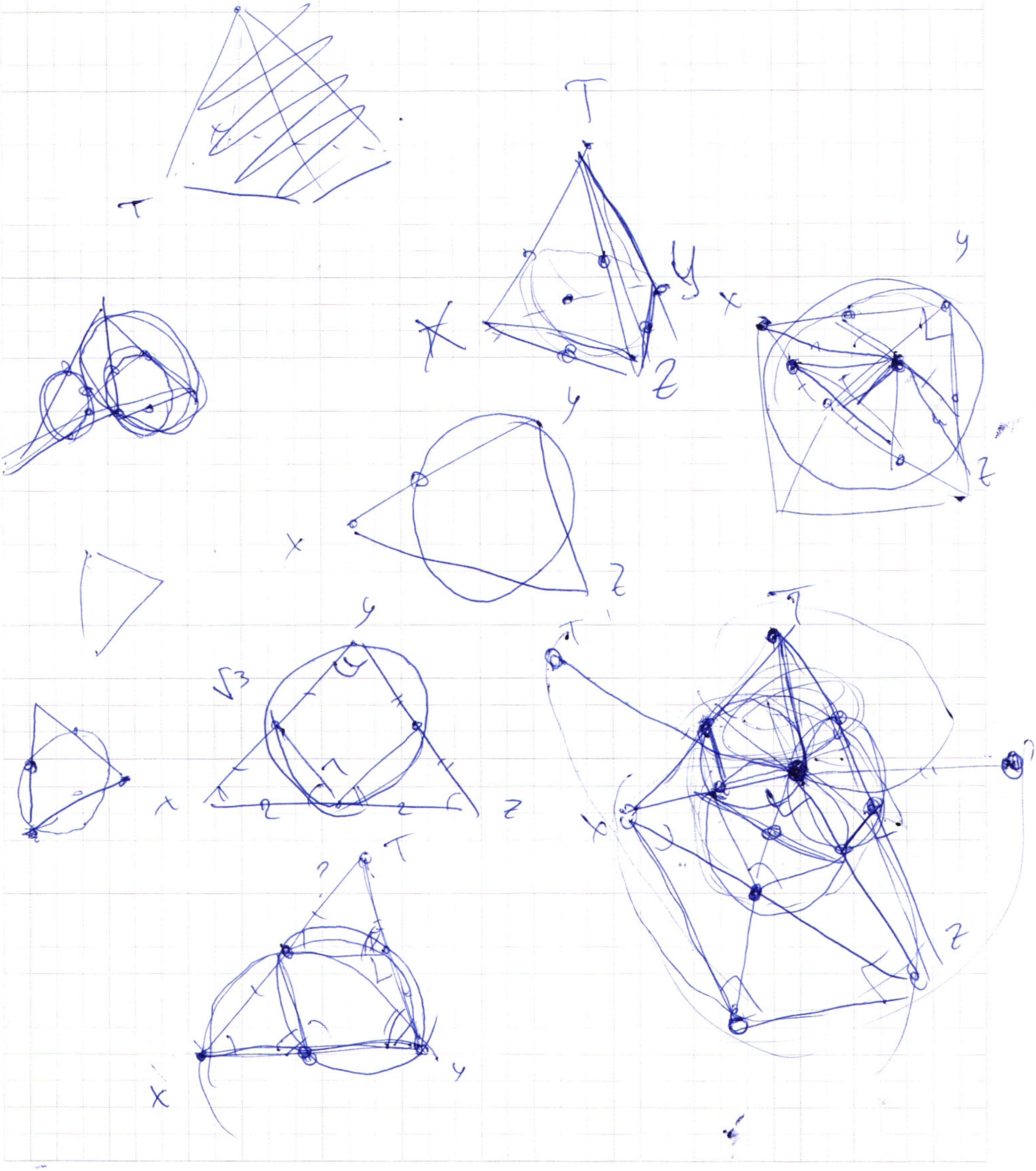
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

18×2 36

$\frac{8-12}{6-2} = -1$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+6 \geq 18x^2 - 51x + 28$

$36\cdot 2 - 51\cdot 2$

$8-6x \geq (3x-2)(ax+6)$ $3x-2 \neq 0$

$51 - 36 = 15$

$8-6x \geq 3ax^2 - 2ax + 3x6 - 2b$ $-6x+4$

$-3ax^2 + 2ax - 3x6 - 6x + 8 - 2b \geq 0$

$15\cdot 2 = 30$

$-30+28=-2$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{(3x-2)(-2)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$8-34+28 = 36-34 = 2$

