МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№1}$ Пусть $2\alpha+2\beta=x$, $2\beta=y$

Тогда получаем равносильную систему $\begin{cases} \sin x = -1/\sqrt{17}, \\ \sin(x+y)+\sin(x-y) = -8/17; \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = -1/\sqrt{17}, \\ 2\sin x\cos y = -8/17; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x = -1/\sqrt{17} \\ \cos y = 4/\sqrt{17} \end{cases}$

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = -1/\sqrt{17}$, $\cos 2\beta = 4/\sqrt{17}$

Значит ур-ие $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -8/17$; $\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta}_{=-\frac{4}{17}} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -8/17$

Также по осн. триг. тожд. $\sin^2 a+\cos^2 a = 1$: $\left| \begin{matrix} |\cos(2\alpha+2\beta)| = 1/\sqrt{17} \\ |\sin 2\beta| = 4/\sqrt{17} \end{matrix} \right| \longrightarrow$

$\xrightarrow{\text{тогда}}$ $\left[\begin{matrix} \sin 2\alpha - \frac{4}{17} - \frac{4}{17} = -8/17, \\ \sin 2\alpha - \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = -\frac{8}{17}; \end{matrix} \right.$ $\left[\begin{matrix} \sin 2\alpha = 0, \\ \sin 2\alpha = -8/17; \end{matrix} \right.$

Существование синуса 2α даёт максимум 2 знач. для тангенса 2α (в зависимости от знака косинуса), значит, т.к. значений ≥ 3 по условию, то и возможны оба варианта:

$\sin 2\alpha = 0$, $\sin 2\alpha = -8/17$

но у этого угла tg всегда 0 ($\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 0$)

получаем в принципе максимум 3 значения $\operatorname{tg} 2\alpha$, значит они все подходят:

$\operatorname{tg} 2\alpha = 0$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{-8/17}{3/17} = 2\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{-8/17}{-3/17} = -2\frac{2}{3}$

Ответ: $\{0; 2\frac{2}{3}; -2\frac{2}{3}\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\boxed{№2}$ $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

Решим первое ур-ие: $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$; $\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0, \\ 3y-2x\geq 0; \end{cases}$

Решим верхнее относ. y (как кв-ое):

$$9y^2+(-15x+3)y+4x^2+2x-2=0;$$

$$D=225x^2-90x+9-144x^2-72x+72=81x^2-162x+81=(9x-9)^2,$$

$$y=\frac{15x-3\pm(9x-9)}{18}; \quad \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3}, \\ y=\frac{x+1}{3}; \end{array}\right.$$

Получаем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y=4x-2, \\ 4x-2-2x\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3y=x+1, \\ x+1-2x\geq 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \begin{cases} y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \\ x\geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ x\leq 1 \end{cases}$

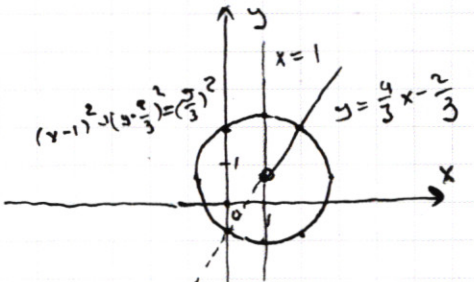
Решим второе:

$$3x^2+3y^2-6x-4y=4; \quad x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3};$$

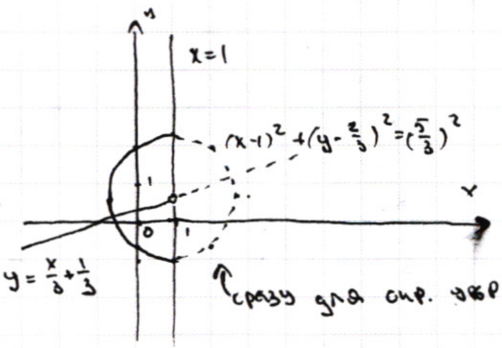
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9})=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Тогда решения на плоскости xy - окр. $\left((1;\frac{2}{3});\ r=\frac{5}{3}\right)$

Изобразим на пл-ти xy:



вместе с $\begin{cases} x\geq 1 \\ y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \end{cases}$



сразу для окр. убрал $x\geq 1$

реш. пересеч. с окр.: $\begin{cases} (0;-\frac{2}{3}) \\ (2;2) \end{cases}$

на $x\geq 1$ подходит $(2;2)$

пересеч. с окр.:

$\left(1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};\ \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\right)$, второе по графику при $x>1$, так что не рассматр.

