МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$ и $2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=90 & (2) \end{cases}$$

(1): $a-6b\geq 0$

$(a-6b)^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

Решаем как квадратное отн. a.

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\frac{13a\pm 5b}{2}$

$a=4b$ или $a=9b$

$b\leq 0$ $\qquad$ $b\geq 0$

I. $\qquad$ II.

I. $\begin{cases} 25b^2=90 \\ b\leq 0 \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

II. $\begin{cases} 90b^2=90 \\ b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow b=1$

$a=9$

ОЗ: $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}; -\frac{12\sqrt{10}}{5}\right) \to \left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}+6; \frac{-12\sqrt{10}-5}{10}\right)$

~~Ответ~~: $(9;1) \to (15;1)$

Ответ: $\cancel{\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}+6; -\frac{12\sqrt{10}+5}{10}\right)}$

решения $\left(-\frac{12\sqrt{10}+5}{10}; -\frac{3\sqrt{10}}{5}+6\right)$ и $(15;1)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

Задача №3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$t=10x-x^2 \quad (t>0)$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(t)} = t^{\log_3(5)}$$

$$F(t) = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} - t \leq 0$$ (t>0, сократим на него.)

$$\cancel{F'(t) = \log_3(5)\cdot t^{\log_3 5-1} - \log_3(4)\cdot t^{\log_3(4)-1} - 1}$$

~~заметим, что $f(0)=f(9)=0$~~

$$F(t)=t^{\log_3 5-1}-t^{\log_3 4-1}-1\leq 0 \quad (\mathcal{D}(F)=(0;+\infty))$$ т.к. $t>0$

$$F(t)=t^{\log_3(4)-1}\left(t^{\log_3(5)-\log_3(4)}-1\right)-1$$

очевидно, что на $[0;1]$ корней у $F(t)$ нет, т.к.

$$t^{\log_3(4)-1}\left(t^{\log_3(5)-\log_3(4)}-1\right)\leq 0$$ при $t\in(0;1]$

при $t>1$ $F(t)$, очевидно, возрастает (как произв. положительных возрастающих функций + константа).

То есть у нее есть не более 1 корня на $(1;+\infty)$.

Этот корень — $t=9$ $\left(\frac{25}{9}-\frac{16}{9}-1=0\right)$

Из этого следует, что $F(t)\leq 0$ при $t\in(0;9]$

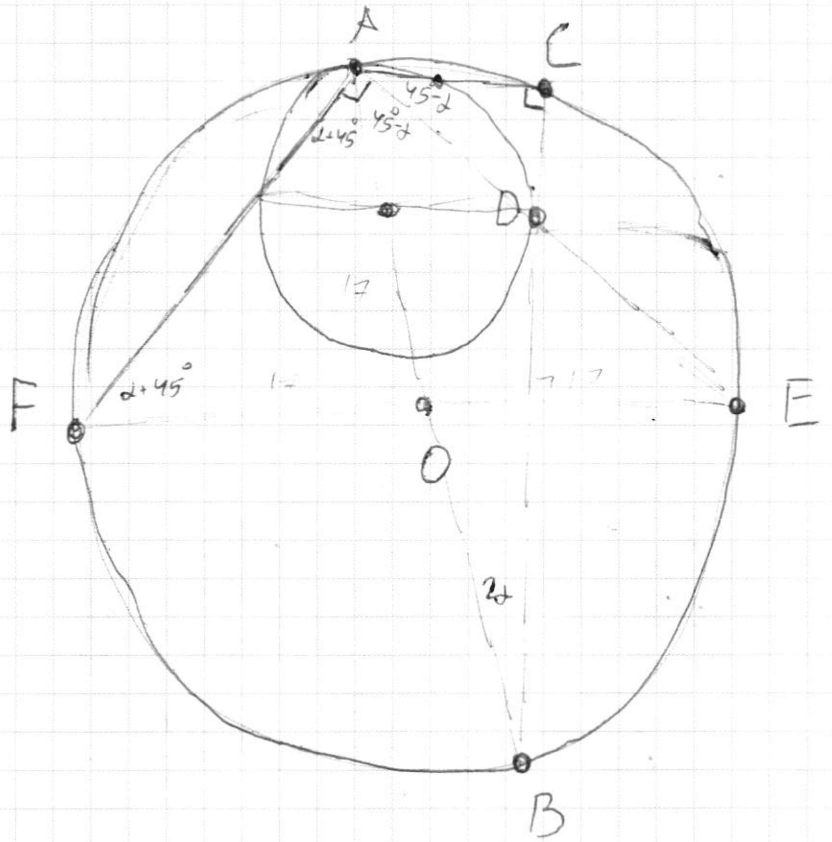
$$\begin{cases}10x-x^2>0\\10x-x^2\leq 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(10-x)>0\\(x-1)(x-9)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(0;10)\\x\notin(1;9)\end{cases}$$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

