



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 8$ ,  $BD = 17$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 24$ ,  $1 \leq y \leq 24$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $ABCD$ , вершина  $A$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $AD$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BD = 2$ ,  $CD = 3$ . Найдите длину ребра  $BC$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=0$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 \\ x^2 - 4x + 4 + 9(y^2 - 2y + 1) = 12 + 4 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2 = a \\ y-1 = b \end{cases} \quad \begin{cases} (a-2b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$$D = 25b^2 - 4b^2 = 9b^2$$

$$a = \frac{5b \pm 3b}{2} \quad \begin{cases} a_1 = 4b \\ a_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16b^2 + 9b^2 = 25 \Rightarrow 25b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 4 \\ b^2 + 9b^2 = 25 \Rightarrow 10b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 5\sqrt{0.1} \Rightarrow a = \pm 5\sqrt{0.1} \end{cases}$$

$xy - x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow$   $a$  и  $b$  совп. по знаку, но  $a = 4b$  и  $a = b \Rightarrow$   
 $a = 4b = 1, a = -4b = -1, a = 5\sqrt{0.1}$  и  $b = 5\sqrt{0.1}, a = -5\sqrt{0.1}$   
 $b = -5\sqrt{0.1}$

$$\begin{aligned} x-2=4 &\Rightarrow x=6 \\ x-2=-4 &\Rightarrow x=-2 \\ x-2=5\sqrt{0.1} &\Rightarrow x=2+5\sqrt{0.1} \\ x-2=-5\sqrt{0.1} &\Rightarrow x=2-5\sqrt{0.1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y-1=1 &\Rightarrow y=2 \\ y-1=-1 &\Rightarrow y=0 \\ y-1=5\sqrt{0.1} &\Rightarrow y=1+5\sqrt{0.1} \\ y-1=-5\sqrt{0.1} &\Rightarrow y=1-5\sqrt{0.1} \end{aligned}$$

$x-2y=0 \Rightarrow a-2b=0$

$$\begin{aligned} -4+2 < 0 \\ 5\sqrt{0.1} - 10\sqrt{0.1} < 0 \\ -5\sqrt{0.1} + 10\sqrt{0.1} > 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{лиш. не подходят}$$

Ответ:  $(6, 2), (2 - \sqrt{2.5}, 1 - \sqrt{2.5})$

$x^2 + 18x > 0$

$$x^2 + 18x = t > 0$$

$$x^2 + 18x + 81 = t + 81$$

$$(x+9)^2 = t + 81$$

$$x+9 = \pm \sqrt{t+81}$$

$$x = -9 \pm \sqrt{t+81}$$

$$x^2 + 18x > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ или } x < -18$$

$$-9 + \sqrt{t+81} > 0 \Rightarrow \sqrt{t+81} > 9 \Rightarrow t+81 > 81 \Rightarrow t > 0$$

$$-9 - \sqrt{t+81} < -18 \Rightarrow -\sqrt{t+81} < -9 \Rightarrow \sqrt{t+81} > 9 \Rightarrow t > 0$$



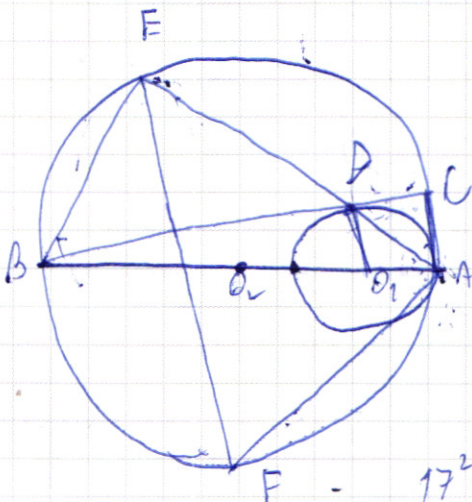
$$t > 0 \Rightarrow x(x+19) \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -19) \cup (0, +\infty)$$

15.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \Leftrightarrow -3x^2 - 30x - 17 \leq 0 \quad \text{на } \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \Rightarrow 12x+11 \leq (ax+b)(4x+3) \Rightarrow 4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b - 12x - 11 \geq 0$$

$$D = (3a+4b)^2 - 16a(3b-11) = 9a^2 + 16b^2 + 24ab - 48ab + 176a = 9a^2 - 16b^2 - 24ab + 176a$$