$\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$ - верно

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{2}+\frac{5}{18}=\frac{50}{18}=\frac{25}{9} \text{ - верно}$$

Ответ: $\{(2;2);\ (1-\sqrt{5}/\sqrt{2};\ 2/3-\sqrt{5}/3\sqrt{2})\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} + x^2+6x \geq 0$ $\quad (x^2+6x=t>0)$

Заметим, что при $\log_4(x^2+6x)$ $(x^2+6x)>0$, значит можем опустить модуль;

$3 = 4^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \geq 0;$

$\underbrace{t}_{>0}\left(t^{\log_4 3-1} - t^{\log_4 5-1} + 1\right) \geq 0$

$t^{\log_4 3-1} - t^{\log_4 5-1} + 1 \geq 0;$

$t^{\log_4 3-1} \geq t^{\log_4 5-1} - 1$

$\searrow \qquad \nearrow$

$0<\log_4 3<1$, $2>\log_4 5>1$;

$-1<\log_4 3-1<0$, $0<\log_4 5-1<2$

$\downarrow$

$t^{\log_4 3-1} \downarrow$ на $t>0$

$t^{\log_4 5-1}+1 \uparrow$ на $t>0$

получаем, что решения будут при $t \leq t_0$:

$t_0^{(\log_4 3-1)} = t_0^{\log_4 5-1} - 1;$

Заметим, что 2^4 и есть t_0: $2^{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \log_2\frac{3}{4}} \overset{?}{=} 2^{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\log_2\frac{3}{4}} - 1;$

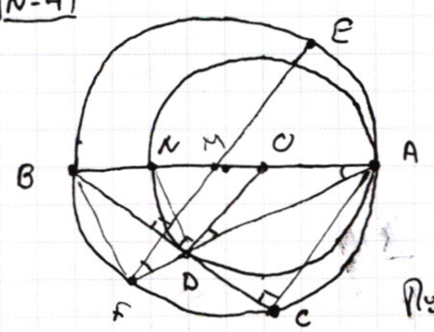
$\frac{9}{16} \overset{?}{=} \frac{25}{16} - 1$ – верно

Значит $t \in (0; 16]$; $\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2] \end{cases}$

$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$

№4



O - центр ω $\to$ $FE \perp BC$ (усл.), $OD \perp BC$ (кас.), $AC \perp BC$ - усл $\angle ACB$ - опир. на диам. (св-во) $\xRightarrow{\text{пр-к}}$ $FE \parallel OD \parallel AC$

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

Пусть R - радиус Ω, r - рад. ω

Тогда степень точки B относ ω $BD^2 = (2R - 2r)\cdot 2R$ = $BA \cdot BN$, где $BA \cap \omega = \{A; N\}$

С другой стороны $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ по двум углам $\to$

$\to \frac{BO}{BA} = \frac{BD}{BD+DC}$; $\frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BD+DC}$

Получаем систему $\begin{cases} 1 - r/2R = \frac{13/2}{18/2}, \\ (13/2)^2 = 4R\cdot(R-r) \end{cases}$; $\begin{cases} r/R = \frac{5}{9}, \\ R^2 - Rr = \frac{169}{16} \end{cases}$;

$\begin{cases} r = \frac{5}{9}R, \\ \frac{4}{9}R^2 = \frac{169}{16} \end{cases}$; $\begin{cases} r = \frac{65}{24} \\ R = 39/8 \end{cases}$

При $EF \parallel DO$ $\angle EFA = \angle ODA$ (соотв. углы) $= \angle DAO$ ($\triangle DOA$ равноб.)