$51/3 = 17$ $3x = z$ $x = \frac{2}{3}$

$6\cdot 9 - 17\cdot 3 + 28 = 31$

$\frac{2}{3}$, 2

$6\cdot 12 - 17\cdot 6$

~~$36\cdot 2 - 17\cdot 6$~~

$-5\cdot 6 + 28$

$-2 + \frac{4}{z-2} \geq \frac{a}{3}z + 6 \geq 2z^2 - 17z + 28$

$24+28-17$

$6\cdot 36 = 216$ $2\cdot 18$

$\frac{4}{3}$

$17\cdot 6 = 102$

$\frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot 2\cdot 28}}{6\cdot 2} =$

$6k+b=-2$

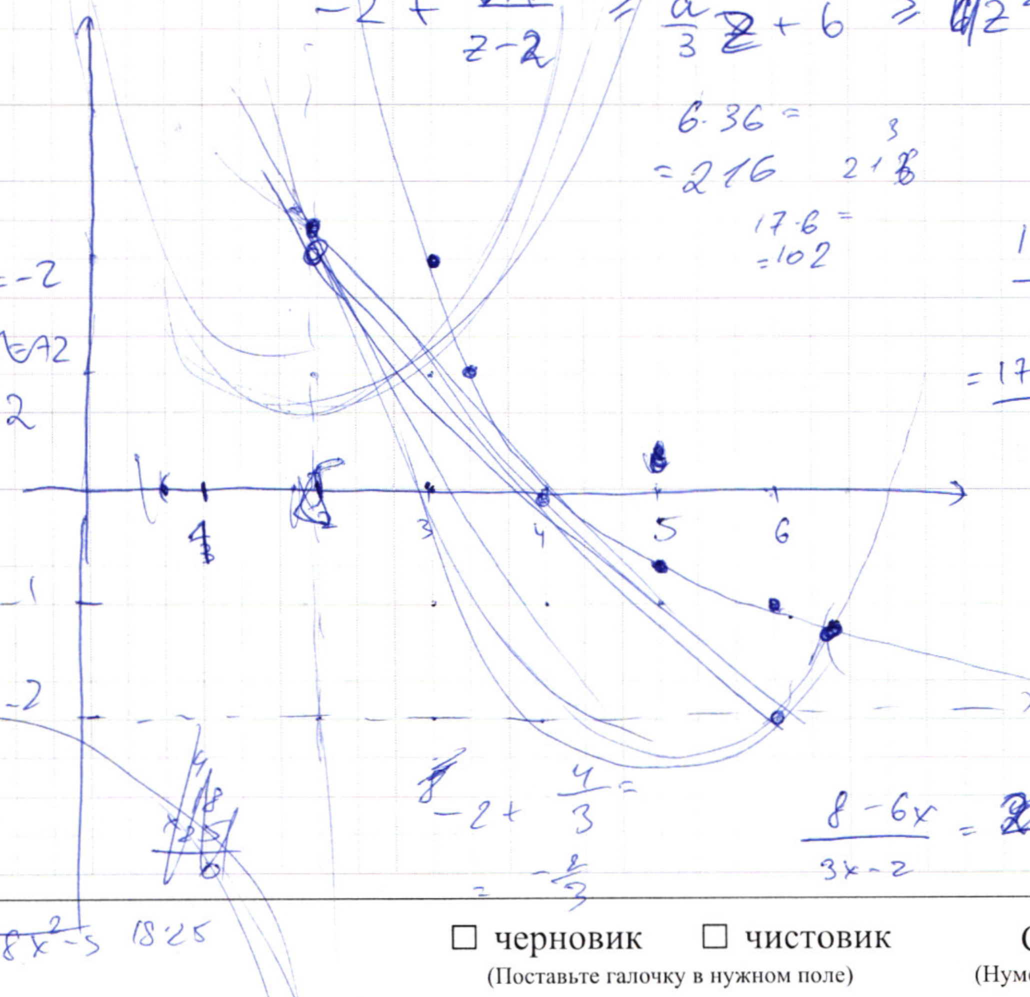
$6k+b=-2$

$2k+b=2$

$-4k=4$

$k=-1$

$= \frac{17\pm\sqrt{5}}{2}$ $D<0$ $\frac{17}{12}$



$\frac{5}{12} = \frac{2{,}5}{3}$ 6

$-2(3x-2) =$ $28 \times 5 = 22\,4$

$-6x+4$

$6x-6$

$51 \times 5 = 255$

18×25

$-2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

$\frac{8-6x}{3x-2} = 2+6$

$17 \times 17 = 119\ 17\ 229$

$18x^2 - 5$ $18\cdot 25$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

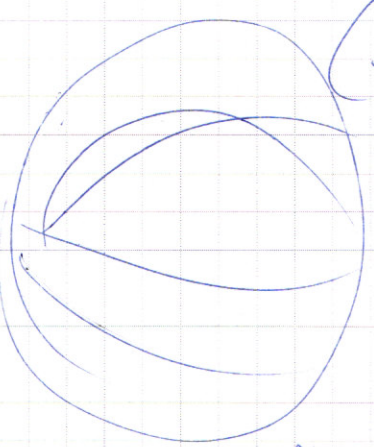
(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(5^{\log_5 13})^{\log_5(26x-x^2)}$

