МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) +$

$+ 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$ $\Big| \cancel{\cdot 4\; 2\cos^2 2\beta\cos 2\alpha}$ $: 2\cos^2 2\beta\cos 2\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta = -\frac{1}{17\cos^2 2\beta\cos 2\alpha}$;

$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta} = -\frac{1}{17\cos^2 2\beta\cos 2\alpha}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ => $\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

1 сл.) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha$ $\Big| \cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}, \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90; \end{cases}$$

Пусть $y-6=b$, $x-1=a$, тогда:

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab}, \ (\vee) \qquad a\cdot b\geq 0 \\ 9a^2+b^2=90, \end{cases}$$

$(\vee)$: $b^2+36a^2-13ab=0$ − решим для b

$D=169a^2-144a^2=25a^2$

$$\left[\begin{array}{l} b=9a, \\ b=4a; \end{array}\right.$$ − заметим, что $a\cdot b\geq 0$

$$\cancel{\begin{cases} (b-9a)(b-4a)=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=9a, \\ 9a^2+81a^2=90; \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a, \\ 9a^2+16a^2=90; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=9a, \\ a^2=1; \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a, \\ a^2=\frac{18}{5}; \end{cases} \end{array}\right.$$

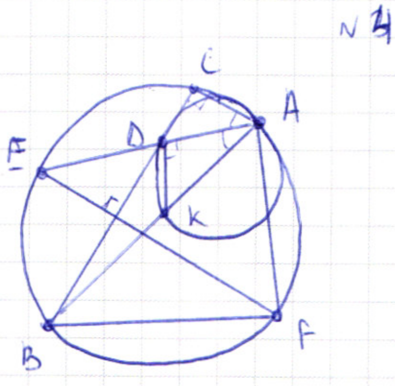
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=9, \\ a=1; \end{cases} \\ \begin{cases} b=-9, \\ a=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} b=12\sqrt{0,4}, \\ a=3\sqrt{0,4}; \end{cases} \\ \begin{cases} b=-12\sqrt{0,4}, \\ a=-3\sqrt{0,4}; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=15 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=12\sqrt{0,4}+6 \\ x=3\sqrt{0,4}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-12\sqrt{0,4}+6 \\ x=1-3\sqrt{0,4} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(2;15), (0;-3), (3\sqrt{0,4}+1; 12\sqrt{0,4}+6), (1-3\sqrt{0,4}; 6-12\sqrt{0,4})\}$

№ 4

Дано:
$CD=12$
$BD=13$
$EF\perp CB$

Найти R, r, $\angle AFE$, S_{AFE}



R − радиус Ω, r − радиус ω,
k − точка пересечения AB с ω

Решение:

Заметим, что AK − диаметр ω, т.к. точка касания и центры лежат на одной прямой. Т.е. $\angle KDA=90^\circ$, как оп. на диаметр. Аналогично $\angle BCA=90^\circ$. Т.к. BC − касат., $\angle CDA=\angle DKA$, т.е. $\triangle CDA \sim \triangle DKA$, т.е. $\angle DAK=\angle CAD$, т.е. AD − бис-са $\angle CAB$. Отсюда получаем, что $AC:AB=CD:DB=12:13$. Пусть $AC=12x$, тогда $AB=13x$. Т.к. $\triangle ABC$ − прямоугольный, для него ~~[illegible]~~ верно, что $144x^2+25^2=169x^2 \Rightarrow 25x^2=25^2$, т.е. $x=5$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

Т.е. $AB = 13 \cdot 5 = 65$. (R), $AC = 12 \cdot 5 = 60$. Теперь посмотрим на $\triangle ACD$. $AD = \sqrt{144 + 3600} = 12\sqrt{26}$. Т.к. $\triangle ACD \sim \triangle ADK$, $AC : AD = AD : AK \Rightarrow AK = AD^2 : AC$, $AK = 144 \cdot 26 : 60 = 62{,}4$ (r).

Далее заметим, что $\angle AFB = 90^\circ$, как оп. на диаметр. $\angle EFB = \angle EAB$, т.к. они опираются на одну дугу, т.е. $\angle AFE = 90^\circ - \angle EAB$. Из $\triangle DAK$, $\angle EAB = \arccos\frac{1}{2\sqrt{26}}$, т.е. $\angle AFE = 90^\circ - \arccos\frac{1}{2\sqrt{26}}$. $EF \parallel AC$, т.к. оба ~~[illegible]~~ $\perp BC$, т.е. $\angle AEF = \angle CAE$ как накрест лежащие, т.е. $\angle EAF = 90^\circ$, т.е. EF – диаметр. Также $\triangle AFE \sim \triangle CDA$ с $k = \frac{65}{12\sqrt{26}}$, т.е. $S_{AFE} = S_{CDA} \cdot k^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \overset{5}{60} \cdot \frac{65^2}{12^2 \cdot 26} = 406{,}05$

Ответ: $R = 65$; $r = 62{,}4$; $\angle AFE = 90^\circ - \arccos\frac{1}{2\sqrt{26}}$, $S_{AFE} = 406{,}05$.