14.  
 геометрия. Пусть  $BO_1 = R$ ,  $O_1A = r$ .  
 $\angle BO_1D = 90^\circ$  тк  $O$  - центр  $KM$  и  $DO_1$  - радиус.  
 $\angle BCA = 90^\circ$  тк  $BA$  - диаметр  
 $\angle B - \text{общий} \Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ .  $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R} \Leftrightarrow 34R = 50R - 25r \Rightarrow 25r = 16R$

$AO_1 = r$  в  $\triangle BDO_1$   $\angle BDO_1 = 90^\circ \Rightarrow BO^2 - DO_1^2 = BO_1^2 \Rightarrow$   
 $17^2 + r^2 = (2R-r)^2 \Leftrightarrow 17^2 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2 \Rightarrow 239 = 4R^2 - 4Rr$

$$\frac{25}{4} r = 4R \Rightarrow 239 = \frac{25}{4} r R - \frac{25}{4} r^2 = 239 = \frac{25}{4} r^2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} r^2 \Rightarrow 239 = \left(\frac{625}{64} - \frac{25}{4}\right) r^2$$

$$\frac{239}{\frac{625}{64} - \frac{16 \cdot 25}{64}} = r^2 \Rightarrow \frac{239 \cdot 64}{625 - 400} = r^2 \Rightarrow \frac{17^2 \cdot 32}{15^2} = r^2 \Rightarrow r = \frac{17 \cdot 3}{15}$$

$$R = \frac{25}{16} \cdot \frac{17 \cdot 3}{15} = \frac{17 \cdot 5}{6}$$

$\angle AFE$  опр. на  $AE$ .  $\angle ABE$  опр. на  $AE \Rightarrow \angle AFE = \angle ABE$ .

$\angle BEA = 90^\circ$  тк  $AB$  - диаметр  $\Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \angle FAB$ . ЧМ  $\angle CBA = \alpha$ , то

$$\sin \alpha = \frac{r}{2R-r} = \frac{\frac{17 \cdot 3}{15}}{\frac{17 \cdot 5}{6} - \frac{17 \cdot 3}{15}} = \frac{\frac{17 \cdot 3}{15}}{\frac{17 \cdot 25}{15} - \frac{17 \cdot 3}{15}} = \frac{3}{25-3} = \frac{3}{17} \quad \angle A = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

по теореме косинусов  $\angle BAD = \frac{180^\circ - 90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$

по теореме косинусов  $AD^2 = BD^2 + BA^2 - 2BD \cdot BA \cdot \cos \beta$   
 $AD^2 = 17^2 + 4R^2 - 4R \cdot 15 \Rightarrow AD = \sqrt{239 + 4R^2 - 60R}$

по теореме косинусов  $O_1D^2 = O_1A^2 + AD^2 - 2O_1A \cdot AD \cos \beta$ , тк  $\beta = \angle O_1AD$ .  
 $r^2 = r^2 + 239 + 4R^2 - 60R - 2r \cdot AD \cos \beta \Rightarrow 4R^2 - 60R + 239 = 2r \cdot AD \cos \beta$

$$AD = \sqrt{239 + 4 \cdot \frac{17^2 \cdot 5^2}{6^2} - 60 \cdot \frac{17 \cdot 5}{6}} \quad \cos \beta = \frac{AD}{2r}$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{239+4} \cdot \frac{17 \cdot 32}{6^2} - 17 \cdot 50}{\sqrt{17 \cdot 16^2} \cdot \frac{17 \cdot 25}{36} - 50} = \frac{\sqrt{243+4} \cdot \frac{17 \cdot 32}{36} - 50}{17 \cdot \frac{16^2}{15^2} \cdot \frac{17 \cdot 25}{36} - 50} = \frac{\sqrt{243+4} \cdot \frac{1700}{4} - 450}{17 \cdot \frac{16^2}{25} - 50} =$   
 $\frac{\sqrt{243+4} \cdot 425 - 450}{17 \cdot 102 - 50} = \frac{28 \cdot 25}{17 \cdot 18^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 25}{18^2 - 17} = \frac{25}{34}$

тогда  $\angle FBA = 90^\circ - \arccos \frac{5}{\sqrt{34}} = \angle EFA$

$\angle BAD = \angle D_1DA$  так  $AD_1 = D_1D$ .  $\angle DAC = 90^\circ - \angle A D D_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle DAC = \angle A D D_1 \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow FB = EC$  по отрезку.

