МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha}_{1} = -\frac{2}{5}\,;\quad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

1 $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\left(2\cos^2 2\beta - 1\right) + \cos 2\alpha\cdot\left(2\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{5}$

$$\cos 2\beta\,\underbrace{\left(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\right)}_{=\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{5}$$

тогда: $\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1 \Rightarrow \sin^2 2\beta = \frac{20}{25}$

Значит: $\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{array}\right.$

Разберем оба случая по-отдельности:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \qquad (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \;\Big|: \cos^2\alpha \neq 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1\\ tg\alpha = 3\end{array}\right.$

$$\begin{cases} \sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| \cdot \sqrt{5}$$

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \quad (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$$

$$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$$

$$3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

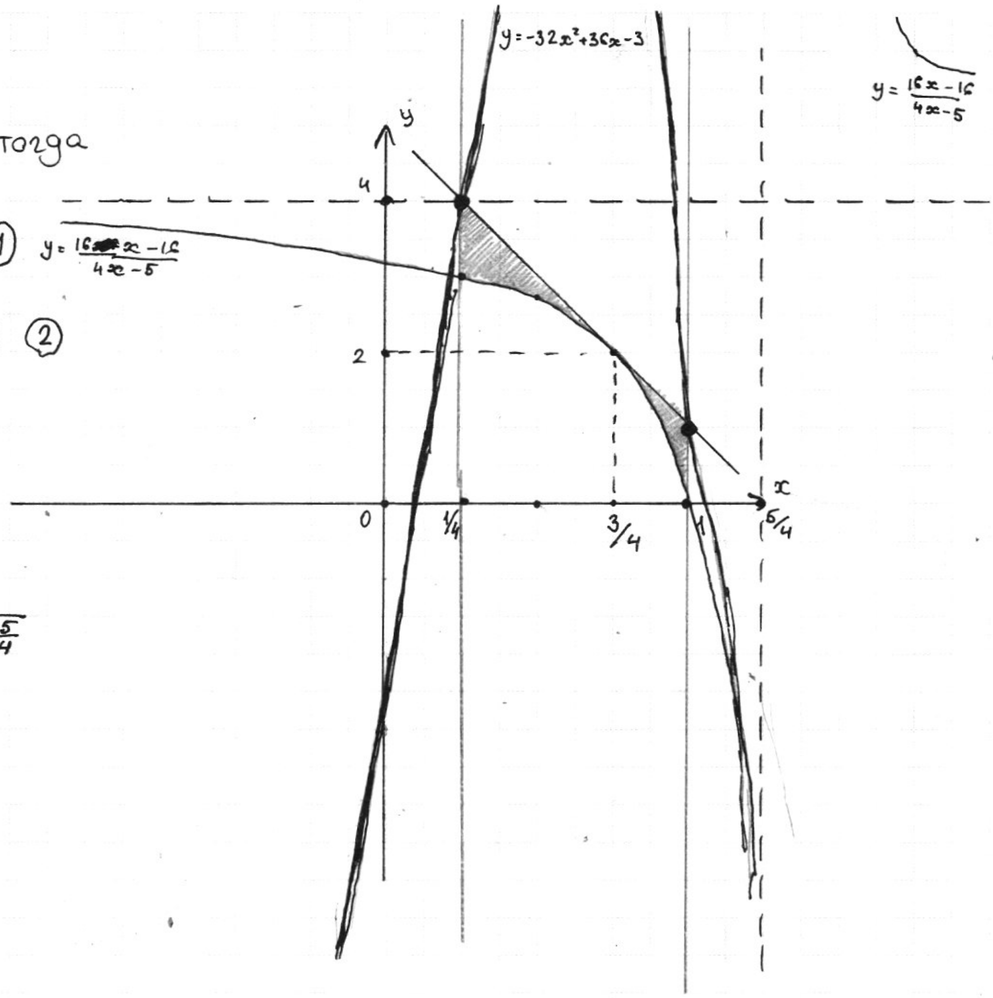
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

Пусть $ax+b=y$, тогда

$$\begin{cases} \frac{16x-16}{4x-5} \leq y & (1) \\ -32x^2+36x-3 \geq y & (2) \end{cases}$$



(1) $\frac{16x-16}{4x-5} =$

$= 4+\frac{4}{4x-5} = 4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

график - гипербола

гор. асимптота $= 4$

вер. асимптота $= \frac{5}{4}$

лежит в 1 и 3 четв.