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(p) = f\left(p^2 \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p) = -\left[\frac{p}{4}\right]$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)}$; $f(p^k) = f(p^{k-1}) + f(p) = \ldots = k \cdot f(p) = k\left[\frac{p}{4}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

Итак, пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $y = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, p_i – простое, $p_i \neq p_j$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}}{p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 - \beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n - \beta_n}\right) = (\alpha_1 - \beta_1)\left[\frac{p_1}{4}\right] + (\alpha_2 - \beta_2)\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots$$

$$+ (\alpha_n - \beta_n)\left[\frac{p_n}{4}\right] < 0;\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y),\ \text{т.е. } f(x) < f(y)$$

$f(a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$, т.е. $f(2) = 0$, $f(3) = 0$ и $f(k) = 0$, где $k = 2^\alpha \cdot 3^\beta$

Заметим, что от 4 до 28 есть 9 чисел, ~~[illegible]~~ вида $2^\alpha \cdot 3^\beta$. y не может быть ими, зато если таким является x, y – любое из оставшихся 16. Эти числа $\{4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27\}$. Кол-во таких пар: $9 \cdot 16 = 144$. Остальные же числа можно сократить на степени 2 и 3, т.к. они не влияют на $f(k)$. Получим такой список чисел:

$\{5, 7, 5, 11, 13, 7, 5, 17, 19, 5, 7, 11, 23, 5^2, 13, 7\}$. Сначала рассмотрим все пары

4×5, 4×7, 2×11, 2×13, 1×17, 1×19, 1×23

не включающие 25. Во всех оставшихся числах простое число в 1 степени, т.е. просто рассмотрим функции от этих чисел. $f(5)=\overset{3\text{ по }1}{1}$, $f(7)=1$, $f(11)=\overset{2\text{ по }2}{2}$, $f(13)=\overset{2\text{ по }3}{3}$, $f(17)=\overset{2\text{ по }4}{4}$, $f(19)=4$, $f(23)=\overset{1\text{ по }5}{5}$. Итого пар, где $f(y)>f(x)$ в таких числах: $3\cdot7+2\cdot5+2\cdot3+2\cdot1=74$. $f(25)=2\cdot1=2$, т.е. с ним можно $8+5=13$. Итого пар: $144+74+13=231$.

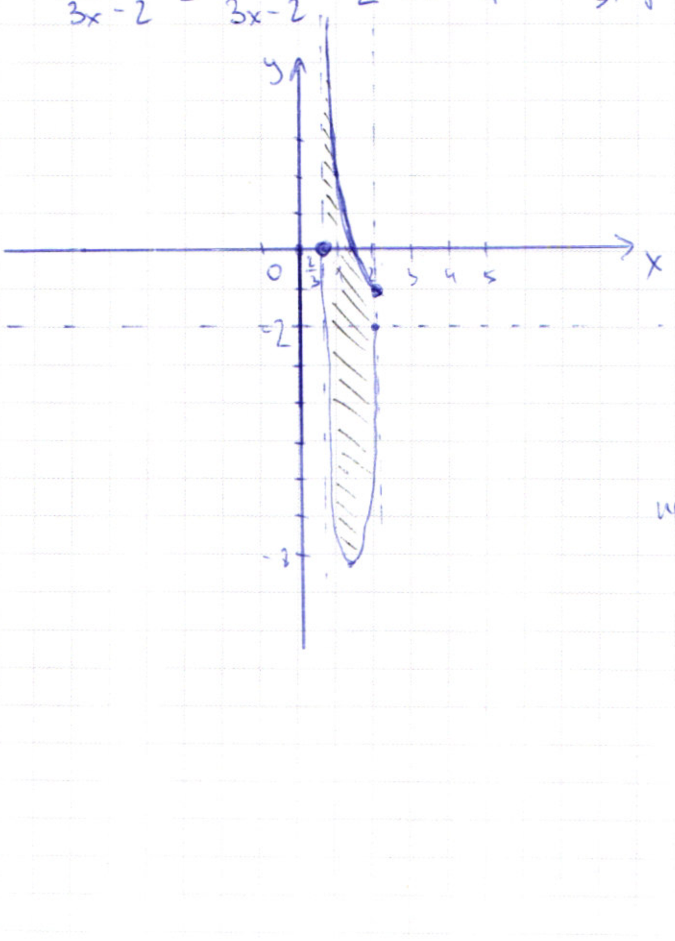
Ответ: 231 пара.