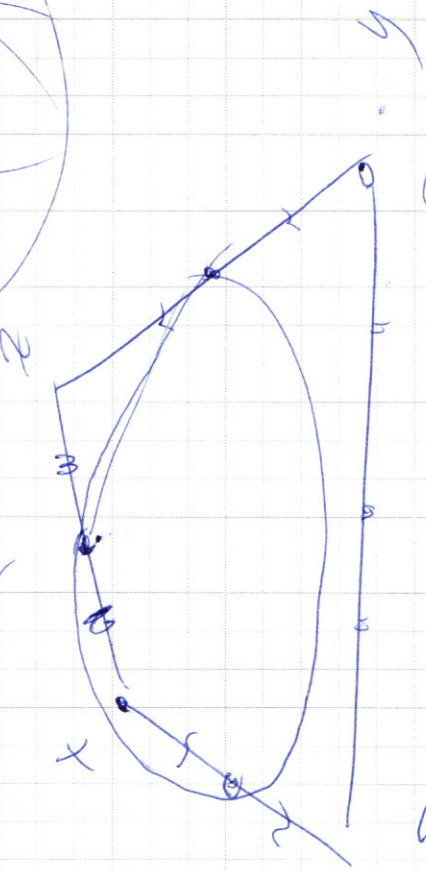


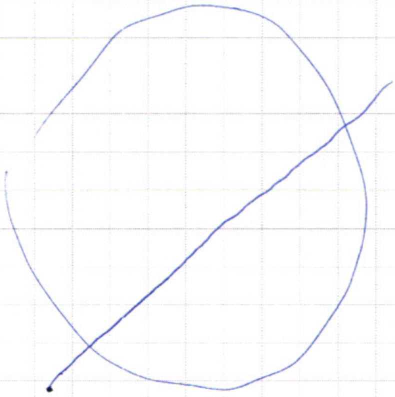
$(5^{\log_5 13})^{\log_5(26x-x^2)} =$

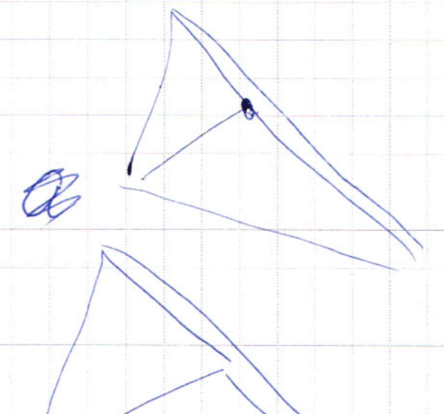
$=(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$18-54+8$