$\Rightarrow EF \parallel AC$

$\angle BAF = \angle BEF = 90^\circ - \alpha$  ( $\angle FEO = \angle DAC$  по трем углам  $\triangle AFD$ )  $\Rightarrow$   
 $\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow EF \perp AD$

от Машкиной  
 на олимпиаде МФТИ  
 6.5-8



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4  
(Нумеровать только чистовики)



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{0,5}{x+0,75}$

график  $\frac{0,5}{x} \rightarrow \frac{0,5}{x+0,75} \rightarrow \frac{0,5}{x+0,75} + 3$

$f(x) = 3x^2 - 30x - 17$  — параболы  
 $f'(x) = 6x - 30 = 0 \Rightarrow x = -\frac{15}{8}$

$f(-\frac{15}{8}) = -\frac{15^2}{8} + \frac{30 \cdot 15}{2} - 17 = \frac{225}{8} - \frac{17 \cdot 8}{8} = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

$-\frac{15}{8} < -\frac{3}{4}$ , но  $-\frac{15}{8} > -\frac{11}{4}$

$f(-\frac{11}{4}) = -3 \cdot \frac{121}{16} + \frac{330}{4} - 17 = \frac{165}{2} - \frac{121}{2} - \frac{34}{2} = 5$

$f(-\frac{3}{4}) = -3 \cdot \frac{9}{16} + \frac{90}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - \frac{34}{2} = 1$

$3 + \frac{0,5}{-\frac{11}{4} + \frac{3}{4}} = 3 + \frac{0,5}{-2} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} < 5$

график

$3 + \frac{0,5}{x+0,75} \rightarrow -\infty$

график при  $x > 0,75$ , а это не на графике.

$ax + b \leq 5 \Rightarrow -\frac{11}{4}a + b \leq 5$ , но дано  $\frac{11}{4}$ .  $-\frac{11a}{4} + b \geq \frac{11}{4}$

$4b - 11a \leq 20$   $4b - 11a \geq 11$

все уравнения выполняются, а значит все моменты графика  $x = -\frac{3}{4}$ .  $-\frac{3}{4}a + b < 1 \Rightarrow 4b - 3a < 4$ , здесь условие выполнено.

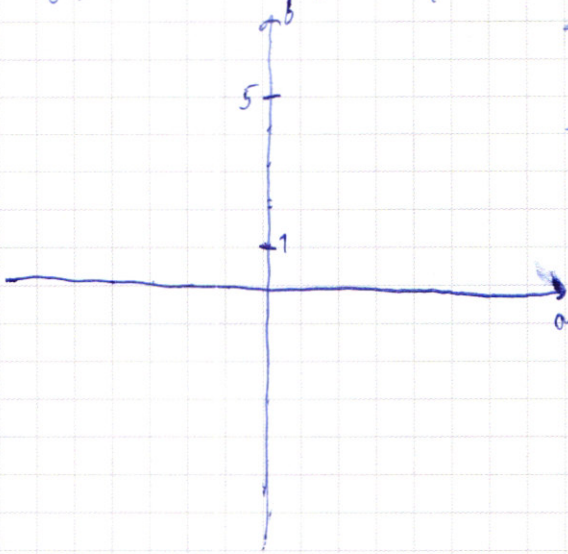
при  $a > 0$  все условия выполняются, но при  $a < 0$  моменты были

мой ответ:  ~~$\frac{12x+11}{4x+3} = ax + b$  не должно выполняться~~



мо модульну ну обзлом.

$$\begin{cases} 4b-11a \leq 20 \Rightarrow b < 5 + \frac{11}{4}a \\ 4b-11a \geq 17 \Rightarrow b > \frac{17}{4} + \frac{11}{4}a \\ 4b-3a < 4 \Rightarrow b < 1 + \frac{3a}{4} \end{cases}$$



~~$12x+11 = 4x+3 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$~~   
 ~~$11x+17 = 4x^2 + 4b + 3a + 3b$~~   
 ~~$4x^2 + x(4b+3a-11) + 3b-17=0$~~