E - середина дуги CB по лемме Архимеда (док-во: сделаем гомотетию в центр. в A так что $\omega \to \Omega$, тогда BC -> касательная к Ω, параллельная BC => => D -> E, а касательная в E ∥ BC => E - середина дуги $\breve{BC}$ => AE - бис-са $\angle BAC$)

$\angle ABC = 2\alpha$, $\angle ACB = 90°$ - как опир. на диам.

т.к E - сер. $\breve{BC}$, то $O \in EF$.

$\angle BAE = \angle EAC = 45° - \alpha$

$AC = x,\quad \frac{BD}{DC} = \frac{17}{15} = \frac{AB}{AC}$ (по св. бис-сы).

$AB = \frac{17}{15}x$. По т. Пифагора: $\left(\frac{17}{15}x\right)^2 = x^2 + 16^2$

$\frac{17^2 - 15^2}{15^2}x^2 = 16^2 \Rightarrow \frac{8}{15}x = 16 \Rightarrow x = 30.$

$AC = 30,\ AB = 34,\ \underline{R = 17}$ (радиус Ω).

$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{30^2 + \frac{15^2}{4}} = \frac{\sqrt{60^2 + 15^2}}{2} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$DE = \frac{DC \cdot DB}{AD} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{FE} = \frac{\frac{16\sqrt{17}}{2}}{34} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \underline{\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)}.$

$\sin\angle AEF = \frac{\sqrt{17}}{17}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{17}}{2} \cdot 34 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} =$

$= 8 \cdot 17 = \underline{136}$

$r = AB \cdot \frac{AD}{AE} = 34 \cdot \frac{\frac{15\sqrt{17}}{2}}{\frac{16\sqrt{17}}{2}} = \frac{34 \cdot 15}{16} = \frac{17 \cdot 15}{8} = \frac{255}{8}$

(радиус ω).

Ответ: $R = 34$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

$r = \frac{255}{8}$

$S_{AEF} = 136.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$F(ab) = F(a) + F(b)$ и $F(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое.

$F(2) = 0 \Rightarrow F(1) + F(2) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \Rightarrow F(a) + F(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(\frac{1}{a}) = -F(a)$

$F(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow F(x) - F(y) < 0 \Leftrightarrow \underline{F(x) < F(y)}$

$F(2) = F(3) = F(1) = 0$

$F(5) = F(7) = 1$

$F(11) = 2$

$F(13) = 3$

$F(17) = F(19) = 4$

$F(23) = 5$

$F(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) =$

разложение на простые

$= F(p_1) + F(p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots) = \ldots =$

$= F(p_1) \cdot \alpha_1 + \ldots + F(p_k) \cdot \alpha_k$

Посчитаем функцию для всех чисел от 2 до 25 с помощью приведённых выше фактов:

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
2	0	9	0	17	4
3	0	10	1	18	0
4	0	11	2	19	4
5	1	12	0	20	1
6	0	13	3	21	1
7	1	14	1	22	2
8	0	15	1	23	5
		16	0	24	0
				25	2

Посчитаем кол-во различных знач. функции от 2 до 25

$F(x)=a$	$\# x : F(x)=a, 2\le x\le 25$
0	10
1	7
2	3
3	1
4	2
5	1

кол-во пар (x,y), таких что $F(x)<F(y)$ и $2\le x,y\le 25$

считаете так:

$10\cdot(7+3+1+2+1)+7\cdot(3+1+2+1)+3\cdot(1+2+1)+$

$+1\cdot(2+1)+2\cdot 1 = 140+49+12+3+2=$

$=191+15=\underline{206}$

Ответ: $\underline{206}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

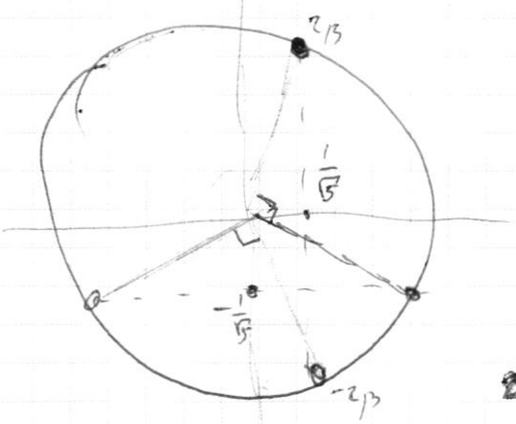
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача № 1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



1) $2\alpha+2\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$

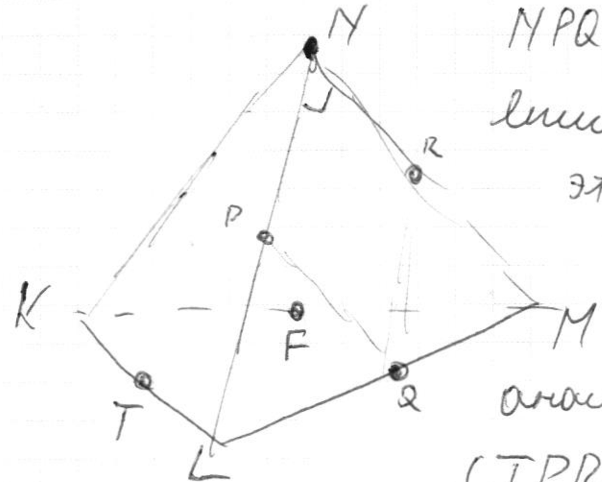
2) $\pi - 2\alpha + 2\beta = -2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$

3) $2\beta + \frac{\pi}{2} + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pi - 2\alpha - 2\beta + 2\pi k.$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} - 4\beta - 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Задача № 7.



NPQP — параллелограмм и вписанный, значит это прямоугольник и $\angle LNM = 90^\circ$

аналогично $\angle TPR = 90^\circ$

(TPRF — прямоугольник).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\frac{5}{4}$