$\frac{8-6}{3-2}=\frac{2}{1}$

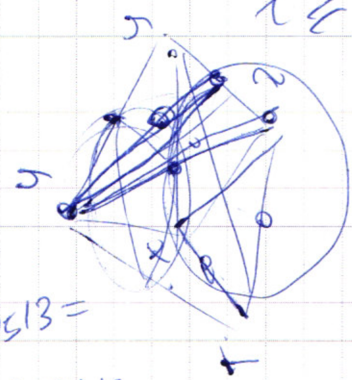


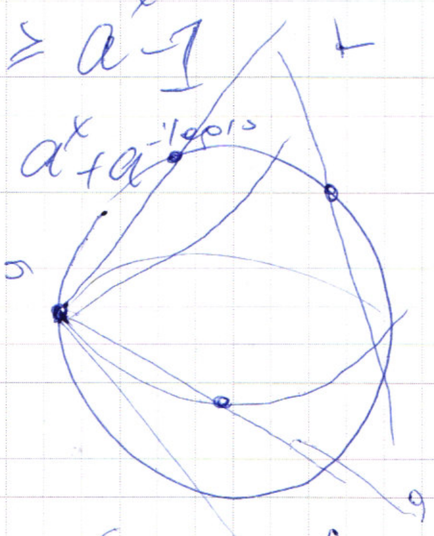




$\frac{1}{a^{\log_5 12}}=a^{-\log_5 12} \geq a^x-1$

$1 \geq a^x+a^{-\log_5 12}$

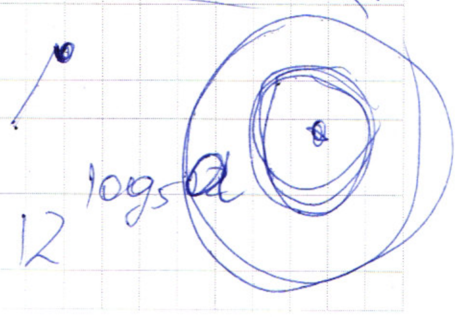




$\log_5 13=$

$=\log_5 12+x$

$a^{\log_5 12}=(5^{\log_5 a})^{\log_5 12}=12^{\log_5 a}$



$a^{\log_5 12}(a^x-1)$

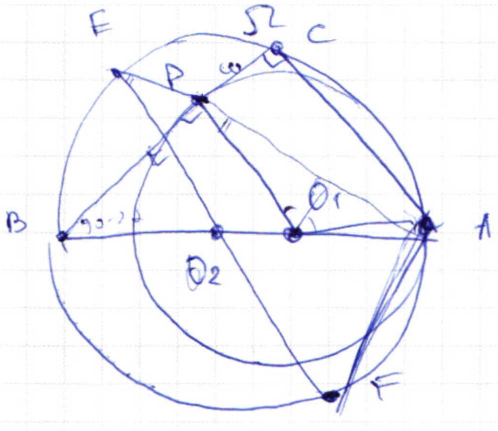
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N4 $BD = 13$ $CD = 12$

O_1 - центр ω. O_2 - центр Ω

$\angle BCA = 90^\circ$ (т.к. BA - диаметр)

$\angle BDO_1 = 90^\circ$ (касательная)

$DO_1 = O_1A = r$ радиус ω.

$AB = 2R$ R - радиус Ω

$DO_1 \parallel CA \Rightarrow$

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{13}{13+12} = \frac{13}{25} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$2 \cdot 13R = 25 \cdot 2R - 25r$$

$$25r = 24R$$

$$r = \frac{24}{25}R$$

Теорема Пифагора $\triangle DCA$

~~D^2F~~

$DC^2 + AC^2 = AD^2$

~~12^2+~~

$AC^2 = AB^2 - BC^2$ (теор. Пифагора $\triangle ABC$)

$AD^2 = AB^2 + DC^2 - BC^2 =$

$= (2R)^2 + 13^2 - (25)^2 =$

$= (2R)^2 + 169 - 625 = (2R)^2 - 456$

Степень точки D отн. окр Ω:

$ED \cdot AD = BD \cdot DC$

$$ED = \frac{BD \cdot DC}{AD}$$

Теорема Пифагора для $\triangle BDO_1$

$BD^2 + DO_1^2 = BO_1^2$

~~$13^2 + (2R - r)^2 =$~~

$13^2 + r^2 = (2R - r)^2 =$

$= 4R^2 - 4Rr + r^2$

$13^2 = 4R^2 - 4Rr =$

$= 4R^2 - 4R^2 \cdot \frac{24}{25} =$

$= (2R)^2 \left(\frac{1}{25}\right)$

$(2R)^2 = 5^2 \cdot 13^2$

$2R = 5 \cdot 13$

$$\boxed{R = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{195}{2} \qquad r = \frac{5 \cdot 13}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}}$$ Ответ

☐ черновик   ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{AD^2 = 5^2 \cdot 13^2 - 456 = 4225 - 456 = 3769}$

$\cancel{ED =}$

Сделаем гомотетию с центром в A и с коэф. $\frac{R}{r}$.

тогда $\omega \to \Omega$. $D \to E$. $O_1 \to O_2$

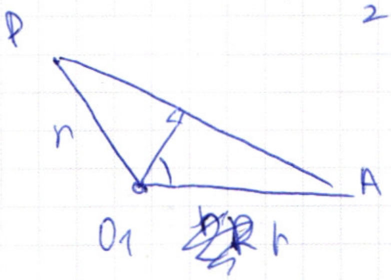
$DO_1 \to EF$.

Значит $O_2 \in EF$. $\to$

$\angle EAF = 90^\circ$, т.к. EF диаметр.

$\angle DO_1A = \angle EO_2A = 2\angle AFE$ (центральный угол)

$\angle AFE = \frac{\angle DO_1A}{2}$



$\sin \angle \frac{DO_1A}{2} = \sin \angle AFE =$

$= \frac{AD}{r} = \frac{\sqrt{(2R)^2 - 456}}{\frac{24}{25}R} =$

$= \frac{\sqrt{5^2 \cdot 13^2 - 456}}{\frac{24}{25} \cdot \frac{192}{2}}$

ответ

$$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5^2 \cdot 13^2 - 456}}{\frac{24}{25} \cdot \frac{192}{2}}\right)$$

(т.к. AFE прям.)

$$S_{AFE} = \sin_{AFE} \cdot \cos_{AFE} \cdot \frac{2R}{2} = \sin_{AFE} \cdot \cos_{AFE} \cdot R =$$

$$= \frac{\sqrt{5^2 \cdot 13^2 - 456}}{\frac{24}{25} \cdot \frac{192}{2}} \cdot \left(1 - \frac{5^2 \cdot 13^2 - 456}{\left(\frac{24}{25} \cdot \frac{192}{2}\right)^2}\right) \cdot \frac{192}{2}$$

ответ?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

n - натур. число
$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ← разложение на простые множители.