~~$\Delta = (4b+3a-11)^2 - 4(3b-17) = 16b^2 + 9a^2 + 144 + 24ab - 96b - 72a - 48ab + 176a = 16b^2 + 9a^2 + 144 - 24ab - 96b + 104a < 0$~~

~~$16b^2 - 24ab + 9a^2 - 96b + 104a + 144 < 0$~~

~~$\Delta = (24a+96)^2 - 64(9a^2 + 104a - 144) = 24^2(a+4)^2 - 2^6 \cdot 3^2 a^2 - 2^6 \cdot 16a - 2^6 \cdot 16^2 = 24^2 a^2 - 24^2 a^2 + 9 \cdot 24^2 a - 64 \cdot 104a + 24^2 \cdot 16 - 2^6 \cdot 16^2 = 2 \cdot 24^2 a - 64 \cdot 104a = 64 \cdot (-30)a$~~

~~$f = \frac{24a+96 \pm 2\sqrt{30a}}{4} = \frac{3a+12 \pm \sqrt{30a}}{4}$~~   
 ~~$(b = \frac{3a+12+\sqrt{30a}}{4}) (b = \frac{3a+12-\sqrt{30a}}{4}) < 0$~~   
 (all values)

$f(ab) = f(a) + f(b)$   
 $f(1) = [1] = 1$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$ .  $f(1) = k$ .

$f(2) = f(2) + f(1)$ .  $f(2) = f(2) + k \Rightarrow k = 0$ .  
 $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$ .  $f(4) = f(2) + f(2) = 0$ .  $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

Забудемо, мо бу користуватися твора парадоксально

на офі проєкту.

$f(7) = 1$   
 $f(8) = f(4) + f(4) = 0$   
 $f(9) = 0$   
 $f(10) = f(5) + f(5) = 1$   
 $f(11) = 2$   
 $f(12) = 0$   
 $f(13) = 3$   
 $f(14) = f(7) + f(7) = 1$   
 $f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$   
 $f(7) = f(3) + f(4) = 0$   
 $f(8) = f(2) + f(6) = 0$   
 $f(9) = 0$   
 $f(10) = f(4) + f(6) = 1$   
 $f(11) = f(7) + f(4) = 1$   
 $f(12) = f(6) + f(6) = 0$   
 $f(13) = f(9) + f(4) = 3$   
 $f(14) = f(7) + f(7) = 1$   
 $f(15) = f(11) + f(4) = 1$

Забудемо, мо проєкту  
 дивитися об'єктів  
 м.к. календарю  
 проєкту дивитися  
 м.к. календарю  
 генератору

об'єктів, де  $f(x) = 0$ .

Забудемо, мо  $f(\frac{m}{n}) + f(n) = f(m)$   
 $f(\frac{m}{n}) = f(m) - f(n)$

м.к. календарю де  $x, y$ , м.к. календарю, мо  $f(x) < f(y)$

for $f(x) = 0$ :	1.	12	→ 11 мен	$f(x) = 1$	5.	21	→ 7 мен
	2.	16				7	
	3.	18				10	
	4.	24				14	
	6.					15	
	8.					20	
	9.						



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(k)=2. \quad \begin{matrix} 17 \\ 11 \\ 22 \end{matrix} \rightarrow 2 \text{ шага} \quad f(k)=3 \quad \begin{matrix} 13 \\ 7 \end{matrix} \rightarrow 2 \text{ шага} \quad f(k)=4, \quad \begin{matrix} 17 \\ 19 \end{matrix} \rightarrow 2 \text{ шага} \quad f(k)=5 \rightarrow 2 \text{ шага}$$

- 1) 0-1 → 11·7
- 2) 0-2 → 11·2
- 3) 0-3 → 11·1
- 4) 0-4 → 11·2
- 5) 0-5 → 11·1
- 6) 1-2 → 7·2
- 7) 1-3 → 7·1
- 8) 1-4 → 7·2
- 9) 1-5 → 7·1
- 10) 2-3 → 2·1
- 11) 2-4 → 2·2
- 12) 2-5 → 2·1
- 13) 3-4 → 1·2
- 14) 3-5 → 1·1
- 15) 4-5 → 2·1