При $\triangle BAC$: $BA = 2R = \frac{39}{4}$, $BC = BD + BC = 9$ $\xrightarrow{\text{следст. в. Т. Пиф.}}$ $AC = \sqrt{(\frac{39}{4})^2 - 81} = \frac{15}{4}$

При $\triangle ACD$ из следств. Т. Пиф. $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

При $\triangle DOA$ из следств. Т. кос. $\cos ODA = \frac{\underbrace{DO^2 - OA^2}_{=0,\ \text{т.к. это радиусы}} + DA^2}{2\cdot DO\cdot DA} = \frac{125/16}{2\cdot \frac{65}{24}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{13}$

$\angle EFA = \arccos \frac{3\sqrt{5}}{13}$

$\angle BFA = \angle NDA = 90^\circ$ (как опир. на диам Ω, ω) $\to$ $\triangle BFA \sim \triangle NDA$ по двум углам $\to$

$\to \frac{FA}{DA} = \frac{BA}{NA} = \frac{R}{r} = \frac{39\cdot 24}{8\cdot 65} = \frac{9}{5}$; $FA = \frac{9}{5}\cdot DA = \frac{9\cdot 5\sqrt{5}}{5\cdot 4} = \frac{9\sqrt{5}}{4}$

Пусть $FE \cap BA = M$, $MF \parallel OD \xrightarrow{\text{пр-к}} \triangle AMF \sim \triangle AOD \to \frac{MA}{OA} = \frac{FA}{DA} = \frac{R}{r}$, $MA = OA\cdot\frac{R}{r} = R$

FE - хорда, делит диам. BA при Ω пополам $\to$ FE - диам, $FE = 2R = 39/4$

$S_{EFA} = \frac{1}{2}EF\cdot FA\cdot \sin EFA = \frac{1}{2}\cdot\frac{39}{4}\cdot\frac{9\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{1 - \frac{45}{169}} = \frac{39\cdot 9\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{31}}{16\cdot 13} = \frac{27\sqrt{155}}{16}$

Ответ: $R = 39/8$, $r = 65/24$; $\angle AFE = \arccos\frac{3\sqrt{15}}{13}$, $S_{AFE} = 27\sqrt{155}/16$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№5}$ $\forall x, y$ (из усл.) $f\left(\underbrace{\frac{x}{y}}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{y}_{\in\mathbb{Q}}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$;

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Значит нам нужно найти такие $x, y \in \mathbb{N}$ $\begin{matrix} 3 \le x \le 27 \\ 3 \le y \le 27 \end{matrix}$: $f(x) - f(y) < 0$

Найдём всевозм $f(x)$, $f(y)$

$f(3) = [3/4] = 0$, $f(4) = f(2) + f(2) = [\frac{2}{4}] \cdot 2 = 0$, $f(5) = [5/4] = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$, $f(7) = [7/4] = 1$, $f(8) = f(4) + f(2) = 0$, $f(9) = f(3) + f(3) = 0$,
$f(10) = f(5) + f(2) = 1$, $f(11) = [11/4] = 2$, $f(12) = f(6) + f(2) = 0$, $f(13) = [13/4] = 3$,
$f(14) = f(2) + f(7) = 1$, $f(15) = f(5) + f(3) = 1$, $f(16) = f(8) + f(2) = 0$,
$f(17) = [17/4] = 4$, $f(18) = f(9) + f(2) = 0$, $f(19) = [19/4] = 4$,
$f(20) = f(10) + f(2) = 1$, $f(21) = f(7) + f(3) = 1$, $f(22) = f(11) + f(2) = 2$,
$f(23) = [23/4] = 5$, $f(24) = f(12) + f(2) = 0$, $f(25) = f(5) + f(5) = 2$,
$f(26) = f(13) + f(2) = 3$, $f(27) = f(9) + f(3) = 0$

Из всех принимают: „0" − 10, „1" − 7, „2" − 3, „3" − 2, „4" − 2, „5" − 1

Будут подходить пары (x, y), где $f(x) < f(y)$:

0	и	1, 2, 3, 4, 5	− $10 \cdot 15$	$= 150$	
1	и	2, 3, 4, 5	− $7 \cdot 8$	$= 56$	(206)
2	и	3, 4, 5	− $3 \cdot 5$	$= 15$	(221)
3	и	4, 5	− $2 \cdot 3$	$= 6$	(227)
4	и	5	− $2 \cdot 1$	$= 2$	(229)
				229	+

Ответ: 229 пар.