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \qquad x\in\left(\frac{2}{3};2\right], \quad (a,b)-?$$

$18x^2-51x+28$ — $x_в=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$, т.е. наим. зн. в т. $\frac{17}{12}$, наиб. стремится к т. $\frac{2}{3}$ => при $x=\frac{2}{3}$, $y=0$; при $x=\frac{17}{12}$, $y=-\frac{65}{8}$; при $x=2$, $y=-2$.

$\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2$ => при $x=\frac{2}{3}$, y не опр., при $x=2$, $y=-1$



Т.е. часть прямой $ax+b$ должна полностью лежать в заштрихованной части. Т.е. при $x=2$, $-2\leq y\leq 2$.

Найдём формулу кас. к $\frac{8-6x}{3x-2}$ в т. 2

$y_{кас.}=-1+\frac{2}{9}(x-2)=\frac{2}{9}x-1\frac{4}{9}$, т.е.

при $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{35}{27}$ ...

$\frac{25}{4} = 6,25$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\frac{65\cdot 5.5}{4}$

$y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$b-6a$, b, a

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} b^2+36a^2-12ab=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$;

$\begin{cases} b^2+36a^2-13ab=0 \\ 9a^2+b^2=90; \end{cases}$

$27a^2=13ab-90$

$ab\geq 0$

$625 \cdot 65 = 3105$, 3750, $406{,}25$

$9x^2+y^2-18x-12y-45=0$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$13ab-36a^2=90-9a^2;$

$13ab-90=27a^2$

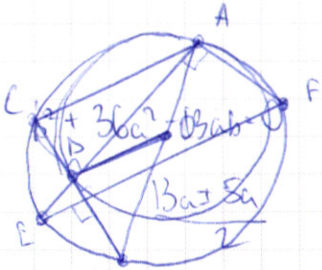
$3b^2+13ab=360$

$27a^2+9a=360-3b^2$

$f\left(\frac{1}{p}\right)=$

$y=b+6$, $x=a+1$

$\frac{65}{12\sqrt{26}}=$



$b^2+36a^2-13ab=0$

$D=169a^2-144a^2=25a^2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$90a^2$, $a^2=\frac{90}{25}$, $a=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm 3\sqrt{0{,}4}$

$\frac{13a+5a}{2}$

$26x-x^2=t$

$f(1)=0$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$f(p)=f\left(\frac{1}{p}\right)+f(p)$

$\frac{AD}{AK}=\frac{12\sqrt{26}}{29\cdot 26}=\frac{1}{2\sqrt{26}}$

$=f\left(\frac{1}{p}\right)+f(p)+f(p)\Rightarrow 2$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right)=-f(p)$

$\log_5 12\cdot\log_5|x^2-26x|+|x^2-26x|^{\log_5 12}\geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

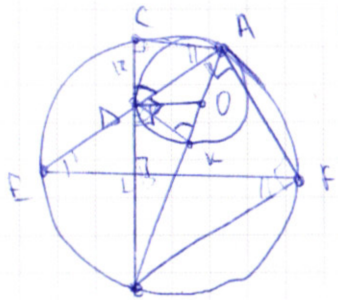
$\frac{AC}{AD}=\frac{AD}{AK}$,

$AK=\frac{AD^2}{AC}$

$\frac{144}{26}=\frac{24}{60}$, 10

$CD=12$, $BD=13$

$R, r, \angle AFE$, $S_{AFE}-?$



$EF \parallel AC$

$|-t|^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

1сл.) $t>0$ – всегда

$56+10+6+2=74$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$;

$\log_5(t^{\log_5 12}+t)\geq\log_5 t\cdot\log_5 13$

$\log_5 t+\log_5(t^{\log_5 12-1}+1)-\log_5 t\cdot\log_5 13\geq 0$;

$\log_5 t\underbrace{(1-\log_5 13)}_{<0}+\underbrace{\log_5(t^{\log_5 12-1}+1)}_{>0}\geq 0$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

9

0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5

$S_{AFE}=\frac{1}{2}\sin\angle AFE\cdot AF\cdot FE$

AD – бис-са $\Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$

$(25-1)(25+1)=625-1=624$

у/с $\{5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28\}$

$25^2=625$

$25^2+144x^2=169x^2$;

$25^2=25y^2$;

надо/не надо?!