~~77-22-11~~

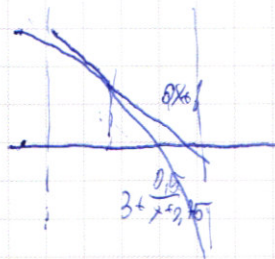
$$11(7+2+1+2+1) + 7(2+1+2+1) + 2(1+2+1) + 1(2+1) + 2-1 =$$

$$11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 8 + 3 + 2 = 143 + 42 + 13 = 198$$

Ответ: 198

15) (продолжить)

запишем, то  
или формулой  
просто и найдем  
точку касания,



то при  $a, x_1 + b \leq 3 + \frac{0.5}{x_1 + 0.75}$  касание дуга, а иначе не будет

$$\left(3 + \frac{0.5}{x + 0.75}\right)' = -\frac{0.5}{(x + 0.75)^2} = a \Rightarrow -0.5 = a(x + 0.75)^2 \Rightarrow -\frac{0.5}{a} = (x + 0.75)^2$$

$a < 0 \Rightarrow \sqrt{-\frac{0.5}{a}} = |x + 0.75|$ .  $x < 0 \Rightarrow$  модуль с минусом.

$$\sqrt{-\frac{0.5}{a}} = -x - 0.75 = \sqrt{-\frac{0.5}{a}} - 0.75 \leq x$$

$$x_1 = -0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}$$

~~3 + \frac{0.5}{x} \geq 3 + \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}~~

$$3 + \frac{0.5}{x} \geq 3 + \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}$$

$$\frac{0.5}{x} \geq \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}$$

$$x \leq -0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}$$

~~3 + \frac{0.5}{x} \leq 3 + \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}~~

$$\frac{0.5}{x} \leq \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}$$

$$x \geq -0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}$$

~~3 + \frac{0.5}{x} \leq 3 + \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}~~

$$\frac{0.5}{x} \leq \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}$$

$$x \geq -0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}$$

~~3 + \frac{0.5}{x} \geq 3 + \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}~~

$$\frac{0.5}{x} \geq \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}$$

$$x \leq -0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}$$

~~3 + \frac{0.5}{x} \leq 3 + \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}~~

$$\frac{0.5}{x} \leq \frac{0.5}{-0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}}$$

$$x \geq -0.75 - \sqrt{-\frac{0.5}{a}}$$



$$0,75a - \sqrt{\frac{a}{2}} + b > 3 + \frac{0,5}{\sqrt{\frac{0,5a}{2}}}$$

$$-\frac{3}{4}a - \sqrt{\frac{a}{2}} + b > 3 - \frac{0,5}{\sqrt{\frac{0,5a}{2}}}$$

$$-\frac{3}{4}a - \sqrt{\frac{a}{2}} + b > 3 - \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$b > 3 + \frac{3}{4}a$  · записав, то ми можемо