Докажем, что $f(n) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_k\left[\frac{p_k}{4}\right]$ для любого n.

Это так, потому что будем выделять по одному множителю.

$$f(n) = f\left(p_1 \cdot \frac{n}{p_1}\right) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + f\left(\frac{n}{p_1}\right) =$$

$$= 2\left[\frac{p_1}{4}\right] + f\left(\frac{n}{p_1^2}\right) + f \dots = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + f\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) =$$

$$= \dots = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_k\left[\frac{p_k}{4}\right].$$

Заметим, что $f(1) = 0$, т.к. $f(n) = f(n) + f(1)$

$$f\left(\frac{n}{n}\right) = f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = 0 \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(n) =$$

$$= -\left(\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_k\left[\frac{p_k}{4}\right]\right)$$

~~На~~ $g(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$. (введём функцию $g(x)$) будем использовать её только для простых.

Найдем значение функции $q(x)$ для всех простых от ~~1~~ 2 до 28.

$q(2)=0$ $\quad q(7)=1$ $\quad q(17)=4$ ~~q(2~~

$q(3)=0$ $\quad q(11)=2$ $\quad q(19)=4$

$q(5)=1$ $\quad q(13)=3$ $\quad q(23)=5$

Тогда все остальные числа получаются линейной комбинацией этих.

$x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$y = r_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot r_k^{\beta_k}$

разложение x и y

(обозначение не совпадают с началом решения. это новые)

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$\alpha_1 \cdot q(p_1) + \ldots + \alpha_n \cdot q(p_n) <$

$< \beta_1 q(r_1) + \ldots + \beta_k q(r_k)$ ← Нужно найти все такие x, y:

~~максимального значение~~ ~~$f(x) = f(28) = 3 \cdot 2 = 6$~~ ~~(легко доказывается перебором)~~

Двойки тройки не влияют на значение. $5 \cdot 5 = 25 < 28$.

Далее любые комбинации двух и более простых ≥ 5 будет больше 28. ($7 \cdot 5 = 35$). Поэтому у всех чисел будет значение их макс. простого (кроме $f(25) = 2 \cdot f(5) = 2$.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Знаем макс. значение $f(x) = f(23) = 5$.

$f(x) = 5$ (когда $x = y$ $f(\frac{x}{x}) = 0$, поэтому далее не рассматриваем).

для y 0 значений, т.к. $f(x) = 5$ достигается только при 23.

$f(y) = 5$. Все значения x кроме 23 подходят.

получаем пары:

$(4, 23), \ldots (22, 23), (24, 23) \ldots (28, 23)$

24 пары.

Без 23. максимум 4.

Достигается только при $f(17) = 4$ $f(19) = 4$.

уже без 23, поэтому, если $x = 17, 19$, то новых пар нет.

Если $y = 17$ и 19, то x любой кроме 17, 19, 23.

новых пар: $4 - 28 = 25$ $25 - 3 = 22$

и умножаем на 2 так как и 17 и 19.

44 пары.

без 17, 19 и 23.

$f(13) = 3$ $f(26) = 3$

Аналогично:

$2 \cdot ((28 - 3) - 3 - 2) = 40$ пар новых.

без 17, 19, 23, 13, 26.

$f(11) = 2$ $f(22) = 2$.

$2((28-3) - 3 - 2 - 2) = 36$ новых пар

$f(y)=1$ Без $11, 13, 17, 19, 22, 23, 26$

$y = 7$ и 5.

новые пары:

$2((28-3)-3-2-2-2)=$

$=2((28-3)-7-2)=2\cdot 16=32$ новые.

$f(y)=0$ решений новых нет.

(Все это время кол-во пар считалось как общее кол-во разл. x — минус те которые мы выкинули).

суммарно

$S = 24+44+40+36+32 = 176$ пар

Ответ: 176 пар.