(2) $-32x^2+36x-3=y$

график - парабола

ветви вниз

$x_в = \frac{9}{16}$

$y_в = -32 \cdot \frac{9^2}{16^2} + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3 = \frac{81 \cdot 7 - 24}{8} = 88\frac{1}{8}$

$y(1/4) = 4$

$y(1) = 1$

~~Тогда, т.к. при любом $x \in [1/4; 1]$ нер-во должно выполняться~~

~~решения (2) будут~~

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~~Тогда, зная, что $\forall x \in [1/4; 1]$ нер-во выполняется~~

Нер-во будет выполняться $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$ только для $y \leq$ прямой, проходящей через $(1/4; 4)$ и $(1;1)$

иначе ~~...~~ найдется такой y выше заданной прямой, для которого $\exists x \in [1/4; 1]$ не удовл. нер-ву.

Найдем формулу прямой, проходящей через $(1/4; 4)$ и $(1;1)$

$y = kx + m$

$$\begin{cases} 4 = \frac{1}{4} \cdot k + m \\ 1 = k + m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k = -4 \\ m = 5 \end{matrix} \Rightarrow y = -4x + 5$$

Найдем точки пересечения с $y = 4 + \frac{1}{x - 5/4}$

$-4x + 5 = 4 + \frac{1}{x - 5/4} \quad | \cdot (x - 5/4) \neq 0$

$-4x^2 + 6x - 9/4 = 0$

$(4x - 3)^2 = 0$

$x = 3/4 \Rightarrow y = 2$

Значит, $y = -4x + 5$ — касательная к графику $y = 4 + \frac{1}{x - 5/4}$ с точкой касания $(3/4; 2)$

Тогда, нужно найти такие a и b, что $y = ax + b \in$ заштрихованной обл.

Значит, $y = ax + b$ проходит через $(3/4; 2)$ и $y = ax + b$ — касательная к $y = 4 + \frac{1}{x - 5/4}$

Значит, $a = -4$, $b = 5$

Ответ: $(-4; 5)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

1. Докажем, что $f\left(\frac{1}{k}\right) = -f(k)$, для $k \neq 0$

$$f(m) = f\left(\frac{m \cdot k}{k}\right) = f(m) + f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(k) + f(1/k) = 0$$

$$f(1/k) = -f(k)$$

2. Тогда условие примет вид: $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) - f(b) < 0$

$2 \leq a \leq 25$

$2 \leq b \leq 25$

Распишем значения f для значений от 2 до 25

$f(2) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

(далее подобные операции в уме)

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

Тогда решениями $f\left(\frac{a}{b}\right) < 0$ будут такие a и b, что $f(a) < f(b)$

$f(a) = 0$ 10 вар.	$f(b) > 0$ 14 вар	$\Rightarrow$ 140 вар.
$f(a) = 1$ 7 вар.	$f(b) > 1$ 5 вар	$\Rightarrow$ 35 вар.
$f(a) = 2$ 3 вар.	$f(b) > 2$ 3 вар	$\Rightarrow$ 9 вар
$f(a) = 3$ 1 вар	$f(b) > 3$ 3 вар	$\Rightarrow$ 3 вар
$f(a) = 4$ 2 вар	$f(b) > 4$ 1 вар	$\Rightarrow$ 2 вар
$f(a) = 5$ 1 вар	$f(b) > 5$ 0 вар	0 вар
⋮		0
⋮		⋮

считаем сумму $= 189$ вар.

Ответ: 189

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$x = \sqrt{(2y-1)(x-6)} + 12y$

$140 + 35 + 9 + 3 + 2 = 189$

49 14 5

$f\left(\frac{4\cdot 7}{7}\right) = f($

$f(a) = f\left(\frac{ak}{k}\right) = f(a) + f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right) = f(a)$

$f(1/k) = -f(k)$

Тогда $f(a/b) = f(a) - f(b) < 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$f(25) = f\left(\frac{100}{4}\right) =$

$f(4) = f\left(\frac{16}{4}\right) = f(16) + f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

$f(4) + f(4) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(a/b) < 0$

$\begin{cases} f(a) = 0 \\ f(b) \geq 0 \end{cases}$ 10 b, 13 b $\boxed{130}$

$\begin{cases} f(a) = 1 \\ f(b) > 1 \end{cases}$ 6 b, 5 b $\boxed{30}$

$\begin{cases} f(a) = 2 \\ f(b) > 2 \end{cases}$

$\begin{cases} f(a) = 3 \\ f(b) > 3 \end{cases}$

$\begin{cases} f(a) = 4 \\ f(b) > 4 \end{cases}$

$\begin{cases} f(a) = 5 \\ f(b) > 5 \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$ ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$\log_3(10x - x^2) = \frac{\log_5(10x - x^2)}{\log_5 3}$

$5^{\log_3(10x-x^2)} = (10x - x^2)^{\frac{1}{\log_5 3}} = (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} - x^2 \geq 0$

$\underbrace{10x - x^2}_{>0 \text{ на ОДЗ}} + \underbrace{(10x - x^2)^{\log_3 4}}_{>0 \text{ на ОДЗ}} \geq (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$\cancel{(10x - x^2)^{\log_3 4} \cdot \left((10x - x^2)^{1 - \log_3 4} + 1\right) \geq (10x - x^2)^{\log_3 5}}$

$x^4 + \cancel{x^2} - x^3$

$\cancel{x(-x^2 + x + 1)}$

$(10x - x^2)^1 + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

$(10x - x^2)^{\log_3 \frac{4}{5}} \cdot$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - \cancel{t^{\log_3 \frac{5}{3}}}$

$x + x^2 > x^3 \quad / x \neq 0$

$x + 1 > x^2$

$x^2 - x - 1 < 0$

$(x-6)^2 + 2(x-6)(2y-1) + (2y-1)^2 + 2(2y-1)^2 - 2(x-12y)^2 = 90$

$(x - 6 + 2y - 1)^2 + 2(2y-1)^2 - 2(x - 12y)^2 = 90$

$(x + 2y - 7)^2 + 2(2y-1)^2 - 2(x - 12y)^2 = 90$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f \in \mathbb{R}^+$

$81 \cdot 7 = 427 - 24 = \frac{705}{8}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$705 : 8 = 88$, 64, 65, 64, 1

$2 \leq x \leq 25$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$2 \leq y \leq 25$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(2) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$f(8) = f(4) + f(2) = f(2) + f(2) + f(2) = 0$

$f(49) = f(7) + f(7) = 2$

$f(b^{-1}) = ???$ Что делать с дробями?

$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax + b$

$ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

$\frac{16x-16}{4x-5} =$ $\quad 16x-16 : 4x-5 = 4$, $16x-20$, 4

$4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x - \frac{5}{4}}$

при $x = \frac{2}{4}$ $\quad 4 + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4} - \frac{5}{4}} = 4 + \frac{4}{-3} = \frac{8}{3} = 2\frac{1}{3}$

$-32x^2 + 36x - 3$ при $x = 1 \Rightarrow y = 1$

$x_B = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$ $\quad x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 =$

$-2 + 9 - 3 = 4$

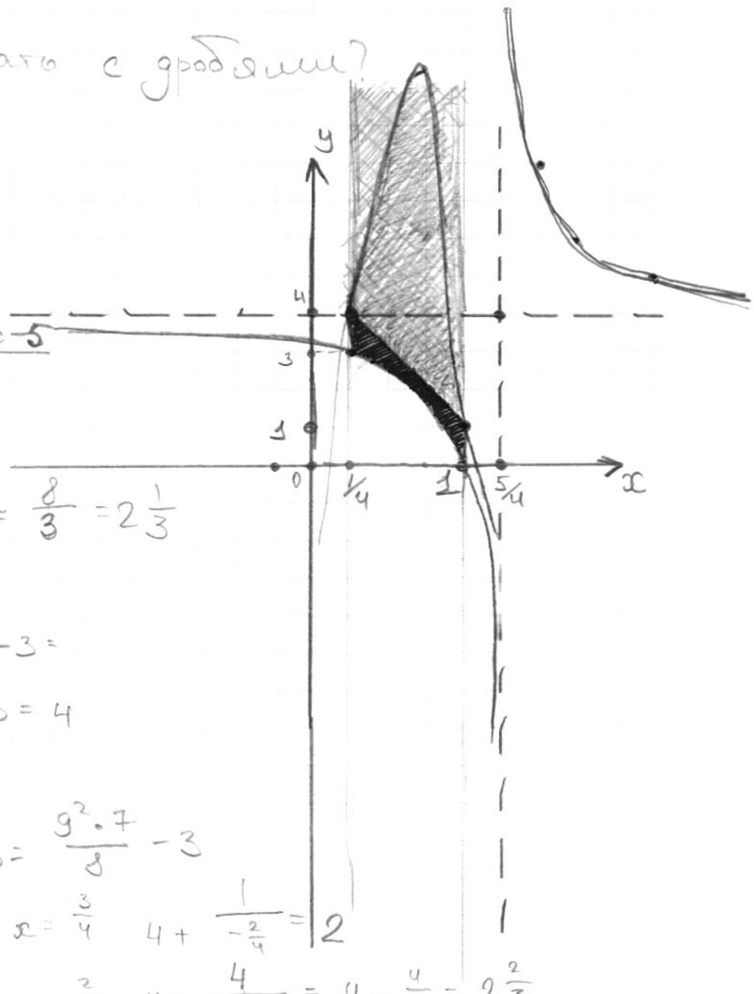
$y_B = -32 \cdot \frac{9^2}{16^2} + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3$

$-\frac{2 \cdot 9^2}{16} + \frac{9^2}{4} - 3 = \frac{9^2}{4}\left(1 - \frac{1}{8}\right) - 3 = \frac{9^2 \cdot 7}{8} - 3$

$= \frac{81 \cdot 7 - 24}{8} = 88\frac{1}{8}$

при $x = \frac{3}{4}$ $\quad 4 + \frac{1}{-\frac{2}{4}} = 2$

при $x = \frac{2}{4} = 4 + \frac{4}{-3} = 4 - \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3}$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

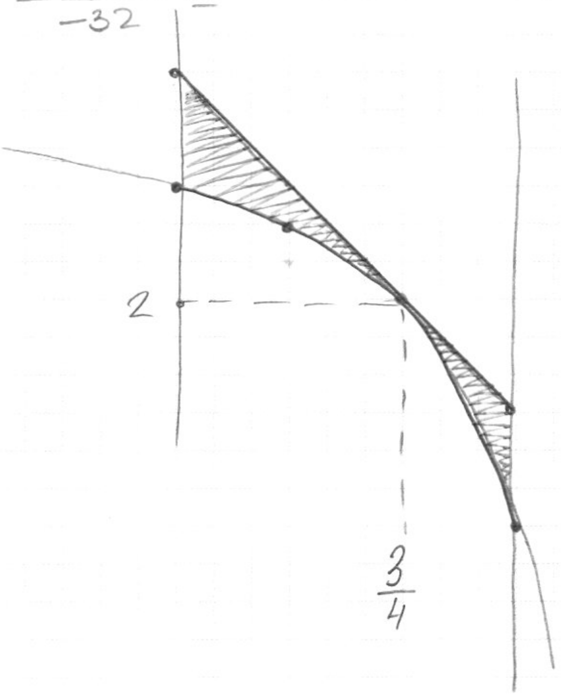
$-32x+36x-3=0$

$D_1=18^2-3\cdot 32=$

$324-96=228$

$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ +\,18 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 324 \\ -\,96 \\ \hline 228 \end{array}$$

$x_1=\dfrac{-18+\sqrt{228}}{-32}=$



$ax+b=y$

проходит через $\left(\frac{3}{4};2\right)$

$\frac{3}{4}a+b=2$

$b=2-\frac{3}{4}a$

$-32x^2+36-3=4+\dfrac{4}{4x-5}$

$-4x+5=4+\dfrac{1}{x-5/4}$

$-4x+1=\dfrac{1}{x-5/4}$

$(-4x+1)\cdot(x-5/4)=1$

$-4x^2+x+5x-5/4=1$

$-4x^2+6x-9/4=0$

$16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{4}\quad y=2$

$k=1-m$

$m=1-k$

$\frac{1}{4}k+1-k=4$

$-\frac{3}{4}k+1=4$

$-3k+4=16$

$3k=-12$

$k=-4$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cancel{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$

$\cancel{2\alpha+2\beta = (-1)^k\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha$

$2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

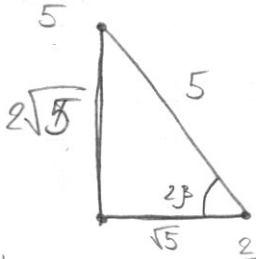
$\cancel{\cos 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}}$

$2\cos(2\beta)\Big(\underbrace{\cos 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta}_{\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}}\Big) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\cos 2\beta\cdot\frac{1}{-\sqrt5} = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} = \frac{1}{5}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}}$



$x = \sqrt{5^2-5} = \sqrt{20} = 2\sqrt5$

$\Downarrow$

$\boxed{\sin 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{\cancel{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{\cancel{5}} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big|\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + \underbrace{1}_{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = 0$

$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 5\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$3t^2 - 2t - 5 = 0$

$D_1 = 1 + 15 = 16$

$\left[\begin{array}{ll} t = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3} & tg\,\alpha = \frac{5}{3} \\ t = \frac{1-4}{3} = -1 & tg\,\alpha = -1 \end{array}\right.$

$2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha - \underbrace{1}_{-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)} = 0$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$???

$x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} - (y^2 + 12y + 36) + 36 + 6 = (x+y)^2 - (x+\frac{1}{4})^2 - (y+6)^2 + \frac{169}{4} = (\cancel{x} + y - \cancel{x} - \frac{1}{4})(x + y + x + \frac{1}{4}) - (y + 6 + \frac{169}{4})(y + 6 - \frac{169}{4}) =$

②
$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$x^2 - 12x + 36 - 36 + 36(y^2 - y + \frac{1}{4}) - 9 = 45$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 - 45 = 45$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{x^2+2xy+y^2-12y-x+6=x^2-y^2=}$$

$$\cancel{=(x+y)^2-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}-\left(y^2+12y+36\right)+36+6=}$$

$$\cancel{=(x+y)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-(y+6)^2+\frac{169}{4}}$$

$$\cancel{\left(x+y+x+\frac{1}{2}\right)\left(x+y-x-\frac{1}{2}\right)-\left(y+6+\frac{13}{2}\right)\left(y+6-\frac{13}{2}\right)=}$$

$$\cancel{\left(2x+y+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(y+\frac{25}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=}\quad y-\frac{1}{2}$$

$$\cancel{=\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(2x+y+\frac{1}{2}-y-\frac{25}{2}\right)=}\ 2\left(y-\frac{1}{2}\right)(x-6)=(2y-1)(x-6)$$

$$\sqrt{(2y-1)(x-6)}=x-12y$$

$$(x-6)^2+(2y-1)^2\cdot 9=90$$

$$x-12y\geq 0$$

$$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$$

$$x^2-26xy-x+144y^2-12y+6=0$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

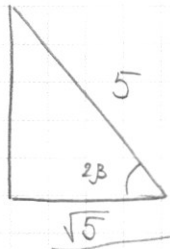
$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

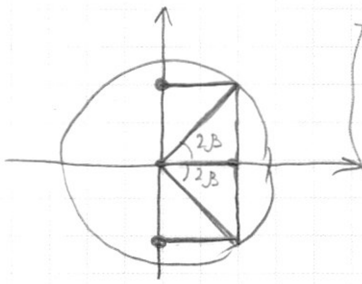
$\sin 2\alpha \cdot \underset{(2\cos^2 2\beta - 1)}{\underset{\parallel}{\cos 4\beta}} + \cos 2\alpha \cdot \underset{(2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta)}{\underset{\parallel}{\sin 4\beta}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + \cancel{2}\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\cos 2\beta \cdot \underbrace{(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta)}_{= -\frac{1}{\sqrt5}} = -\frac{1}{5}$

$\frac{\cos 2\beta \cdot (-1)}{\sqrt5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} \quad \frac{2\sqrt5}{5}$





$\sin 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt5}{5}$

1. $\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$

$\sin^2 2\beta = \frac{20}{25}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)