$$3 + \frac{3}{4}a < 1 + \frac{3a}{4} \quad 2 < 1 \text{ неважко.}$$

Висновок: маємо пар нест.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

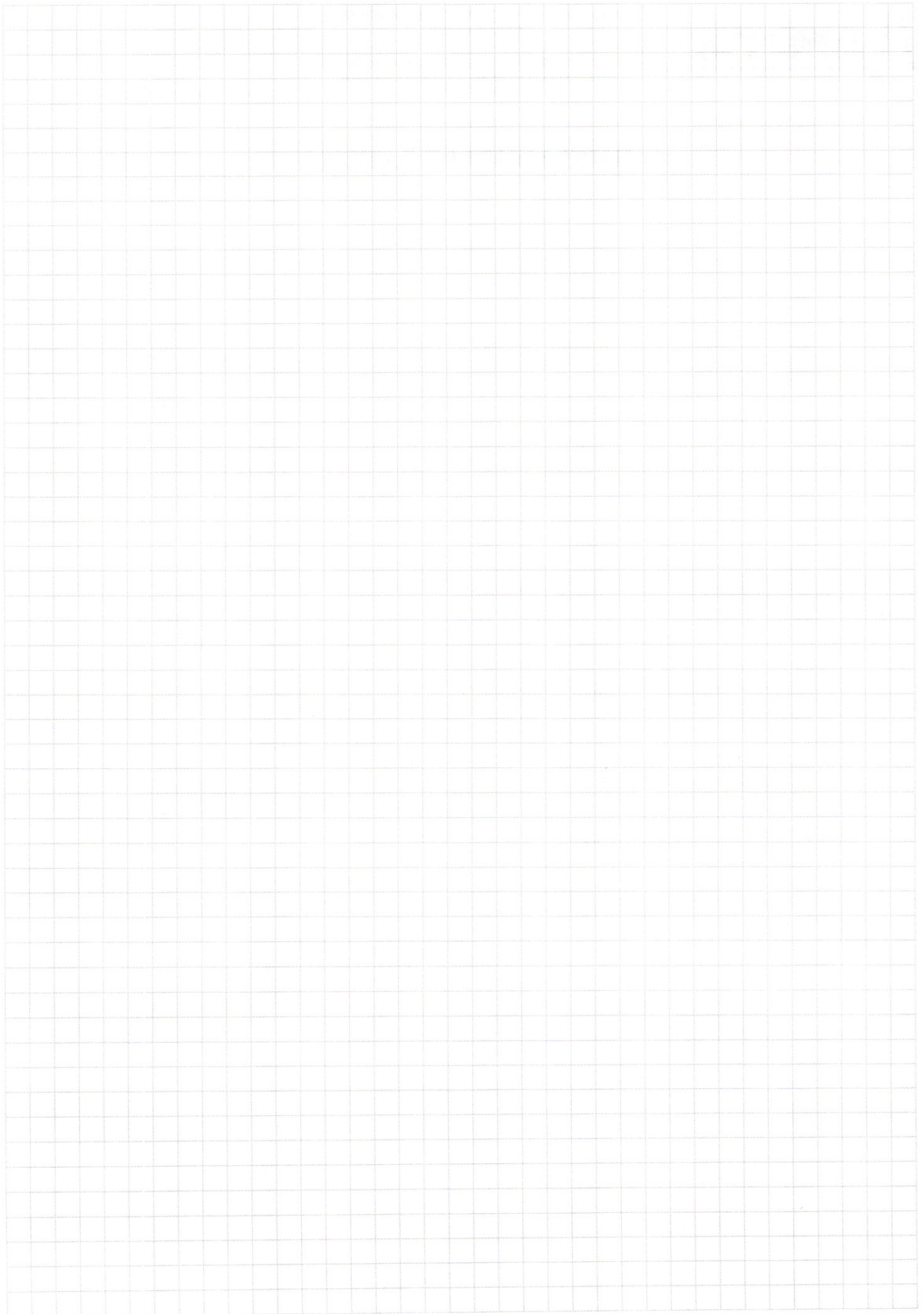
ШИФР  (заполняется секретарём)
--------------------------------------

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x(y-1) - 2(y-1) = (y-1)(x-2)$$

$$(x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 - 6(y-1)(x-2)$$

$$(x-2-3y+3)^2 = 25 - 6(y-1)(x-2)$$

$$(x-3y+1)^2 = 25 - 6(x-2y)^2$$

$$(x-2+3y-3)^2 = 25 - 6(y-1)(x-2)$$

$$(x+3y-5)^2 = 25 + 6xy - 6x - 12y + 12$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 10x - 30y = 12 + 6x - 6x - 12y + 12$$

$$\log_3 27 = 9^3$$

$$\log_3 27 = 27^3 = 3^6$$

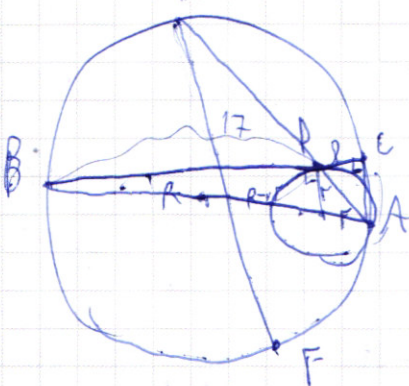
$$\frac{15-15}{3} - \frac{17-3}{8}$$

$$\log_3 125 = \log_3 (5^3) = 3 \log_3 5$$

$$225 - \frac{5}{8} \cdot 17 \cdot 8$$

$$\frac{125-36}{100-11}$$

$$\frac{136}{8} = E$$



$$\log_{12} 5 + 1 - \log_{12} 12$$

$$\log_{12} 5 + 1 - \log_{12} 12 = 1$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$17^2 = 4R^2 - 2Rr$$