$245 \cdot 4$
48
1960
980
11760

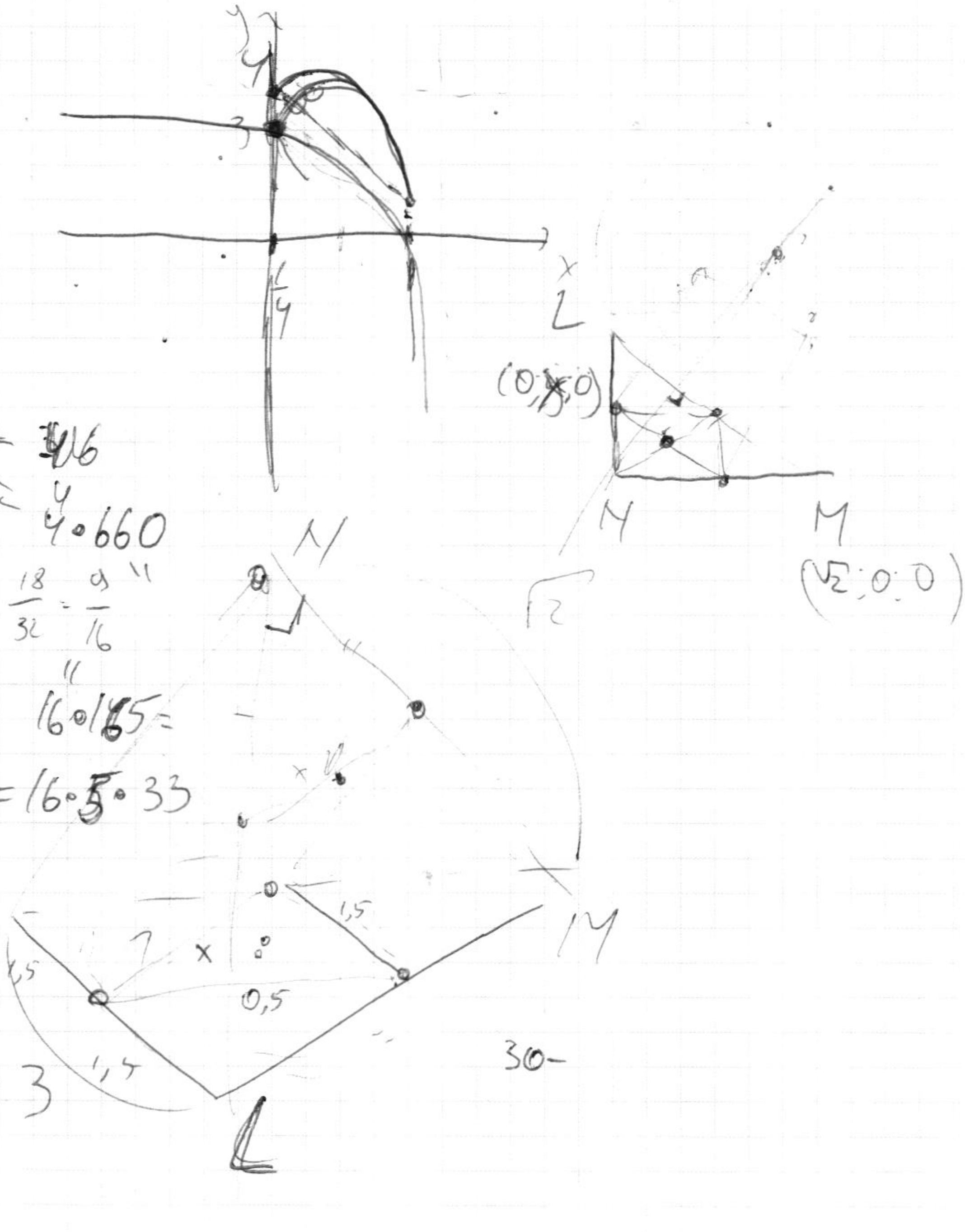
14400
11760
$2640 = 4 \cdot 660$

$-2+9-3 \le 4$

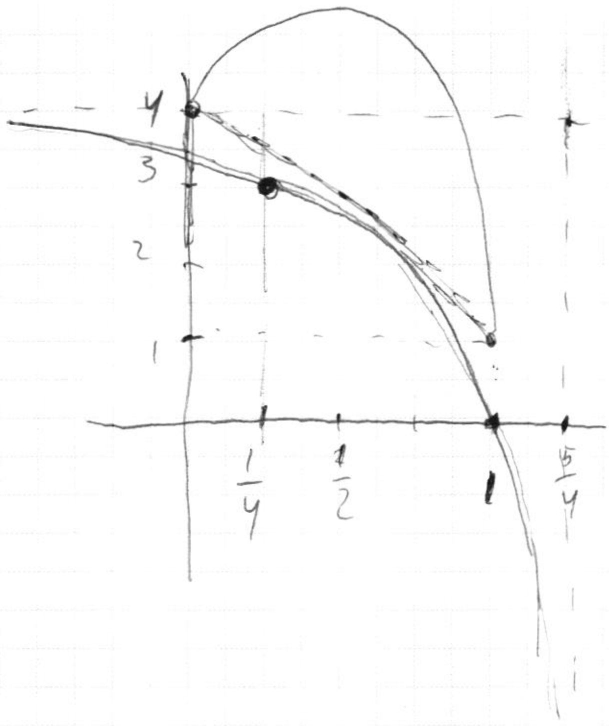
$+\frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$16 \cdot 165 = 16 \cdot 5 \cdot 33$

2)