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

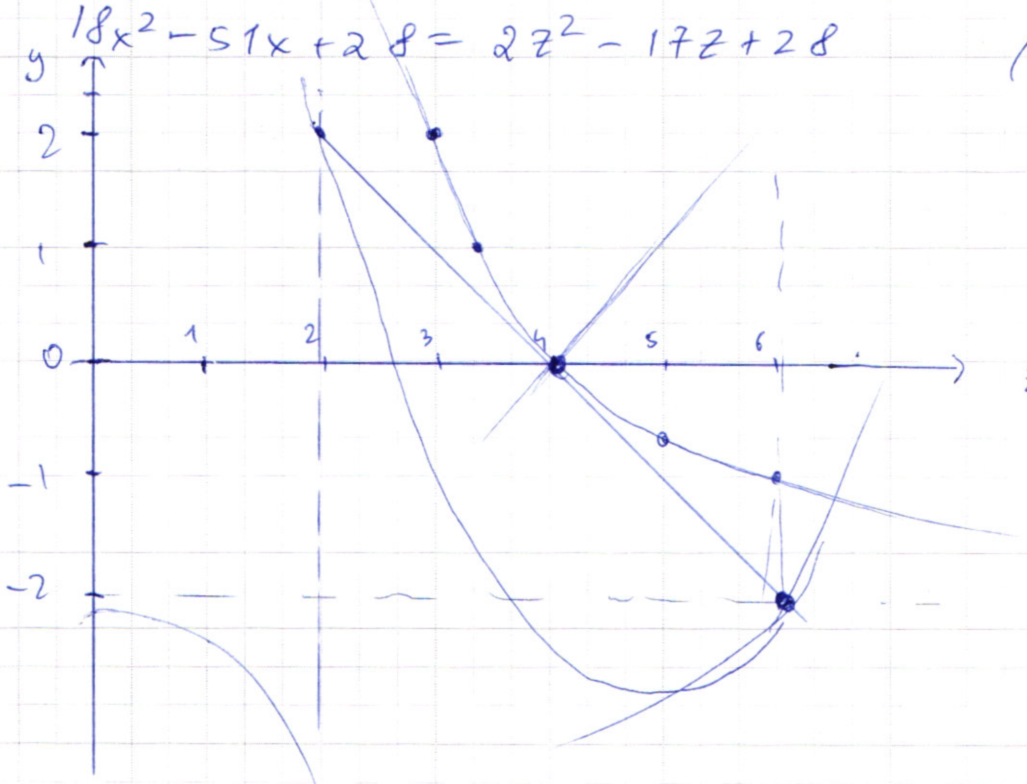
№6

$z = 3x$ (Замена переменных)

(ОДЗ входит в зн. x)

$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{8-2z}{z-2} = \frac{4+2(2-z)}{z-2} = -2 + \frac{4}{z-2} \quad (z \in (2,6])$$

$$18x^2 - 51x + 28 = 2z^2 - 17z + 28$$



(парабола условно нарисована)

~~Знаме~~ парабола $f(z)$
гипербола $g(z)$

Вершина $f(x)$ – $\frac{17}{4}$, то есть между гиб. Ветви вверх. Поэтому парабола выглядит так

$f(z) = 2z^2 - 17z + 28.$ $\quad g(z) = -2 + \frac{4}{z-2}$

$f(6) = -2$ $\quad g(4) = 0$

$f(2) = 2$ $\quad g(3) = 1$

$g(5) = -\frac{2}{3}$

прямая должна проходить через точки $(6,-2)$ $(2,2)$ или выше них. Проведем крайнюю через них.

Она проходит через точку $(4,0)$
её козф. -1. поэтому она касается $g(z)$
в этой точке. так-как гипербола симметрична
относительно прямой $y=4+z$.
и эта прямая тоже и у них есть общая точка 4.
Понятно, что если мы проведем прямую
выше, то она уже будет касаться
гиперболы. Поэтому это единственная,
которая подходит.

$y=-z+4$

$y=ax+b=\frac{a\cancel{z}}{3}+b=-z+4$

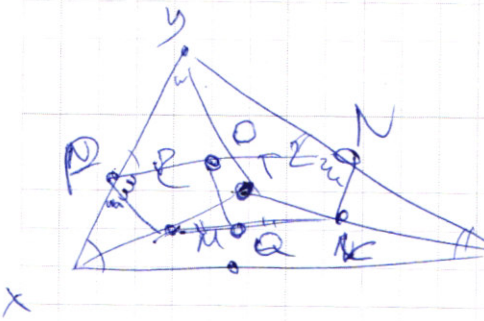
$b=4 \quad a=-3$

Ответ: $-3, 4$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

N7

Плоскость xyz



O - середина RN.

Это утверждение (центр сферы =)

$OM = ON$

$MK \parallel XZ$.