$\boxed{№6}$ $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$8x^2-34x+30 = 2(2x-\frac{17}{4})^2 - \frac{169}{8}$

↓ парабола:

- корни 3, 1,25
- вершина $(2,125; -\frac{169}{8})$
- Точки $(3;0)$, $(1;4)$

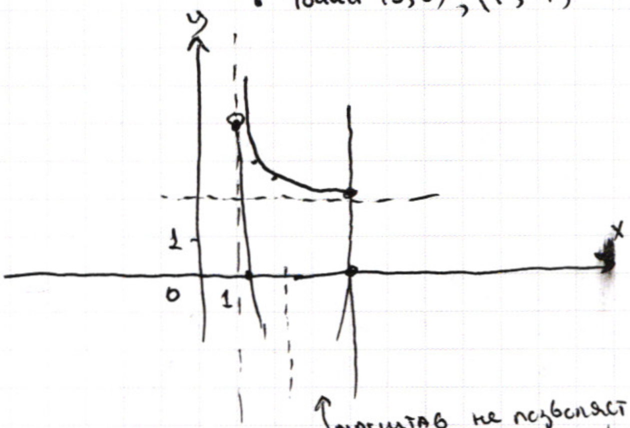
$\frac{4x-3}{2x-2} = 1+\frac{1}{2x-2} \xleftarrow{\text{пар. пер. на } \overrightarrow{(0;1)}} \frac{1}{2x-2} \leftarrow \frac{1}{x-1} \leftarrow$

сжатие относ. ох в 2 раза

$\leftarrow \frac{1}{x}$

пар. пер. на $\overrightarrow{(1;0)}$

- точки $(3; 2,25)$, $(2; 1,5)$, $(1,5; 2,5)$



↑масштаб не позволяет нарисовать вершину параболы

Тогда все искомые прямых это зона, ограниченная графиками

$y = 1+\frac{1}{2x-2}$, $y = 8x^2-34x+30$

и $x=3$, $x=1$

Заметим, что при $x=3$ $y \in [0; 2,25]$

Крайний случай прохождения - $4/3$ $(1;4)$ (нет верт. прямых, ниже будет пересеч. с параболой)

Тогда это график $\begin{cases} 4 = k+b \\ 2,25 = 3k+b \end{cases}$; $k = -0,875$; $b = 4,875$

Заметим, что это кас. к $(1+\frac{1}{2x-2}) \rightarrow$ единств. вариант

Ответ: ~~4,875~~ $(-0,875; 4,875)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

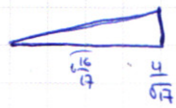
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№1}$ α, β: $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$ $\quad tg\alpha = ?$: знач. ≥ 3

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta(\cos(2\alpha+2\beta)+1) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha+2\beta>0$

(5) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = -\frac{8}{17}$



т.к. $\cos 2\beta > 0$ $\quad -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{17}} + \frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}x = -\frac{8}{17}$

$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17} - \frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}x$; $\quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17} + \frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}x$

$\frac{1-x^2}{17} = \frac{64}{17^2} + \frac{25\sqrt{17}+4\cdot 17}{\sqrt{17}^3}x + \frac{33+8\sqrt{17}}{17}x^2$ $\qquad \frac{34+8\sqrt{17}}{17}x^2 + \frac{25\sqrt{17}+68}{\sqrt{17}^3}x + \frac{47}{17^2} = 0$