$4x \frac{4}{4x-5}$



-3

4

$\frac{4}{(4x-5)^2} \cdot 4 = \frac{16}{16x^2-40x+25} = 3$

$48x^2-120x+75=16$

$48x^2-120x+59=0$

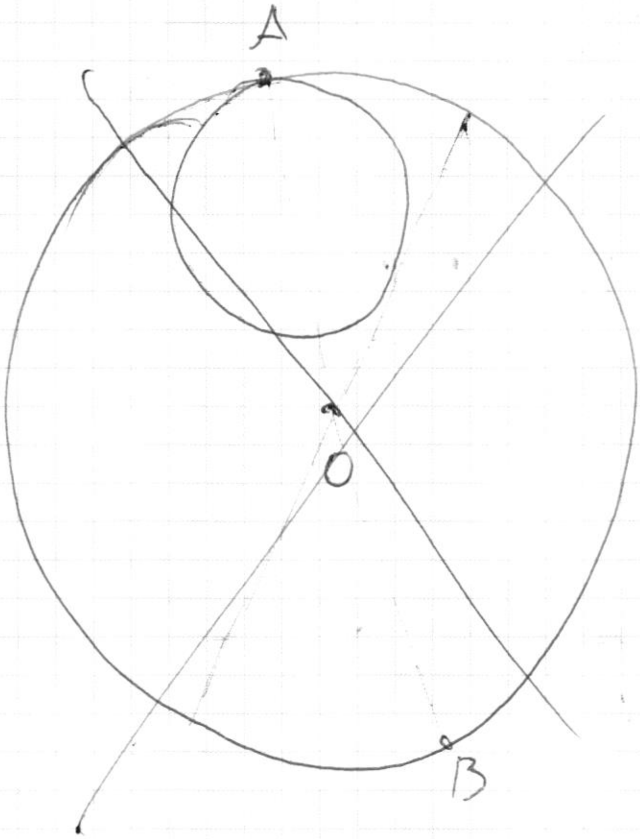
$D=120^2-245\cdot48$

$x=\frac{120 \pm 4\sqrt{165}}{96}=$

$=\frac{30-\sqrt{165}}{24}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача №4~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

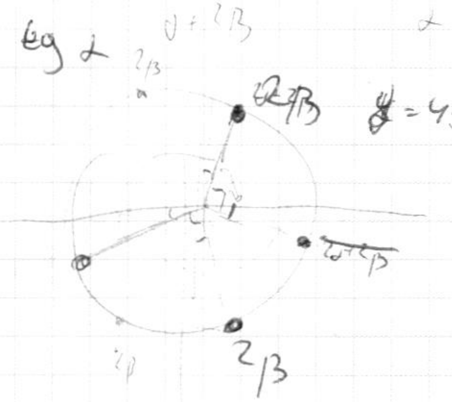
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)$ $\qquad 2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\beta)\cdot\sin(2\alpha)$

$tg\,\alpha$



$\sin\left(2\beta - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$\sin + \sin =$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\quad \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{2}\sin(4\beta)\cos(2\beta) = -\frac{1}{5}$

~~$4\alpha+4\beta$~~

$2\alpha+2\beta$

$\sin(\ldots)\cdot\cos\ldots =$

$= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha) \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad \frac{2}{5} = \sin($

$\sin(2\alpha) \pm 2\cos(2\alpha) = -1$

$tg(2\alpha) \pm 2 = -\frac{1}{\cos(2\alpha)}$

$x(2y-1) - 6(2y-1) \ldots$

$= \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y+1)}$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 4\cos^2\alpha \mp 2 = -1$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$

$x - 6 = a$

$2y - 1 = b$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

2)

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$9(2y-1)^2$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$\sqrt{\frac{36\cdot10}{25}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_3 5-1} - t^{\log_3 4-1} \le 1$

$t^{\log_3 4-1}\left(\left(\tfrac{3}{?}\right)^{\log_3 5 - \log_3 4} - 1\right)$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$(3b)^2$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$a \qquad 6b$

