МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{\left(1-\frac{1}{17}\right)}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

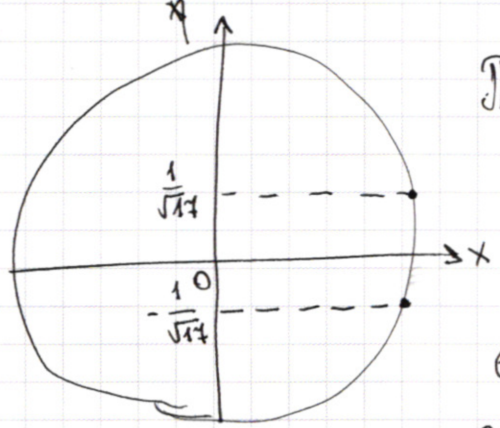
$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \dfrac{-\frac{8}{17}}{2\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\begin{cases}\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}\\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}$



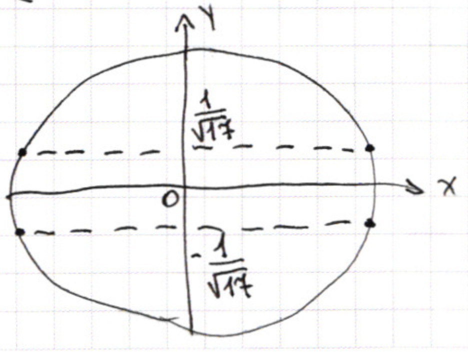
Тогда $\left[\begin{array}{l}2\alpha = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2\alpha = 2\pi k + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right),\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$2\alpha = 2\pi k \Rightarrow \alpha = \pi k$, но $tg\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right) \in \varnothing \Rightarrow \alpha = \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow tg\,\alpha = 0$

$2\alpha = 2\pi k + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\alpha = \pi k + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{4}$

2) $\begin{cases}\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}$



Тогда $\left[\begin{array}{l}2\alpha = \pi k\\ 2\alpha = \pi k + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ 2\alpha = \pi k - 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$

$2\alpha = \pi k$

$\alpha = \frac{\pi k}{2}$, но $tg\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right) \in \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \cancel{\frac{(2k+1)\pi}{2}};\ \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow tg\,\alpha = 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 1

$2\alpha = \pi k + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\alpha = \frac{\pi k}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $k \in Z \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = \frac{1}{4}; -4}$

$2\alpha = \pi k - 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\alpha = \frac{\pi k}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $k \in Z \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = -\frac{1}{4}; 4}$

~~$\alpha = 2\pi k$~~

~~$\pi k + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$~~

Ответ: $tg\,\alpha = -4; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; 4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Из условия $f(ab)=f(a)+f(b)$ следует, что $f(x)=f(\frac{x}{y})+f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

Найдем значения $f(x)$ для всех ~~$x \in [3$~~ натуральных $x \in [3;27]$:

$f(3)=0$	$f(4)=f(2)+f(2)=0$
$f(5)=1$	$f(6)=f(2)+f(3)=0$
$f(7)=1$	$f(8)=f(4)+f(2)=0$
$f(11)=2$	$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(13)=3$	и т.д. раскладываем числа на два множителя и находим значение, в итоге
$f(17)=4$	
$f(19)=4$	
$f(23)=5$	
$f(2)=0$	

$f(10)=1$, $f(12)=0$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(18)=0$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(24)=0$, $f(25)=2$, $f(26)=3$, $f(27)=0$

Тогда если $f(\frac{x}{y})<0$, то и $f(x)-f(y)<0$

Среди $3 \leq x \leq 27$ чисел x таких, что $f(x)=0$ всего 10, $f(x)=1$ – 7 штук, $f(x)=2$ – 3 штуки, $f(x)=3$ – 2 штуки, $f(x)=4$ – 2 штуки и $f(x)=5$ одно число.

Тогда для каждого $f(x)=0$ мы можем поставить в пару $f(x)=1; 2; 3; 4; 5$, для $f(x)=1$ можем

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

поставить $f(x)=2;3;4;5$ и т.д.