$\frac{64}{17^2} - \frac{1}{17} =$ $64-17=54-7=\frac{47}{17^2}$

$\boxed{№2}$ $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4 \end{cases}$ $\qquad x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y-4=0$

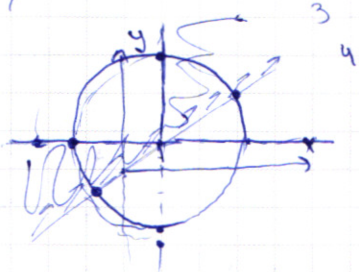
$\cancel{3(x^2-2x)+3-3}$

$\cancel{3(x-1)^2}$

$(x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 \cancel{-5-\frac{4}{9}=0} = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$

3 $\quad$ 2 $\quad$ 49

$4+\frac{46}{9}=$



$36+16=$ $(3y-2)(x-1) \geq 0$ $\qquad y \geq \frac{2}{3}$ $x \geq 1$

$y < \frac{2}{3}$ $x \leq 1$

$3y$

$3y-2x \geq 0$

$y \geq \frac{2}{3}x$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$ $\qquad 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$3y$ $\qquad (x+1)^2+(y+1)^2+8y^2-15xy+3x^2-4=0$

$3\cdot 2\cdot 2=$ $\qquad \frac{7,5}{3} = 2,5^2 = 6,25$

$7,5 = 3\cdot 2,5$ $\qquad 8y^2-15xy+3x^2+(x+1)^2+(y+1)^2=0$

$(3y+\frac{1}{3}y)$

$-15xy$

$9(3y-2,5x)^2 - 4,25x^2 + 2x+2y-2=0$

$\sqrt{7}$ $\qquad 7,5$ $\qquad \frac{225}{28}$

$(\sqrt{7}y - \frac{7,5}{\sqrt{7}}x)^2 = 7y^2-15xy+$ $\qquad 7,5=2,5\cdot 3$ $\qquad 2,$

$3,25\cdot 2$

$\frac{225}{28} > 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \le 3xy - 4x + 2$

$3y \ge 2x$

$-3y \le -2x$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 4x - 2 \le 0$

$\frac{6x+6}{18} = \frac{x+1}{3}$

$(2x+1)^2 - 3$

$\frac{24x-12}{18} = \frac{4x-2}{3}$

$9y^2 - 15xy - 3 + (2x+1)^2 \le 0$

$y = \frac{15x - 3 \pm (9x-9)}{18}$ $\quad y = \frac{4x-2}{3}$ $\quad y = \frac{x+1}{3}$

$9y^2 - 10x^2 - 3 + (2x+1)^2 \le 0$

$9y^2 - 15xy + 4x + 2x + 3y - 2 = 0$

$12y^2 - 15xy + 7x^2 - 4x - y + 8 = 0$

$6y^2 - 15xy + x^2 + 8x + 7y - 8 = 0$

12^2

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$ $\quad 9y^2 + (-15x+3)y + 4x^2 + 2x - 2 \ge 0$

$225x^2 - 90x + 9 - 4(36x^2 + 18x - 18) \ge 0$

$-\frac{225}{144}$ 81

-72

$2 + \frac{1}{6}$

$81x^2 - 162x + 81 \ge 0$

$(9x - 9)^2 \ge 0$

$162 | 9 = 18$

$y = kx + b$

$2{,}25 =$ $\quad 1{,}75 = -2k$

$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$2 + \frac{1}{8-2} = 2 + \frac{1}{4}$

$\left(1 + \frac{1}{2x-2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)' =$

$3^{\log_4 (x^2+6)} + x^2 + 6x - (x^2+6x)^{\log_4 5} \ge 0$ $\quad 2 + \frac{1}{8-2}$ $\quad \log_4 3$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 - 2x - 1}$

$3^{\log_4 x^2+6x} + x^2 + 6x - (x^2+6x)^{\log_4 5} \ge 0$ $\quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2}$ $\quad -\frac{1}{x}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \ge 0 \quad | \; t \ge 0$

$4^{\log_4 3}$ $\quad (x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} + x^2 + 6x \ge 0$