$90 + 27b^2 - 13ab = 0$

$a^2 = 9(10 - b^2)$

$a = 3\sqrt{10 - b^2}$

$t^{0{,}02}$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2 = (5b)^2$

$a = \dfrac{13b \pm 5b}{2} = 4b, 9b.$

$a = 4b,\ b < 0 \quad -2b = \sqrt{4b^2} \qquad b < 0$

$a = 9b,\ b > 0$

$(0; 9)$

$0 \le x^2 - 10x \le 9$

$x^2 - 10x - 9 \le 0$

$(x+1)($

$D = 100 + 36 = 136 = 266 =$

$4 \cdot 33$

$2\sqrt{33}$

3) $x^2 - 10x = t$

$|t|^{\log_3 4} \ge t + 5^{\log_3(-t)} \Rightarrow t < 0$

5

$-t^{\log_3 4} \ge t + 5^{\log_3(-t)}$

$k = -t$

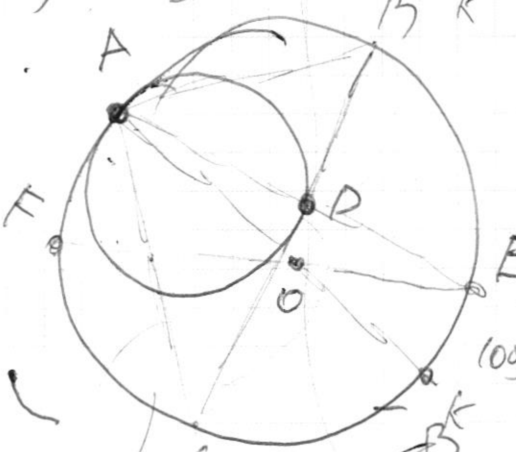
$k \ge 0$

4)

$k^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3(k)} - k$

$3^{\log_3 5}$

$k^{\log_3 5}$



$k = 9$

$k = 0$

k

$k^{\log_3 5} + k^{\log_3 4} + k \ge 0$

$-\log_3 5\, k^{\dots -1} + \log_3 4\, k^{\dots -1} + 1 \ge 0$

$(1) = 1{,}5$

$(3) = 8{,}5$

$x^2 - 10x + 9 \ge 0$

$(x-1)(x-9)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$F(x) = -F\left(\frac{1}{x}\right)$$

5) $F(ab) = F(a) + F(b)$

$\log$

$F(1) = 0$

$F(2) = 0$

$F(3) = 0$

$F(5) = 1$

$F(4) = 0$

$$F(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$$

$$F(2) = F(1) + F(2) = 0$$

(x, y) : $2 \le x \le 25$, $2 \le y \le 25$

$$F\left(\frac{x}{y}\right) = F(x) + F\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow F(x) < F(y)$$

24

$F(6) = 0$

$F(7) = 1$

$F(8) = 0$

$F(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11 \; 13$

$c + d + \ldots$

5 : 1

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

25

2

0 : 10

1 : 7

2 : 3

3 : 1

4 : 2

5 : 1

$10 \cdot 14 + 7 \cdot \ldots$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

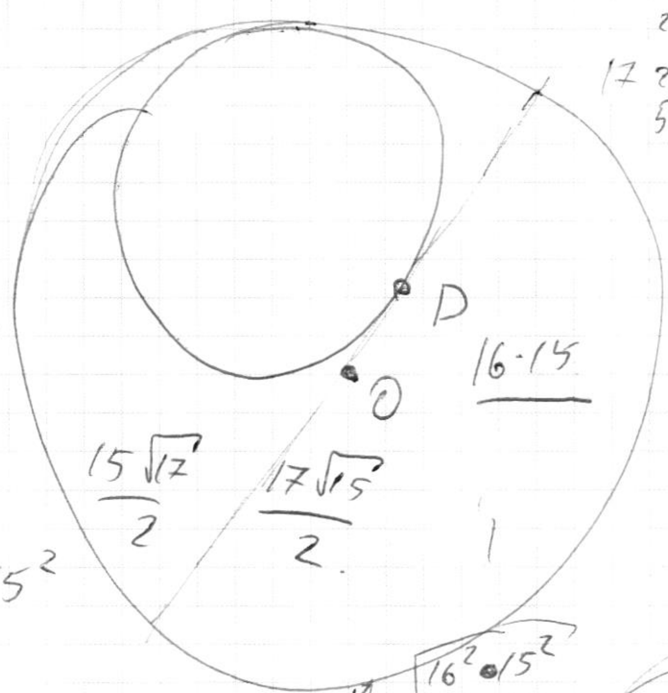
ШИФР

(заполняется секретарём)

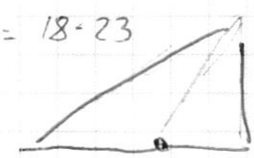
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17
15
85
5

$\frac{15\cdot 17}{4}$



289
17 225
$514 = 207\cdot 2 = 18\cdot 23$



$\frac{AC}{2R} = \frac{15}{17}$

$\frac{AC}{\frac{15}{17}} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{17}\right)$