OM

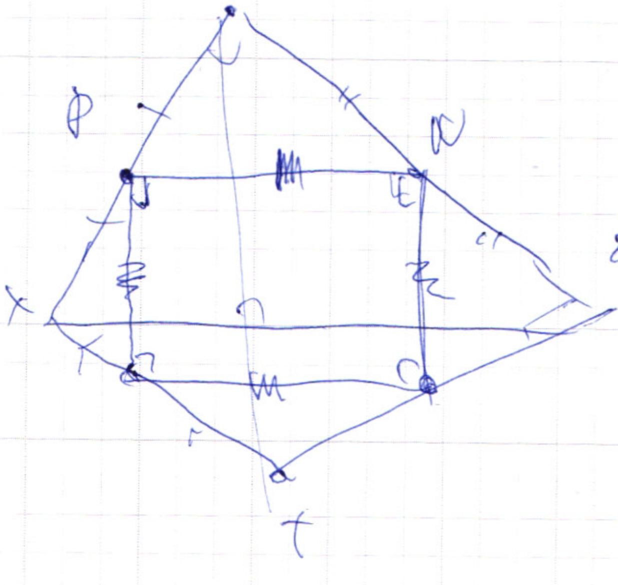
Q - середина MK.

QO - сер. пер. MN и RN. =)

PNMN - равнобокая трапеция

$PN = \frac{XZ}{2} = MK$ =)

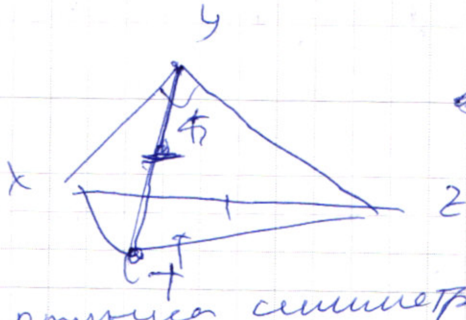
PNMK - ромб (т.к. PN // XR, то квадрат)

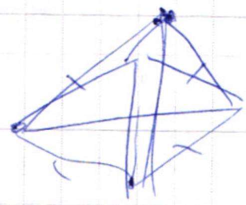


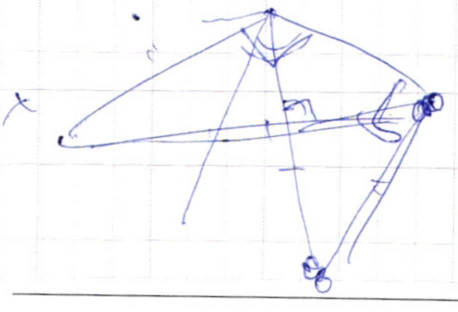
=) проекция ~~YT~~ =

$YT = XZ$

$YT \perp XZ$ (проекция TT







картинка симметрична

YT ~~= XZ~~ поэтому ~~X~~Y = ZT проекция

и $YZ \perp ZT$

аналогично $xy \perp XT$

это квадрат

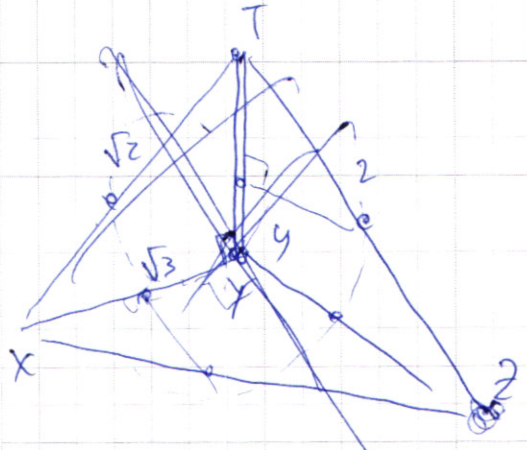
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N 7

Распишем теорему Пифагора для Δ.