$t\left(t^{\log_4 3 - 1} - t^{\log_4 5 - 1} + 1\right) \ge 0$

6

$t = 0$ $\quad t \ne 0$

$\frac{\times 17}{17}$ $\quad \times\frac{17}{17}$ $\quad 119$ $\quad \frac{17}{289}$

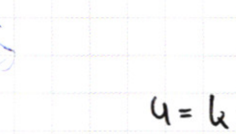
$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8}$ (7) $= \frac{24}{8} = \frac{10}{8}$

$t^{\log_4 3 - 1} \ge t^{\log_4 5 - 1} + 1$

<0 $\quad >0$

x^3 $\quad x^{1,5}$ $\quad 3$ $\quad 1{,}25$

$\log_4 3 < 1$ $\quad \log_4 5 > 1$



$\frac{169}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$x_1 + x_2 = 17$

$x_1 \cdot x_2 = 15$

$3:15$

$\frac{4{,}25}{2} = 2{,}125 = 2\frac{1}{8}$

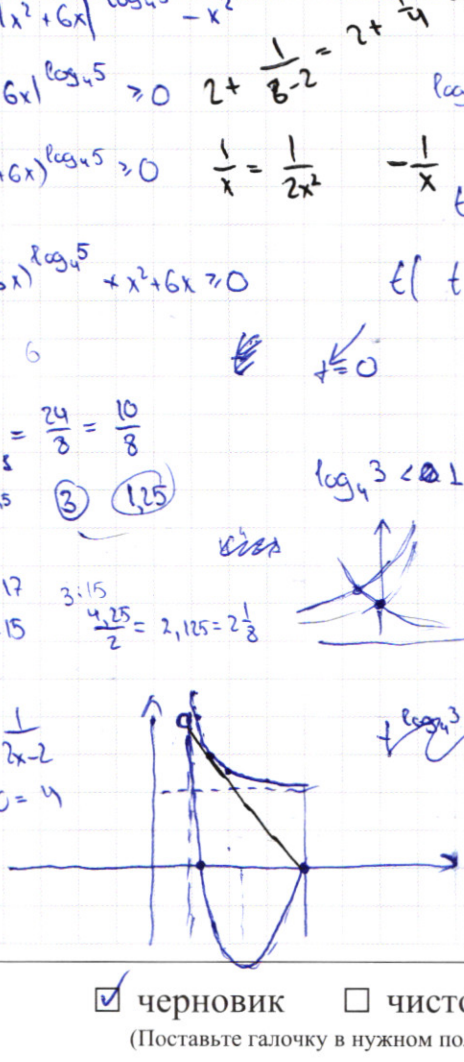
$t^{\log_4 3 - 1} = t^{\log_4 5 - 1} + 1$

$\frac{3}{4} = \frac{5}{4} + 1$

$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-1} \to \frac{1}{2x-2} \to 2 + \frac{1}{2x-2}$

$\times\frac{15}{8}$ $\quad 120$

$t^{\log_4 3} = t^{\log_4 5}$



$8 - 34 + 30 = 4$

$2\left(2x - \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}$

$\times\frac{15}{16}$ $\quad 90$ $\quad 15$ $\quad 240$

$8x^2 - 34x + 30 =$

$= 2(4x^2 - 17x + 15)$

$15 - \frac{289}{8}$ $\quad 1$ $\quad \frac{289}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin x + \sin y = \frac{1}{2}($

$t^{\log_2 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} \geq t^{\log_2 \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2}} - 1$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} = t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1$

$(\frac{3}{4})^2 =$

$\sin(x+y) = \sin$

$\sin(x+y-y) = \sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y$

$\sin(y+x-x) = \sin(x+y)\cos x - \cos(x+y)\sin x$

$1 > 0$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin x \cos$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + (\sin x - y))$