$$17^2 = (2R-r)^2 - 2Rr$$

$$17^2 = 4R^2 - 2Rr$$

$$17^2 = 4R^2 - 2Rr$$

$$\frac{a}{b-c} = \frac{b}{a}$$

$$a^2 = b(b-c)$$

$$2r^2 - 2rR = 0$$

$$389 + 39 = 398 + 30 = 428$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4R^2 - 25} = \sqrt{r^2 - 64} + r$$

$$4R^2 - 25 = r^2 - 64 + r^2 + 2r\sqrt{r^2 - 64}$$

$$4R^2 - 2r + 39 = 2r\sqrt{r^2 - 64}$$

$$4R^2 + 2Rr - 2r + 39 = 2r\sqrt{r^2 - 64}$$



Смешанная симметрия + симметрия

~~Смешанная симметрия~~  $\sin 2a \cos 4b + \sin 4b \cos 2a + \sin a \cos b + \cos a \sin b = -\frac{4}{5}$

$f(3d) = f(d) + f(d)$       $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$1 \leq x \leq 24$

$1 \leq y \leq 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(6) = f(3) + f(2)$

$f\left(\frac{10}{2}\right) = f(5) = 1$

$f(3) = f(3) + f(1)$

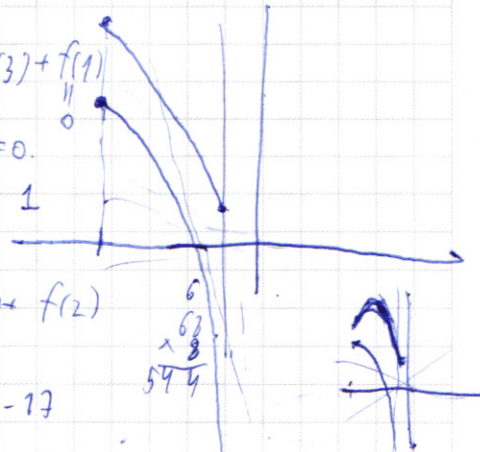
$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(6) = \left[\frac{6}{4}\right] = 1$

$f(2) =$

$f(10) = f(5) + f(2)$

$-8x^2 - 30x - 17$



$\frac{12x+12}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$900 - 63 \cdot 8$

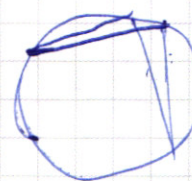
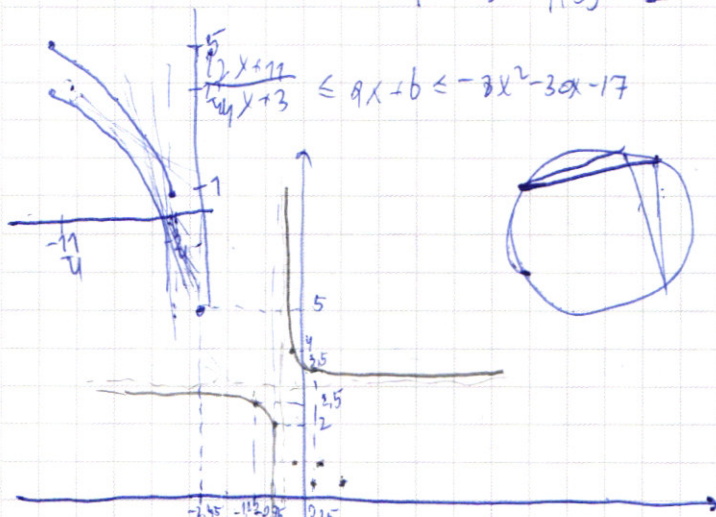
$900 - 504 = 396$