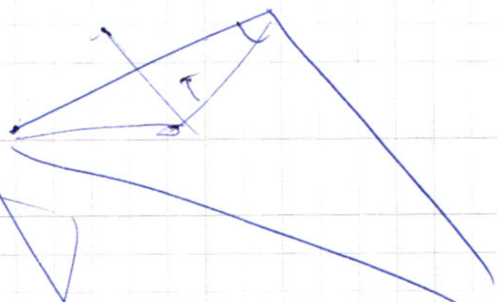
ΔXYT: $XT^2 = TY^2 + XY^2$

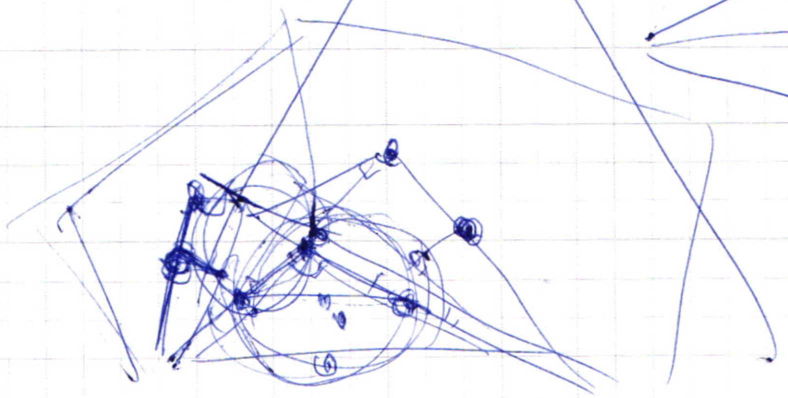
$TY =$ ·

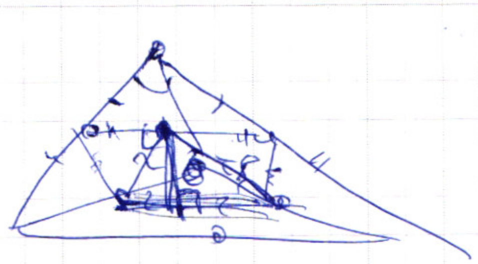
Аналогично

T ∈ плоскости TYX. ⇒

T ∈ ~~пря~~ прямой ⊥ XYZ через Y.







ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$ ~~(т.к.~~

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$13^{\log_5(26x-x^2)}=\left(5^{\log_5 13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}=$$

$$=(26x-x^2)^{\log_5 13}$$

$26x-x^2=a$ $(a>0)$

$$a^{\log_5 12}+a \geq \cancel{13}\, a^{\log_5 13} \quad |:a$$

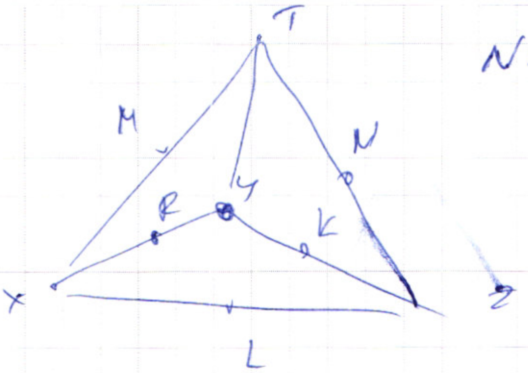
$$a^{(\log_5 12-1)}+1 \geq a^{(\log_5 13-1)}$$

$$1 \geq a^{(\log_5 13-1)}-a^{(\log_5 12-1)}$$

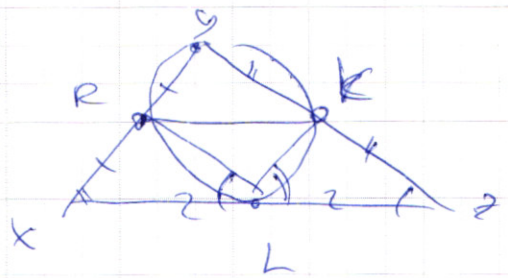
① ~~Если $a<1$, то неравенство верно не верно,~~ т.к. оба ~~меньше~~ 1, ~~но больше~~

② $a>1$

№7 M, N, K, L, R – середины XT, TZ, YZ, XZ, XY.



Посмотрим сечение XYZ.



R, K, L, Y лежат на одной сфере => на окр. в сечении.

$\angle RLX = \angle YZX$ (из ∥)

$\angle KLZ = \angle YXZ$

~~$\angle RLK = 180 - \angle YZX - \angle YXZ$~~

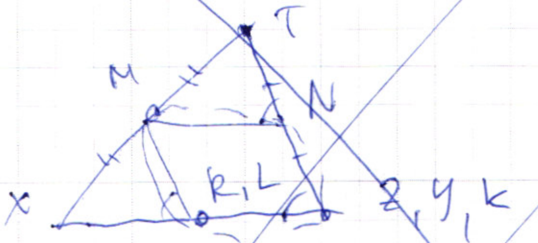
$\angle RLK = 180 - \angle YZX - \angle YXZ = \angle XYZ$

~~$\angle XYZ =$~~
~~$= 180 - \angle YXZ - \angle YZX =$~~
~~$= 180 - \angle RLK - \angle YZX + \angle YZX$~~

$\angle XYZ = 180 - \angle RLK = 180 - \angle XYZ$ =>
(из впис.)

$\angle XYZ = \frac{180}{2} = 90^\circ$.

~~Рассмотрим сечение XYT.~~



~~т.к. $\angle XYZ = 90^\circ$, то Z, Y, K совпадут. R, L совпадут. окр MRY и окр NKL имеют один центр (т.к. одна сфера). Значит в проекции на XYT эти окружности совпадают. (т.к. есть совпадающие точки, а центр один).~~

~~=> M, N, R, Y лежат на одной окр.~~

~~$\angle TZX = \angle MNT = \angle MRX$ (из ∥)~~

~~$\angle MNY = 180 - \angle MRY = 180 - \angle XYZ - \angle TZY =$~~

~~$= 180 - \angle TZX = \angle TZX$ => $\angle TZX = 90^\circ$. (т.е. T ∈ плоскости TYZ)~~