$2^{(\log_2 \frac{3}{4})\frac{1}{2}} = 2^{(\log_2 \frac{5}{4})\frac{1}{2}} - 1$

$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} - 1$

$\frac{3}{4} = \frac{5}{4} + 1 - 2\sqrt{\frac{5}{4}}$

$-1{,}5 \quad -0{,}75 = -\sqrt{\frac{5}{4}}$

$\cos x+y = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\frac{1}{2^{(\log_2 \frac{3}{4})\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$\sqrt{\frac{5}{4}} - 1$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha + 4\beta = \pi - \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$

$2\alpha + 2\beta = x$

$2\beta = y$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{8}{17}$

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

x^2

$\sin x+y = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin x-y = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\frac{\sin x \cos y}{2} = -\frac{16}{17}$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos y = -\frac{16}{17}$

$\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{9}{16} = \frac{25}{6} - 1$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$x^t \quad (x+a)^t$

$(\frac{x+a}{x})^t > 1$

$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cos y = -\frac{8}{17}\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$x + 1 - 2x \geq 0$

$\frac{3}{4} > \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

$2\alpha + 2\beta$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$-x \geq -1$

$x \leq 1$

16

$\sin 2\alpha \cos 2\beta +$

t

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$x^a = \frac{1}{a\ln x} = \frac{1}{x\ln a}$

$(x+8)(x-2) < 0$

$-\frac{4}{17}$

$= -\frac{4}{17}$

$\frac{6x+6}{18} = \frac{x+1}{3}$

$\frac{8}{3} \quad 6$

$(a^x)' = \frac{1}{x\ln a}$

$(2^x)' = \frac{1}{x\ln 2}$

$\frac{4}{17} \quad -\frac{4}{17}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{array}\right.$

2^x

$\frac{1}{x\ln 2}$

$(e^x)' = e^x$

$|y - \frac{2}{3}| = \frac{4}{3}$

$y = \frac{6}{3}$

$y = -\frac{2}{3}$

$(x-1)^2 +$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$\frac{4}{9} \quad \frac{21}{9}$

$(y - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9} = (\frac{4}{3})^2$

$|x-1| = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{8}{3}$

$\frac{5}{3}$

$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

$3x \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

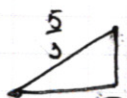
$10x^2 = \frac{25}{9}$

$x^2 = \frac{5}{18}$

$(1; \frac{2}{3})$

$x = 1 + \frac{\sqrt{7}}{3}$

$1 - \frac{\sqrt{7}}{3}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\mathrm{Dom}(f) = \{a \mid a>0, a\in\mathbb{Q}\}$

$\forall\, a, b \in \mathrm{Dom}(f)\quad f(ab) = f(a)+f(b)$

$\forall\, p$ - простое $\quad f(p) = [p/4]$

$(x;y)$ - кол-во? : $\quad 3 \le x \le 27,\ y \in \mathbb{N}\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

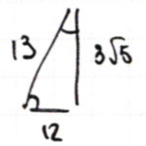
$$\frac{\frac{5\sqrt5}{4}}{\frac{65}{12}} = \frac{5\sqrt5\cdot 12}{65\cdot 4} = \frac{3\sqrt5}{13}$$

$$\frac{\sqrt5\cdot 6}{2\cdot 13} =$$

$169 - 9\cdot5 = 124$

$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \to f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos$



$f(x) - f(y) = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2)+f(2) = [\frac{2}{4}] + [\frac{2}{4}] = 0$

$f(5) = [5/4] = 1$

$f(6) = f(2)+f(3) = 0$

$f(7) = [7/4] = 1$

$f(8) = f(4)+f(2) = 0$

$f(9) = f(3)+f(3) = 0$

$f(10) = f(2)+f(5) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(6)+f(2) = 0$

$f(13) = [13/4] = 3$

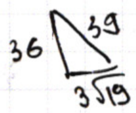
$f(14) = f(7)+f(2) = 1$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

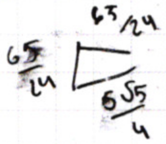
$$\frac{\frac{169}{36}+5-\frac{169}{36}}{2\cdot\frac{13}{6}\cdot\sqrt5}$$