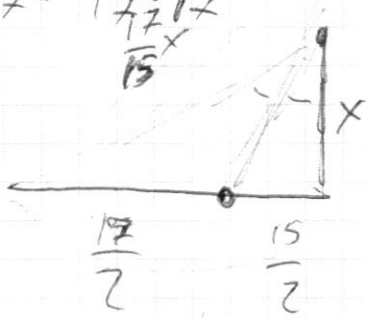
$16\cdot 15^2$

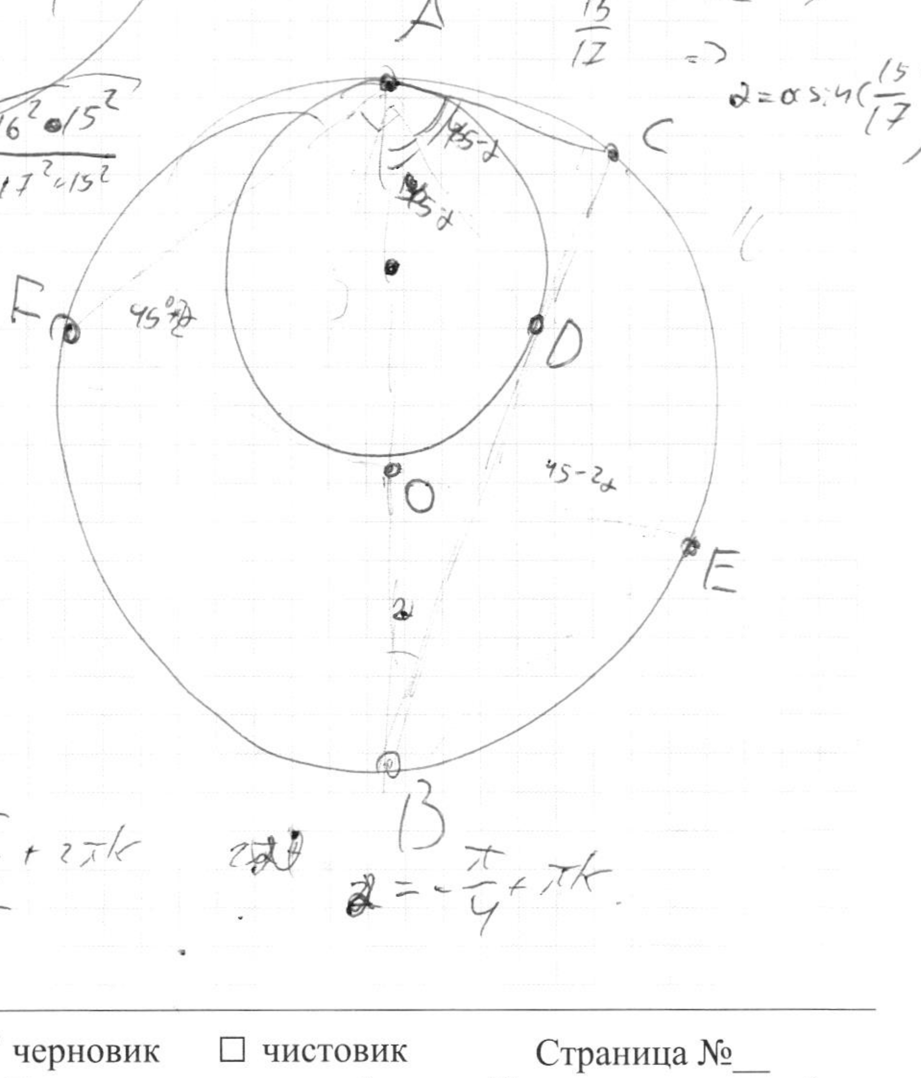
$x^2 = \sqrt{\frac{16^2 \cdot 15^2}{17^2 + 15^2}}$

$\frac{17^2}{15^2}x^2 + x^2 = 16^2$

$x^2\left(\frac{17^2+15^2}{15^2}\right) = 16^2$

$\frac{16\cdot 17}{17^2} + \frac{16}{17^2}\frac{1}{17}$





16

$2\alpha + 2\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)