$-\frac{b}{2a}$

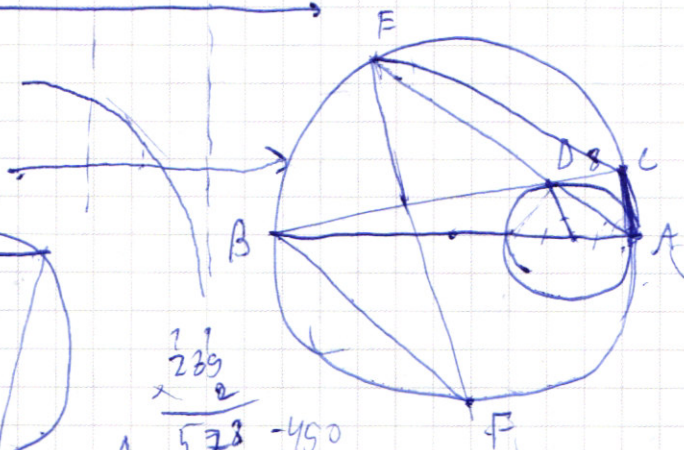
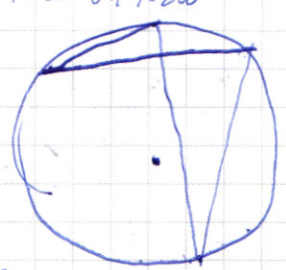
$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$3 \pm \frac{0,5}{x+0,75}$

$\frac{531}{45} \Big| \frac{9}{59}$



$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 24a$   
 $73 \quad 64 \cdot 72a - 64 \cdot 102a$   
 $\frac{102}{3} \Big| \frac{34}{12}$

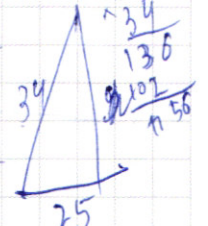


$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$\frac{17}{25} \times \frac{17}{17} = \frac{17}{25}$

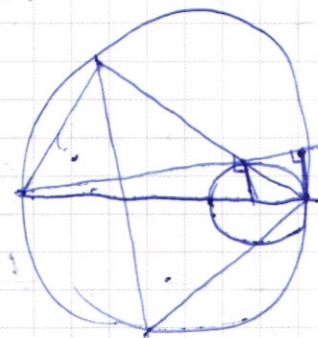


$-76x - 30 = 0$   
 $x = -\frac{15}{8}$

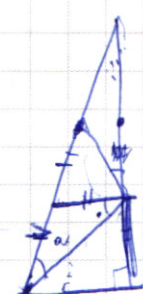
$24^2 = 4 \cdot 12^2 = 4 \cdot 4^2 \cdot 3^2$

$24^2 = 64 \cdot 9$

$(8 \cdot 3)^2 = 64 \cdot 9$



$1156 - 825 = 556 - 25 = 531$



$289 - 350 = 39 - 650 = -561$

$17 \cdot 50 = 850$

$24 \cdot 8 = 64 \cdot 102$   
 $3 \cdot 24 \cdot 3 = 64 \cdot 102$   
 $64 \cdot (-30)$

$24 \cdot 16 = 64 \cdot 12$   
 $\frac{17}{4} = \frac{21}{4a} < 1 + \frac{3}{4}a$   
 $2a < -\frac{7}{4}$   
 $a < -\frac{7}{8}$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x) = [kx]$$

~~$f(x)$~~

$$f(1) = k$$

$$f(1) = 0 = f(2) = f(3) = f(4)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \quad f(5) = 1$$

$$f(2) = 0 \quad f(3) = f(1)$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) + f(3) = f(7)$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = f(7) - f(3)$$

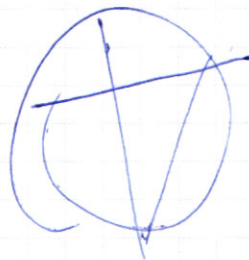
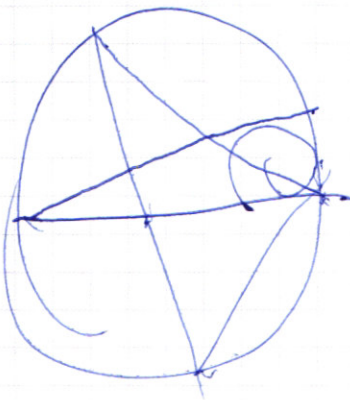
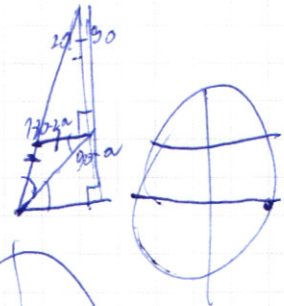
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0

$$146 + 55 = 198$$

$$\sqrt{\frac{0,5^2}{\frac{2,5}{2}}} = \sqrt{0,5a}$$

$$3 < \frac{0,5}{x+2,75}$$

$$-\frac{0,5}{(x+2,75)^2} = a$$







черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)