$\angle CDA=\angle DKA$

$\angle EAB=\angle BDK=\angle CAD$

$\Delta CDA\sim\Delta DKA$

1сл.) $0<t<1$ – верно

2сл.) $t>1$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$1+144+74+13=232$

p-простое, $x, y\in N$

$(65)^2=(60+5)^2=$

$3600+625=4225$

$3600+25^2+600$

25, $f(14)=$

$5, 7, 5, 11, 13, 7, 5, 17, 19, 5, 7, 11, 23, 5^2, 13, 7, 2$

$62\cdot 62=124$, 3844

36

$90+54=144$

$\log_5 t<$

$60^2+12^2=6^2\cdot 10^2+6^2\cdot 2^2=6^2(101)$

$12^2\cdot 5^2+12^2=12^2\cdot 26$

$4\leq x\leq 28$

$4\leq y\leq 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha - ?$

~~нездова~~ много времени потратила

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$;

$= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}} - 6 \text{ IV} \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} - 6 \text{ III} \end{array}\right.$

$\frac{1}{17}+\cos^2 = 1$;

$1-\sin^2 2\beta$

$\cos^2 = \frac{16}{17}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) +$

$\theta = \ldots$

$+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$;

1сл.) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sqrt{17}\sin(2\alpha+\theta) = -1$

$\sin(2\alpha+\theta) - \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta+\theta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$;

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\sin(x+\theta))$

$\cos(x-\theta)$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$

$2\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\beta-\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$;

$2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$;

~~$\sin 2\alpha(1+\cos^2 2\beta)$~~

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$;

$\sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{17\cos^2 2\beta}$;

$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta = \frac{-1}{17\cos^2 2\beta\cos\alpha}$

$-\frac{1}{17}\cdot\sqrt{17}$

$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta} = -\frac{1}{17\cos^2 2\beta\cos\alpha}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{17\cos 2\beta}$; $\cos 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left(\sin\alpha\cos\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) + \cos\alpha\sin\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\right)\cdot$

$\cdot\left(\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) - \sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\frac{1}{17}$

$\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\alpha\sin\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) -$

$\sin^2\alpha\sin\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) - \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) =$

$= \sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\right) +$

$+\sin\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) =$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{}$

~~$4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$~~ $4(1-2\sin^2\alpha)$

~~...~~

$2\cos\alpha\sin\alpha + 4 - 8\sin^2\alpha = -1$;

$2\cos\alpha\sin\alpha + 8\cos^2\alpha - 4 = -1$

$2\cos\alpha(\sin\alpha + 4\cos\alpha) = 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ $x \in [\frac{2}{3}; 2]$

головушка болит

$1\frac{5}{12}$

$18x^2-51x+28$ $D = 51^2 - 4\cdot 28\cdot 18 = 2601-2016 = 585 = 5\cdot(117) = 5\cdot 9\cdot 13$

$18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 =$ $x = +\frac{51}{36} = \frac{17}{12} < 2$

$= 34 \cdot 34$

$18\cdot\frac{17^2}{12^2} - 51\cdot\frac{17}{12} + 28 =$

$-\frac{b}{2a}$

$(x-1)(x-3) = x^2-4x+3$ $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$= \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 = 28 - \frac{17^2}{8} =$

$\frac{18}{144} = 119$ $17\cdot 7 =$ $144 : 2 = 72$ $72 : 9 = 8$

$y = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 =$ $28\cdot 8 = 224$

$16 + 6 = 22$

$17\cdot 17 = 170 + 119 = 289$ $\frac{17^2}{8}$

$= 72 - 102 + 28$

-30

65

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-(6x-8)}{3x-2} =$ $\frac{8-6x \cancel{-6x+4}}{3x-2} =$

$\frac{4}{3x-2}$

$\frac{2}{3}x + b$

$\frac{4}{3x-2} - 2 = 4 - 2\cdot 3x + 4$

$9+4 = 13$ $\frac{4}{3\cdot 2}$ $\frac{4}{-2} =$ $2x+b$ $6x-4$

$\cos(60°+90°) = \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$ $\frac{2}{3}$

$6-2=4$ $\frac{4}{3\cdot\frac{2}{3}-2}$

$\cos 2\alpha = \sin$ $\sin 2x = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

$\frac{4}{27} - \frac{13}{9} =$

$y(\frac{4}{3x-2} - 2)' = (\frac{4}{3x-2})' = \frac{4}{3}(\frac{1}{x-\frac{2}{3}})' = \frac{4}{3}(\frac{1}{x})' \cdot (x-\frac{2}{3})' =$

$= \frac{4}{27} - \frac{39}{27} = \frac{4}{3x-2} = 2;$

$= \frac{4}{3}\left(\frac{-(x-\frac{2}{3})'x}{x^2}\right) =$

$(\frac{1}{3x})' = (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x})' =$ $(x-\frac{2}{3})$

$= -35$ $4 = 6x - 4;$

$(x^{-1})' = -\frac{8}{9x^2}$

$6x = 8;$ $x = \frac{4}{3}$

$(3)'\cdot x + 3\cdot(x)'$ $\frac{4}{3}(\frac{1}{x-\frac{2}{3}})$ $+\frac{1}{x}$

4

$\frac{2}{9}x - \frac{4}{9} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)