В итоге количество пар равно:

$10\cdot15+7\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1=$

$=150+56+15+6+2=229$ пар

Ответ: 229 пар

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

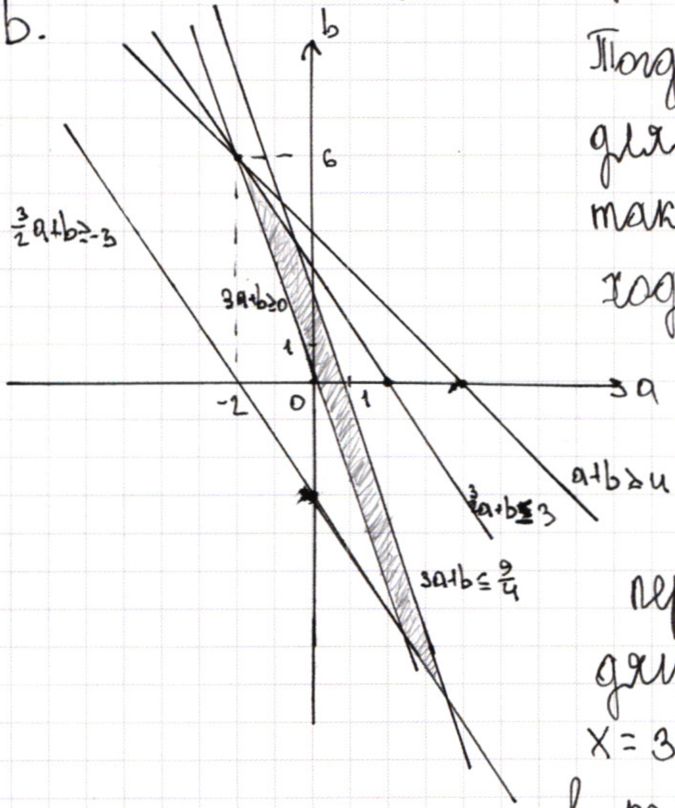
Рассмотрим $x = 3;\ \frac{3}{2};\ \lim\limits_{q\to 1+}(q)$

Для $x=3$ получим $\frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 0$

$x = \frac{3}{2}$: $3 \geq \frac{3}{2}a+b \geq -3$

$x = \lim\limits_{q\to 1+}(q)$: $\infty \geq a+b \geq 4$

Изобразим каждое из условий в координатах $a-b$.



Тогда если a и b подходят для $x=3$ и $x=\frac{3}{2}$, то все такие значения $(a;b)$ находятся в заштриховном участке.

Тогда если для $x=\lim\limits_{q\to 1+}(q)$ выполняется $a+b\geq 4$, то пересечение с $(a;b)$ подходящими под условия $x=3$ и $x=1,5$ всего одно в точке $a=-2$, $b=6$.

Тогда такая пара одна, проверим, что условие выполняется для всех $x\in(1;3]$:

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq -2x+6 \,\Big/ (2x-2)>0,$ т.к. $x>1$ $\Rightarrow 4x-3 \geq -4x^2+16x-12 \Rightarrow 4x^2-12x+9\geq 0$

№ 6

$4x^2-12x+9\geq 0$

$D=144-144=0$

Парабола с ветвями вверх, значит условие выполняется для всех $x\in(1;3]$

$-2x+6\geq 8x^2-34x+30$

$0\geq 8x^2-32x+24$

$D=1024-768=256$

$x=\frac{32\pm\sqrt{256}}{16}=1;3$

Парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$ неравенство выполняется для $x\in(1;3]$

Ответ: $a=-2$; $b=6$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

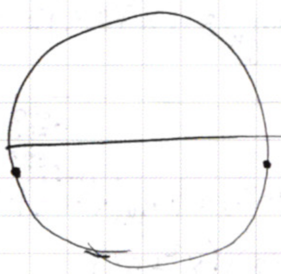
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

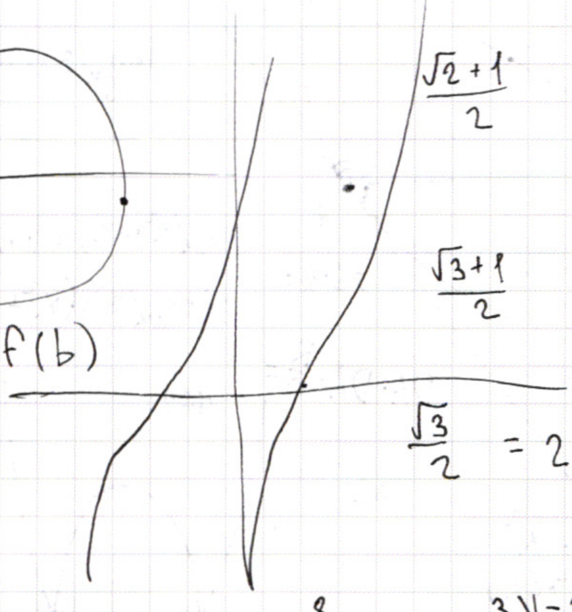
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$





$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ $\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot 2$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

$3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

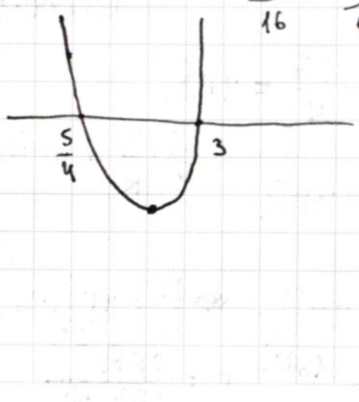
$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\begin{array}{r} \times\, 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$3xy-2x-3y+2 \geq 0$

$\frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 72-102+30$

$$\begin{array}{r} \times\, 12 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$



$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\frac{34\pm 14}{16} = \frac{20}{16}, \frac{48}{16}$

$\frac{5}{4}$ 3

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$289 : 8 = 36\frac{1}{8}$, -24, 49, -48

$\frac{17^2}{8} - \frac{17\cdot 34}{8} + 30 = -\frac{17^2}{8} + 30 = -6\frac{1}{8}$

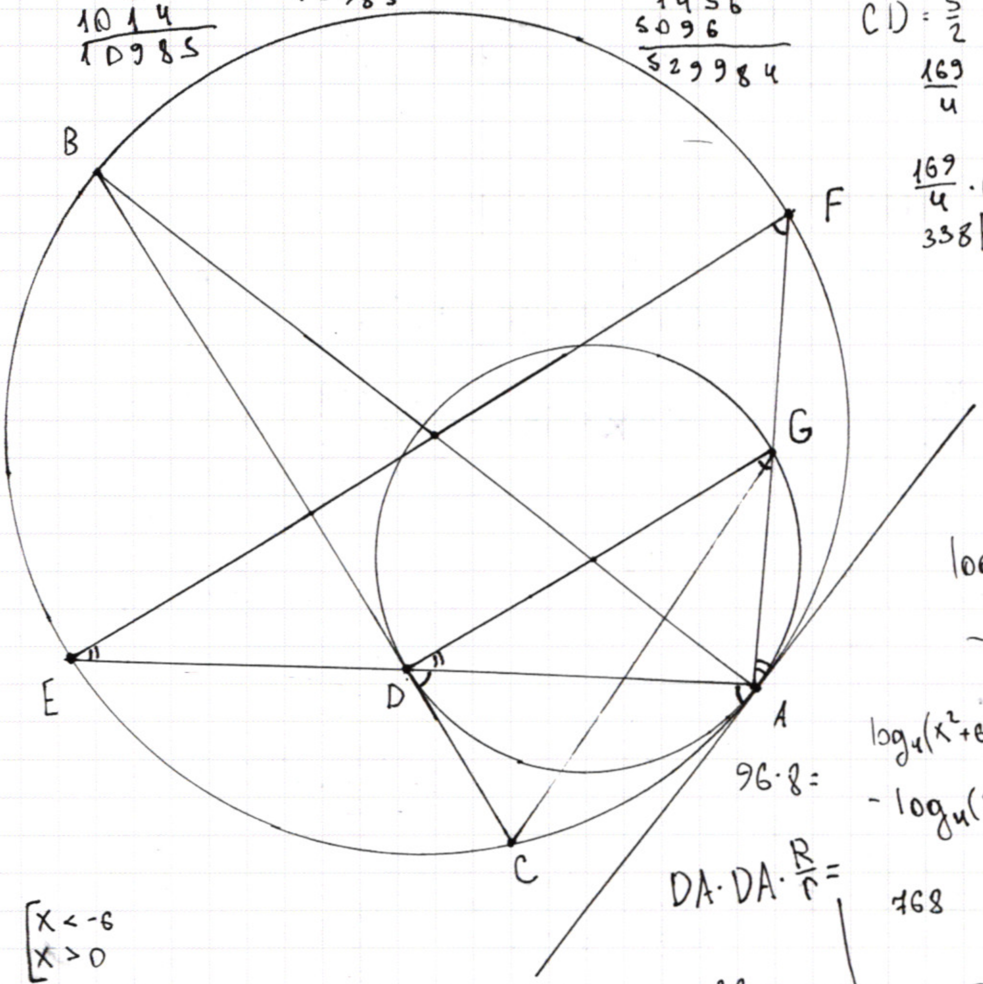
$169 \times 65 = 845$, 1014, 10985

$10985 \times 16 = 65910$, 10985, 175760

$728 \times 728 = 5824$, 1456, 5096, 529984

$390 + 338 = 728$

$529984 - 175760 = 354224$



$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - \frac{260R^2}{8R^2 - \frac{65}{2}}$

$\frac{169}{4} \cdot (8R^2 - \frac{65}{2}) = 32R^4 - 130R^2 - 260R^2$

$338R^2 - \frac{169 \cdot 65}{8} = 32R^4 - 390R^2$

5776

$\frac{\log_4 3}{4} \geq \frac{x^2+6x}{\log_4(x^2+6x)}$

$32R^4 - 728R^2 + \frac{169 \cdot 65}{8} = 0$

$\log_4(3)(x^2+6x) \geq 4 \cdot \log_4(x^2+6x)$

$600 \cdot 600 = 360000$

$\log_4(x^2+6x) \geq \log_4(x^2+6x) \cdot 5 -$

$- \log_4(3)(x^2+6x)$

$96 \cdot 8 =$

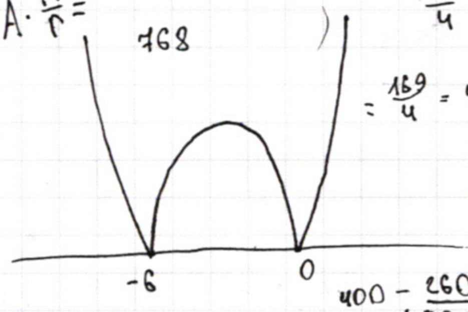
$DA \cdot DA \cdot \frac{R}{r} =$

768

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4R \cdot \frac{65R}{8R^2 - \frac{65}{2}}$

$= \frac{169}{4} = 4R^2 - \frac{260R^2}{8R^2 - \frac{65}{2}}$

32



$\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0 \end{array}\right.$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)}$

$324 - 169 = 155$, $81 \cdot 4 = 324$, $324 - 194 = 130$

$400 - \frac{26000 \cdot 2}{\cancel{1600} - 1535}$

$9^2 + AC^2 = AB^2 = d^2$

$1200x - x^2 = 5776$

194

$AC^2 + DC^2 = DA^2$

$(\frac{13}{2})^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$\frac{169}{4} \cancel{+ r^2} = 4R^2 - 4rR \cancel{+ r^2}$

$AC^2 + \frac{25}{4} = DA^2$

$9^2 + AC^2 = (2R)^2$

$81 + AC^2 = 4R^2$

$81 - \frac{169}{4} + AC^2 = 4rR$

$DC^2 + (2r)^2 = CG^2$

$\frac{25}{4} + 4r^2 = GC^2$

$\frac{155}{4} + AC^2 = 4rR$

$\frac{65}{4} = DA \cdot DA \cdot \frac{R}{r} = DA^2 \frac{R}{r}$

$360000 - 1200x + x^2$

$DA^2 = \frac{65 \cdot r}{4 \cdot R} \Rightarrow AC^2 = \frac{65}{4} \cdot \frac{r}{R} - \frac{25}{4}$

$\frac{155}{4} + \frac{65}{4} \cdot \frac{r}{R} - \frac{25}{4} = 4rR$

$\frac{65}{4} \cdot \frac{r}{R} = 4rR - \frac{65}{2}$

$\frac{65}{2} \cdot \frac{R}{r} + \frac{65}{4} = 4R^2$

$\frac{65}{2} + \frac{65}{4} \cdot \frac{r}{R} = 4rR$

$\frac{2r}{\cancel{65}} = \frac{65R}{4R^2 - \frac{65}{4}}$

$\frac{65}{2} \cdot \frac{R}{r} = 4R^2 - \frac{65}{4}$

$\frac{65}{2r} = \frac{(4R^2 - \frac{65}{4})}{R}$

$\frac{65}{4}\left(2 + \frac{r}{R}\right) = 4rR$

$\frac{r}{R} = \frac{4rR \cdot 4}{65} - 2$

$r = \frac{65R}{8R^2 - \frac{65}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

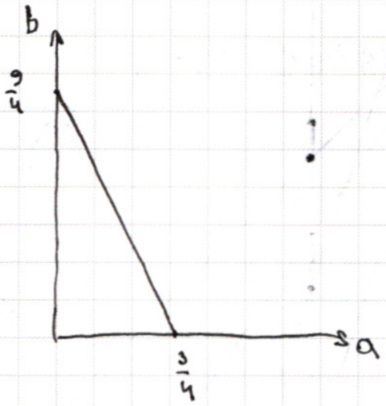
(заполняется секретарём)

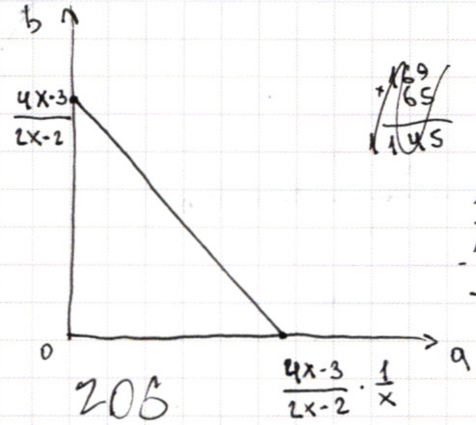
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} = ax+b$

$\frac{9}{4} = 3a+b$

$\frac{9}{4} - 3a = b$





206

$\times\frac{169}{65}$ 1145

$\times\frac{169}{85}$ 845 1014 10985 | 8 = 1373 ; −8, 29, −24, 58, −56, 25

$\cancel{a+b\ge 4}$ $\frac{4x-3}{2x-2} - ax \ge b$

25

$b \ge 8x^2 - 34x - ax + 30$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

10 7 3 2 2 1

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

$+\frac{169}{65}$ 234

117

1	0
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

4	0
6	0
8	0
9	0
10	1
12	0
14	1
15	1
16	0
18	0
20	1
21	1
22	2
24	0
25	2
26	3
27	0

$32R^4 - 728R^2 + \frac{169\cdot 65}{8} = 0$

$1873\frac{1}{8}$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4R\cdot\frac{65R}{8R^2-\frac{65}{2}}$

$338R^2 - \frac{169\cdot 65}{8} = 32R^4 - 130R^2 - 260R^2$

1 $\frac{169}{4} + r^2 = (2R-r)^2$

$81 + AC^2 = (2R)^2$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4rR$

$81 + AC^2 = 4R^2$

$81 - \frac{169}{4} + AC^2 = 4rR$

$81 - \frac{169}{4} + \frac{65r}{4R} - \frac{25}{4} = 4rR$

$\frac{130}{4} + \frac{65r}{4R} = 4rR$

$\cancel{\frac{169}{4} \neq 4R^2}$

$AC^2 + DC^2 = DA^2$

$AC^2 + \frac{25}{4} = DA^2$

$DA^2\cdot\frac{R}{r} = \frac{65}{4}$

$DA^2 = \frac{65r}{4R}$

$AC^2 = \frac{65r}{4R} - \frac{25}{4}$

$\frac{2r}{65} = \frac{R}{4R^2-\frac{65}{4}}$

$r = \frac{65R}{8R^2-\frac{65}{2}}$

$\frac{65}{2}\cdot\frac{R}{r} + \frac{65}{4} = 4R^2$

$\frac{65}{2}\cdot\frac{R}{r} = 4R^2 - \frac{65}{4}$

$\frac{65}{2r} = \frac{4R^2-\frac{65}{4}}{R}$

$\cancel{\frac{65}{2}\cdot\frac{R}{r} + \frac{65}{4} - \frac{130}{4} - \frac{65r}{4R} = \frac{169}{4}}$

$\cancel{\frac{65}{2}\cdot\frac{R}{r} - \frac{65r}{4R} = \frac{117}{2}}$

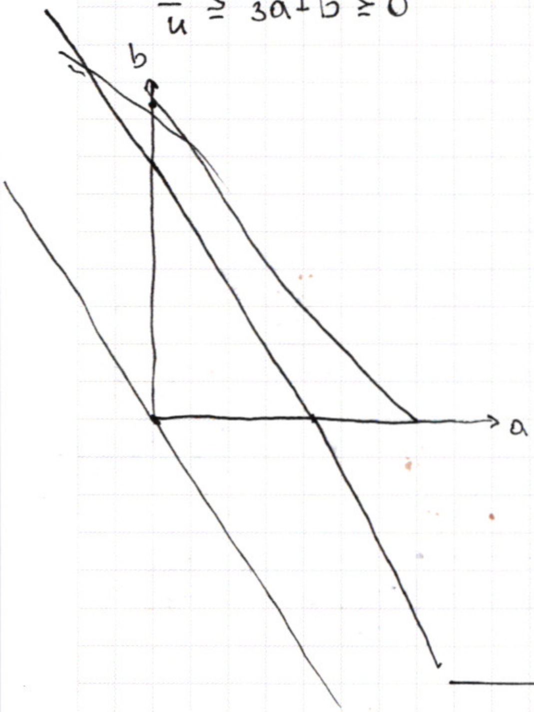
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 0$

$3 \geq 1{,}5a+b \geq -3$

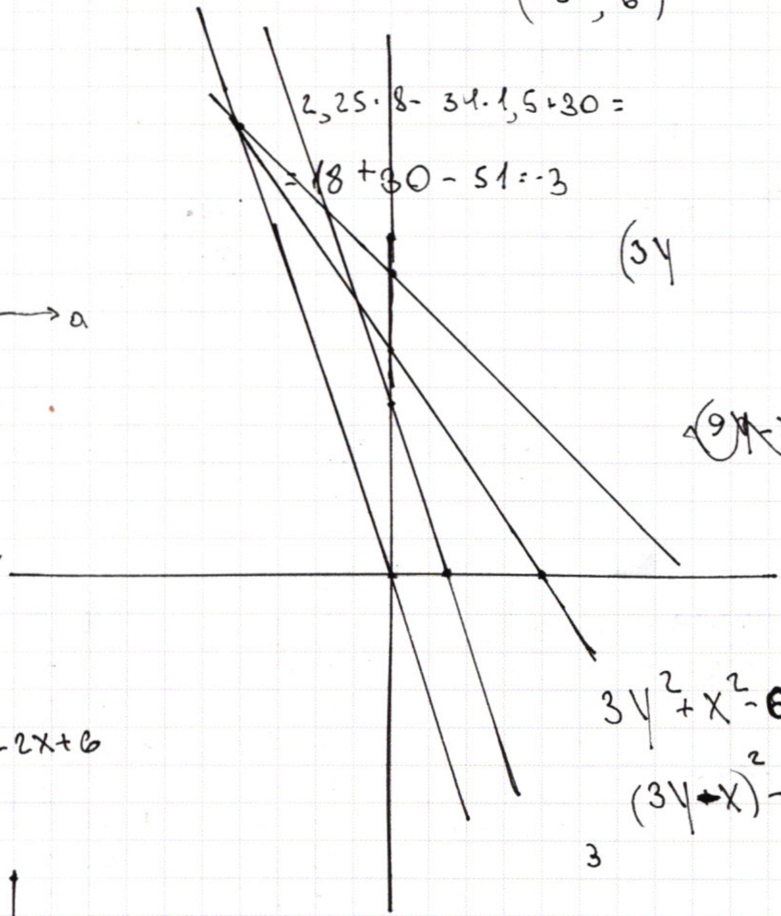
$\frac{\log_4 3}{4} \geq \frac{\log_4(x^2+8x)}{x^2+8x}$



$(-2;6)$

$2{,}25 \cdot 8 - 34 \cdot 1{,}5 + 30 =$

$= 18 + 30 - 51 = -3$



$(3y \quad)(y$

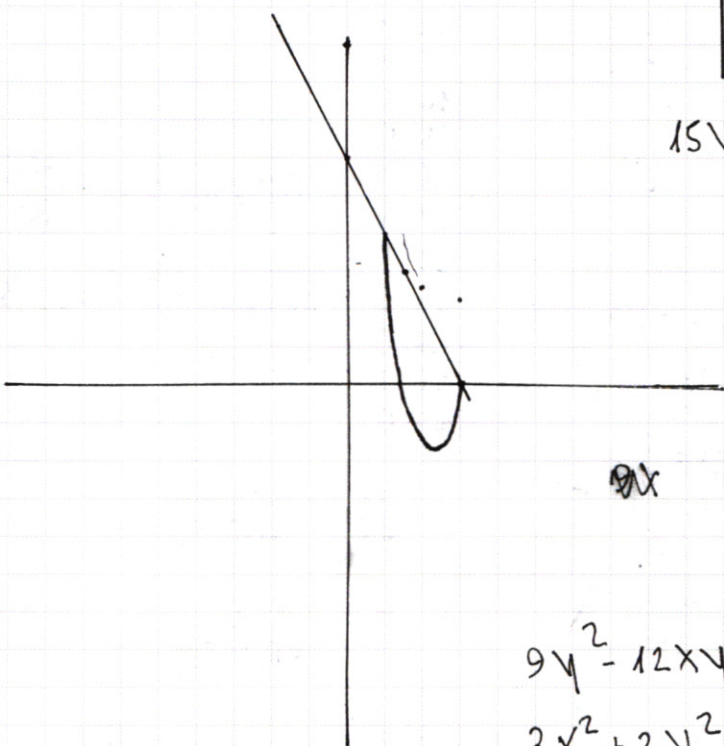
$\cancel{(9y-x)(-3y-x)}$

$3y^2+x^2-6xy+2x+2y=0$

$(3y+x)^2-6y^2+2x+2y=0$

3

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq -2x+6$



$15y^2+5x^2-30xy+10x+10y=0$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=$

$= 3x^2+3y^2-6x+4y$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3(x-1)^2+(2y-1)^2-y^2-4=4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)