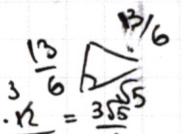
$39^2 - 36^2 =$

$$\frac{65\cdot 4}{24\cdot 15} = \frac{13}{18} = 3\cdot 57 = 9\cdot 19$$



$$\frac{5\cdot 12}{13\cdot\sqrt5} = \frac{12\sqrt5}{13}$$





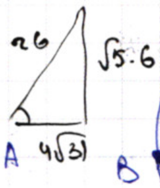
$$\frac{\sqrt5\cdot 6}{26}$$

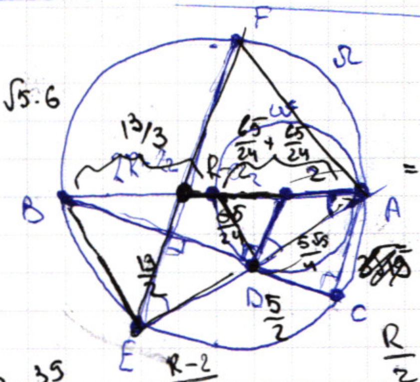
$$\frac{\frac{5\sqrt5}{4}}{\frac{65}{12}} = \frac{5\sqrt5\cdot 12}{4\cdot 65} = \frac{3\sqrt5}{13}$$

$39^2 - 36^2 = 3\cdot 75 = 9\cdot 25 = 3^2\, 15^2$

$36\cdot 5 = 180$

$26^2 -$





$\frac{13}{3} + \frac{65}{12} = \frac{52+65}{12} = \frac{117}{12}$

$\Omega_2,\ \omega_2,\ \angle AFE,\ S_{AEF} = ?$

$CD = 5/2,\quad BD = 13/2$

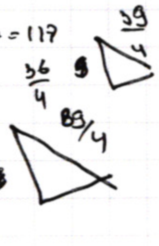
$\frac{15}{4}$

$$\begin{array}{r}169\cdot 4\\ \times\ 4\\ \hline 676\end{array}$$

$676 - 180 = 496$

$\frac{39}{4} - \frac{65}{12}$

$39\cdot 3 = 90+27 = 117$



$496 = \frac{(500-4)}{4}$

$2R = \frac{35}{4}$

$\frac{R-2}{2}$

$\frac{R}{2}$

$\frac{r}{R} =$

$BD^2 = BO\cdot BA$

$D\cdot(D-d) = BD^2$

$$\frac{169\cdot 9}{16\cdot 4} = \frac{13^2\cdot 3^2}{8^2}$$

$125 - 1$

$D^2 - Dd = \frac{169}{4}$

$4\cdot 124$

$\frac{39}{8}\cdot\frac{5}{3}$

$\frac{13}{3}$

$\frac{2R-2}{2R} = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{13} = \frac{5}{13}$

$\frac{x\,24}{65} = \frac{5}{18}$

$R^2 - Rr = \frac{169}{16}$

$1 - \frac{2}{2R} = \frac{5}{18}$

$16\cdot 31$

$x = \frac{5\cdot 65}{24\cdot 18}$

$39\cdot 3 = 117 - 65 = \frac{52}{12} =$

$R^2 - \frac{9}{23}\qquad 23-9 = 14$

$\frac{2}{2R} = \frac{23}{18}\qquad \frac{2}{R} = \frac{23}{9}$

$\sqrt{124} = 2\sqrt{31}$

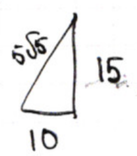
$\frac{14}{23}R^2 = \frac{169}{16}$

$R^2 = \frac{13^2\cdot 23}{4^2\cdot 2\cdot 7}$

$R = \frac{9}{23}\,2$

$31\cdot 4$

$\frac{27\cdot\sqrt{155}}{16}\cdot 4$



$15^2 - 10^2 = 5\cdot 25$

$R = \frac{13}{4}\sqrt{\frac{23}{14}}\qquad 2\cdot = \frac{13\cdot 9}{4}\sqrt{\frac{7}{14\cdot 23}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА