МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зад. 1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5} \Rightarrow \sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos(2\alpha)-\cos(4\alpha+4\beta)\sin 2\alpha+$
$+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\sqrt{\frac{5-1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\sin(4\alpha+4\beta)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)=2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{4}{5}$

$\cos(4\alpha+4\beta)=\cancel{\frac{4}{5}}=\cos^2(2\alpha+2\beta)-\sin^2(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

$-\frac{2}{5}=-\frac{4}{5}\cos 2\alpha-\frac{3}{5}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha \Rightarrow -2=-4\cos 2\alpha-3\sin 2\alpha+5\sin 2\alpha$

$-4\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=-2$

$-2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+1=0$

$-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$

Заметим, что $\cos^2\alpha=0$ - не реш. ур. $\Rightarrow$ можно делить

$-\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0 \quad |:\cos^2\alpha$

$-1+3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha=0 \quad \exists\, t=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$

$3t^2+2t-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha=-1 \\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

2) $\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(4\alpha+4\beta)=2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)=\frac{4}{5}$

$\cos(4\alpha+4\beta)=\cancel{\frac{4}{5}}\ \frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

$-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\cos 2\alpha-\frac{3}{5}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha \Rightarrow -2=4\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+1=0$

$2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Заметим, что $\cos^2\alpha = 0$ не явл. решением ур. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = 0 \; | : \cos^2\alpha$

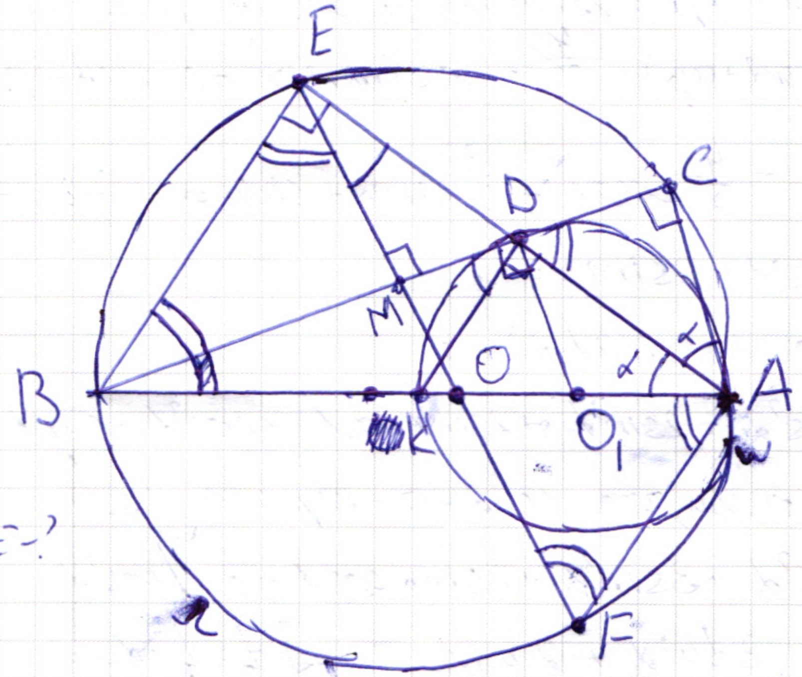
$3 - tg^2\alpha + 2tg\alpha = 0 \quad] \; t = tg\alpha$

$-t^2 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -1$
$tg\alpha = \frac{1}{3}$
$tg\alpha = 3$

Зад. 4

Дано:
AB - диаметр Ω
O - центр Ω
O_1 - центр ω
BC - кас. ω в (.) D
$EF \perp BC$
$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$



R_Ω - ? r_ω - ? $\angle AFE$ - ?
S_{AEF} - ?

$] \angle BAD = \alpha$

Заметим, что $\angle BCA = 90°$ т.к. опирается на диаметр AB

] (.) K - вторичное пересеч. AB окр. ω

Заметим, что $KDA = 90°$ т.к. опирается на диаметр (AK - диаметр окр ω; т.к. $AK \subset AB$, а на AB лежит O_1) $\angle BDK = \alpha$ по Th о касат. и хорде т.к. KD - хорда, а BC - касат.; $\Rightarrow$ 17 15

$\Rightarrow \angle CDA = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha$; $(17-15)(17+15)$

$\angle EBC = \angle ECA = \alpha$ т.к. они опираются на одну и ту же дугу.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $\angle AEB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр Ω $AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EBA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle EFA = \angle EBA = 90^\circ - \alpha$ т.к. они опираются на одну и ту же дугу.

$\angle EDB = \angle CDA = 90^\circ - \alpha$ как вертик $\Rightarrow \angle DEF = \angle CAD = \alpha$ т.к. $\triangle EMD$ - прямоуг ($M = BC \cap EF$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EAF = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ \Rightarrow EF$ - диаметр Ω

Т.к. $\angle BAD = \alpha = \angle CAD \Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по св. биссектр. $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{15} \Rightarrow AB = \frac{17}{15}AC$

по Th Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 \Rightarrow 16^2 = AC^2 \cdot \frac{17^2}{15^2} - AC^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC^2\left(-1 + \frac{17^2}{15^2}\right) = 16^2 \Rightarrow AC^2 = \frac{4 \cdot 8 \cdot 15^2}{32 \cdot 8} \Rightarrow AC = 30$
$\Rightarrow tg(\angle CBA) = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

Т.к. BD - касат $\Rightarrow O_1D \perp BD \Rightarrow \angle BDO_1 = 90^\circ \Rightarrow DO_1 = tg(\angle CBA \cdot BD) \Rightarrow$
$\Rightarrow DO_1 = r_\omega = \frac{15 \cdot 2}{8 \cdot 17} = \frac{15}{68}$

$AB = 17 \cdot 2 = 34 = 2R_\Omega \Rightarrow R_\Omega = 17$

$\angle EOA = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \cos(\angle EOA) = -\cos(2\alpha)$

$\cos 2\alpha = \frac{30}{34}$ из $\triangle ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow AE^2 = OE^2 + OA^2 + 2OE \cdot OA \cdot \cos 2\alpha$ по Th косинусов для $\triangle AEO$

$AE^2 = 17^2 + 17^2 + \frac{2 \cdot 17^2 \cdot 30}{34} = 2 \cdot 17^2 + 17 \cdot 30 = 17(30+34) = 17 \cdot 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow AE = 8\sqrt{17} \Rightarrow \sin(\angle EFA) = \frac{8\sqrt{17}}{34} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle EFA = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow AF = \sqrt{34^2 - 64 \cdot 17}$ по Th Пифагора $\Rightarrow AF = \sqrt{4 \cdot 17^2 - 4 \cdot 16 \cdot 17} =$
$= \sqrt{4 \cdot 17 \cdot 1} = 2\sqrt{17} \Rightarrow S_{\triangle EAF} = \frac{2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17}}{2} = 17 \cdot 8 = 136$

Ответ: $R_2 = 34$; $r_w = \cancel{\ }\ \frac{15}{68}$; $\angle EFA = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$; $S_{AEF} = 136$

Зад. 2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \Rightarrow (x-6)+6(1-2y)=\sqrt{(x-6)(-1+2y)}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45 \Rightarrow (x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

Заметим что $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6\geq 0 \\ 2y-1\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-1\leq 0 \\ x-6\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ и $x-12y\geq 0$

$\exists\ x-6=a$

$2y-1=b \Rightarrow (1) = a-6b=\sqrt{ab} \Rightarrow a^2+36b^2-12ab=ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-13ab+36b^2=0 \Rightarrow D=13^2b^2-4\cdot 36b^2 = 25b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{13b\pm 5b}{2} = \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$

1) $(2) = a^2+9b^2=90 \quad a=9b$

$81b^2+9b^2=90 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$ 1) $b=1 \Rightarrow a=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-6=9 \Rightarrow x=15$

$2y-1=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$

$\begin{cases} x-6=9>0 \\ 2y-1=1>0 \\ x-12y=15-12>0 \end{cases} \Rightarrow$ подх.

2) $b=-1 \Rightarrow a=-9 \Rightarrow x-6=-9 \Rightarrow x=-3$

$2y-1=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-6<0 \\ 2y-1<0 \end{cases} \Rightarrow$ подх.

$x-12y<0 \Rightarrow$ не подх.

2) $a=4b \Rightarrow 36b^2+9b^2=90 \Rightarrow b^2=2 \Rightarrow$ 1) $b=\sqrt{2} \Rightarrow a=4\sqrt{2} \Rightarrow$

$x=6+4\sqrt{2}>0 \qquad \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$2y-1=\sqrt{2}>0 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$x-12y=6+4\sqrt{2}-6\sqrt{2}-6<0$ не подх.

2) $b=-\sqrt{2} \Rightarrow a=-4\sqrt{2}$

$x-6<0$; $2y-1<0$

$x=6\cancel{+}-4\sqrt{2}$

$y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$x-12y=6-4\sqrt{2}-6+6\sqrt{2}\geq 0 \Rightarrow$ подх.

Ответ: $(x=15;\ y=1)$; $\left(x=6-4\sqrt{2};\ y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зад 5

Докажем, что $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$

Заметим, что $\forall a,b>0$ $f(a)=f(ab)+f\left(\frac{1}{b}\right)$ т.к. $a=ab\cdot\frac{1}{b} \Rightarrow f\left(\frac{1}{b}\right)=f(a)-f(ab)$

Тогда т.к. $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)+f(a)-f(ab)=$

$=2f(a)-f(a)-f(b)=f(a)-f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$

Тогда посмотрим чему равны $f(x)$ $\forall x\in[2;25], x\in\mathbb{N}$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0=f(2)+f(2)$

$f(5)=1$

$f(6)=0=f(2)+f(3)$

$f(7)=1$

$f(8)=0=f(2)+f(4)$

$f(9)=0=f(3)+f(3)$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=1$

$f(12)=0$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(13)=3$

$f(18)=0$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=1$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

Заметим, что если $f(x)=0$, то $f\left(\frac{y}{x}\right)\geq0$ т.к. ~~$f(y)-f(x)$~~

$f\left(\frac{y}{x}\right)=f(y)-f(x)=f(y)$

Тогда если $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, то

1) $x: f(x)=0$ $y: f(y)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ таких пар $10\cdot13=130$

2) $x: f(x)=1$ $y: f(y)>1$

таких пар: $9\cdot4=36$

3) $x: f(x)=2$ $y: f(y)>2$

таких пар $1\cdot3$

4) $x: f(x)=3$ $y: f(y)>3$

таких пар: 2

5) $x: f(x)=4$ $y: f(y)>4$

таких пар 1

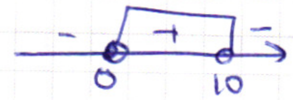
больше пар нет т.к. $\forall x\in[2;25], x\in\mathbb{N}$ $f(x)\in[0;5]$ $f(x)\in\mathbb{Z}$

Тогда кол-во пар $130+36+3+2+1=172$ Ответ: 172

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Зад. 3

$$10x-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

О.Д.З $10x-x^2>0 \Rightarrow$  $\Rightarrow x\in(0;10)$

$\rceil\ 10x-x^2=t \Rightarrow t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$5^{\log_3 t}=t^{\log_3 5}$ по св-ву логарифмов

$t(1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1})\geq 0$ т.к. $t>0 \Rightarrow$ на него можно поделить и знак не-ва не изм

$\Updownarrow$

$1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}\geq 0$

Заведем $f(t)=1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}$

Заметим, что если $t\leq 1 \Rightarrow$ ~~при~~ $t>0 \Rightarrow f(t)\geq 0$

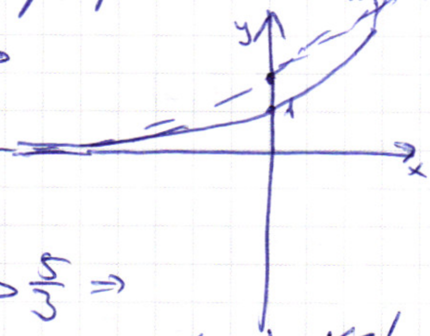
$t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}>0 \Rightarrow t^{\log_3 4-1}>t^{\log_3 5-1}$ при log по осн $t<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 4-1<\log_3 5-1 \Rightarrow$ ~~lo~~ $4<5$ - что верно если $t=1 \Rightarrow f(1)=1>0$

~~ЯЯЯ~~ Найдем $f(t)=0 \Rightarrow 1+t^{\log_3 4-1}=t^{\log_3 5-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t}=\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t} \rightarrow$ у таких графиков не больше

2х ~~по~~ пересечений $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x+1;\left(\frac{5}{3}\right)^x\right) \longrightarrow$



Заметим, что одно пересечение

при $t=9 \Rightarrow 1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}$ - верно

Также заметим, что при $t=1 \Rightarrow 1+\frac{4}{3}>\frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ второе пересечение если есть, то при $t\in(0;1)$ ~~...~~

$\Rightarrow$ ~~...~~ ; но на этом участке наше изначальное неравенство выполняется $\Rightarrow t\in(0;9] \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x-x^2\in(0;9]$; $10x-x^2$ - парабола ветвями ~~вверх~~ вну $\Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2+10x-9=0$ $\left[\begin{array}{l}x=9\\x=1\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ т.к. нужно, чтобы $10x-x^2\in(0;9] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$x\in(0;1]\cup[9;$~~ $\boxed{x\in(0;1]\cup[9;10)}$

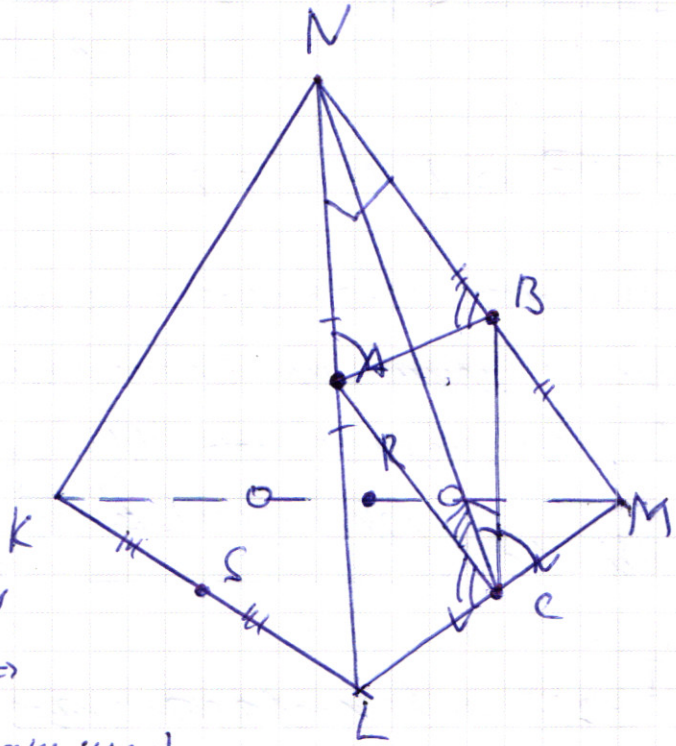
Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зад. 7

Дано:
$KL=3$
$KM=1$
$MN=\sqrt{2}$
$N; A; B; C; R; S$ - лежат на одной сфер

LM - ?
найти рад. оп.сф. ?



Заметим, что 4х угольник NBCA - ~~от~~ вписанный $\Rightarrow$

$\angle NBA = \angle NCA$ (опир. на одну дугу)

$\angle NAB = \angle NCB$ (опираются на одну дугу)

$\angle NBA = \angle ACL$ т.к. $NB \parallel AC$ (ср. лин) $LC \parallel AB$ (ср. лин)

$\angle BCM = \angle NAB$ т.к. $LM \parallel AB$ (ср. лин) $NA \parallel BC$ (ср. лин) $\Rightarrow$

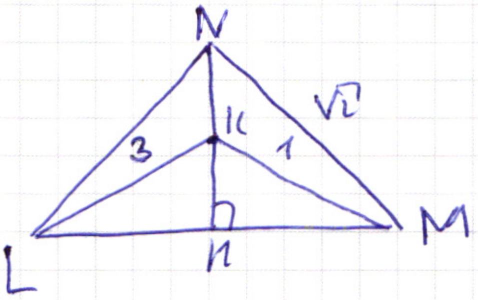
$\Rightarrow 2\angle NCA + 2\angle NCB = 180^\circ \Rightarrow \angle NCA + \angle NCB = 90^\circ = \angle ACB \Rightarrow$

$\angle ANB = 90^\circ$ т.к. по св. впис. 4х уг. $\angle ANB + \angle ACB = 180^\circ$

Заметим, что окружность описанная вокруг ABC - это окружность 9 точек для $\triangle NLM \Rightarrow$ основание высоты $NH \perp LM \in$ окр.

окружность описанная вокруг $\triangle SRC$ - окр. 9 точек $\triangle KLM \Rightarrow$ основание высоты KH' - принадл. окр. $\Rightarrow$ $(KH' \perp LM)$, но прямая пересекает сферу не более чем в 2х точках $\Rightarrow H' = H \Rightarrow$

если $\triangle LNM$ положить на $\triangle KLM$ получим (заметим, что KH и NH совпадут т.к. KH и NH $\perp LM$)



$\exists HM = a \Rightarrow KH = \sqrt{1-a^2}$

$NH = \sqrt{2-a^2}$

$LH = \sqrt{9-1+a^2} = \sqrt{8+a^2}$

$LN = \sqrt{8+a^2+2-a^2} = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow LN = \sqrt{10} \Rightarrow LM = \sqrt{10+2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Заметим, что центр сферы описанной около данной пирамиды лежит на перпендикуляре к плоскости NLM в (о) C. Заметим, что KC - медиана $\triangle KLM$

Медиана $KC = \sqrt{\frac{2KL^2+2KM^2-LM^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\cdot 9+2\cdot 1-12}}{2} = \frac{\sqrt{18+2-12}}{2} =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$ ~~Если высота центр сферы находится на расстоянии x от пл NLM~~ $\Rightarrow$ ~~$R_{сф} = \sqrt{2-x^2}$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow R^2_{сф} =$ $\exists$ высота пирамиды из K на пл KLM $= x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ расстояние от оси до $C = \sqrt{2-x^2}$. Пусть центр сфер. описанной около пирам на высоте y от пл. NLM $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+3} = \sqrt{(x-y)^2+2-x^2}$

$y^2+3 = x^2+y^2-2xy+2-x^2 \Rightarrow 1 = 2xy \Rightarrow y = \frac{1}{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{1}{4x^2}+3} \Rightarrow R_{наим} = \sqrt{3}$

Ответ: $LM = 2\sqrt{3}$

$R_{наим} = \sqrt{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\cancel{\frac{\cos(2\beta)}{\sqrt5}}$

2

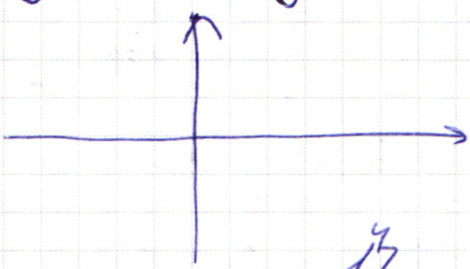
$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x^2 - \cancel{12}\,2\cdot6\cdot x + 36 + 36y^2 - \cancel{36y}\,(6y)\cdot2\cdot3 + 9 = 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \rightarrow$ окр.

$x-12y = \sqrt{2y(x-6)+6-x} \Rightarrow x-12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

1) $\begin{cases} x-6\le0 \\ 2y-1\le0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6\ge0 \\ 2y-1\ge0 \end{cases}$



$x-12y\ge0$

$x\le6$ $x\ge6$

$y\le\frac12$ $x\ge\frac12$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \end{array}$

1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \end{array}$ $\begin{array}{r} 225 \\ +\ 289 \\ \hline 514 \end{array}$

121

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{\cos(2\beta)}{\sqrt5} + \frac{\sin(2\beta)2}{\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\cancel{\sqrt5}\,5}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \end{array}$ 1156

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

1) $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x(10-x) > 0 \Rightarrow$ $x \in 0;10$

$10x + (x^2-10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)} \Rightarrow$ $x^2-10x \neq 1$

$10x - x^2 + \cancel{(x^2-10x)}\,(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

$\underset{>0}{(10x-x^2)}\left(1 + (10x-x^2)^{\log_3 \frac{4}{3}} - (10x-x^2)^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$

$1 + (10x-x^2)^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq (10x-x^2)^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$t + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 3 - \log_3 5} + t^{\log_3 4 - \log_3 5} \geq 1$

$x - 12y \geq 0$

$\exists\ x - 6 = a$

$2y - 1 = b$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$\cancel{x^2 + 144y^2 - 24xy}$

$x^2 + 36y^2 - 36y - 12x = 45$

$(x-6) + 6(1-2y) = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$\times\begin{array}{r}13\\13\end{array}$ 169

$\times 72$ 144

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} + \frac{2\sin(2\beta)}{\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$

$-\cos 2\beta + 2\sin(2\beta) + \sqrt5\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)$

$-\cancel{\frac{\cos 2\beta}{2}}$

$\cancel{-\cos 2\beta + 2\sin(2\beta)} +$

1) $\cancel{\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot}\cos(2\alpha+2\beta))$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha - \cos(4\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos(4\alpha+4\beta) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

$\frac{4}{5}\cos 2\alpha - \frac{3}{5}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\frac{4}{5}\cos 2\alpha + \frac{2}{5}\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$4\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -2$

1 V

$4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 2 = 0$

$6\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg^2\alpha \Rightarrow t \Rightarrow$ 4 норм

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

② $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

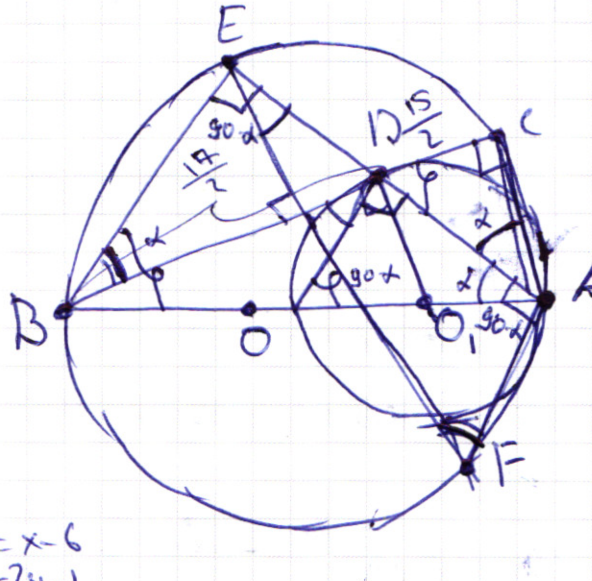
$x-12y>0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 6 \\ 2y\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 6 \\ 2y\le 1 \end{cases} \end{array}\right.$

~~$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y+x+6$~~

$17 \cdot 17 = 289$

④



$\frac{AB}{AC}=\frac{17}{15}$

$AB=\frac{17}{15}AC$

$AC=\frac{15}{17}AB$

4V

$AC^2+AC^2\cdot\frac{17^2}{15^2}=16^2$

$AC^2\left(\frac{225+289}{225}\right)=256$

$AC^2=\frac{256\cdot 225}{514}=\frac{16\cdot 15}{\sqrt{514}}$

$\Downarrow r \Rightarrow R$

$\alpha=45^0$

$AB\Rightarrow \alpha$

$\Downarrow$

S

$289+225=514$

$514=2\cdot 257$

$a=x-6$
$b=2y-1$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $a^2+36b^2-12ab=ab$

$a^2+9b^2=90$

$2a-12b=2\sqrt{ab}$

$a^2-2a+1+9b^2+12b+4=90-2\sqrt{ab}+5$

$(a-1)^2+(3b+2)^2=90+5-2\sqrt{ab}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

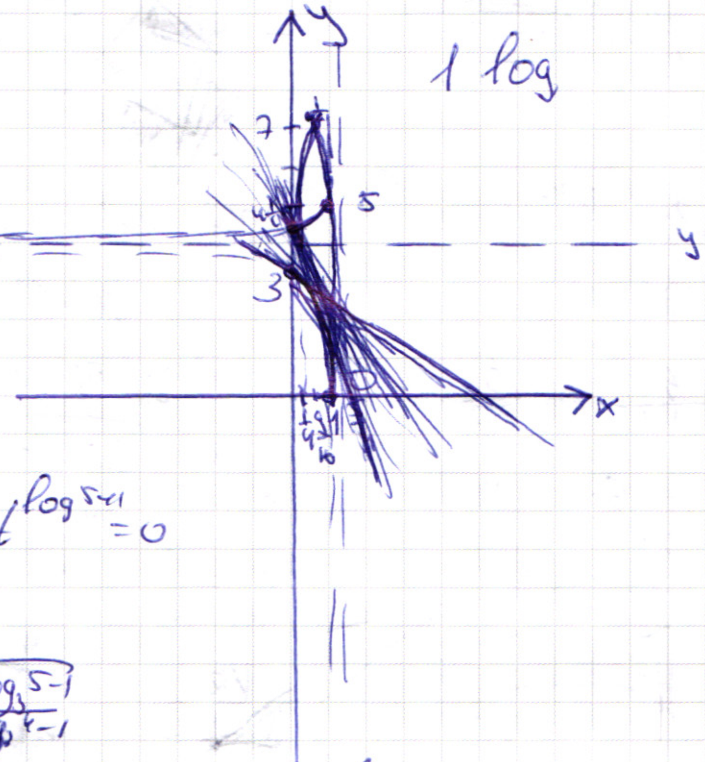
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{-32}{16}+\frac{36}{4}-3$

$-2+9-3=4$

$1 \vee \sqrt[\log_3\frac{4}{5}]{\frac{\log_3 5-1}{\log_3 4-1}}$

$1 \log$



$1+t^{\log_3 4-1} \geq t^{\log_3 5-1}$

$1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1} \geq 0$

$(\log_3 4-1)t^{\log_3 4-2}-(\log_3 5-1)t^{\log 5-1}=0$

$t^{\log_3 4-\log_3 5} = \frac{\log_3 5-1}{\log_3 4-1}$

$t^{\log_3\frac{4}{5}} = \quad t=\sqrt[\log_3\frac{4}{5}]{\frac{\log_3 5-1}{\log_3 4-1}}$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$a^x = a^x \ln a$

$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$1+t^{\log_3 4-1} \geq t^{\log_3 5-1}$

$1+\frac{4}{3}^{\log_3 t} \geq \frac{5}{3}^{\log_3 t}$

$1 \geq \frac{5}{3}^{\log_3 t}-\frac{4}{3}^{\log_3 t}$

$10x-x^2$

$\frac{-6}{2a}=\frac{-10}{-2}=5$

$\frac{5}{3}^{\log_3 t}-\frac{4}{3}^{\log_3 t}=$

$50-25=25$

$= \cancel{\log}\ \frac{5}{3}^{\log_3 t}$

$t_1 > t_1$

$t<1$ - неви

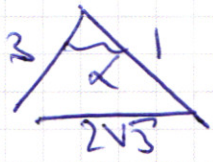
$t^{\log_3 5-1}-t^{\log_3 4-1}>0$

$t_1^{\log_3 5-1} > t^{\log_3 4-1}$

$t>1 \Rightarrow$ верно

$t>1 \Rightarrow \log_3 5-1 > \log_3 4-1$

$1 + t^{\log_3 4-1} > t^{\log_3 5-1}$



$9+1 - 3\cdot1\cdot1$

$3 = 3$

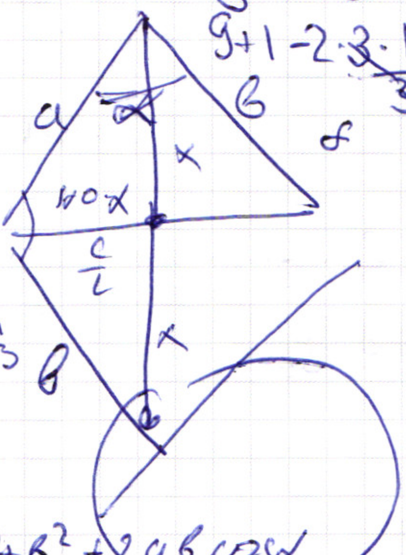
$9+1-2\cdot 3\cdot 1 \cdot \frac{3}{3}$

~~$1+\log_3 4\, t^{\log_3 4-1} = \log_5 5\, t^{\log_5 5-1} = 0$~~

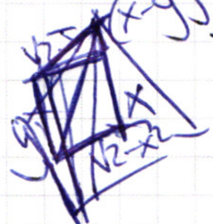
$\cos\alpha = \frac{9+1-12}{2\cdot 3}$

$\cos\alpha = \frac{-1}{3}$

$1 + t^{\log_3 4-1} - t^{\log_3 5-1} \geq 0$



$t = \sqrt[\log_3 \frac{4}{5}]{\frac{\log_3 5-1}{\log_3 4-1}}$



$1 + 25^{\log_3 4-1} = 25^{\log_3 5-1}$

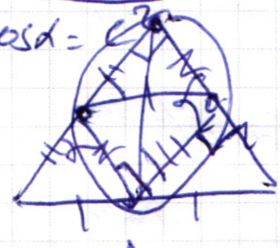
$4x^2 = a^2+b^2+2ab\cos\alpha$

$1 + 27^{\log_3 4-1} \geq 27^{\log_3 5-1}$

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2$

$1 + \frac{4^3}{27} \geq \frac{5^3}{27}$

$4x^2 = 2a^2+2b^2-c^2$



$x = \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

$27 + 64 = 125$

$-x^2+10x-9=0$

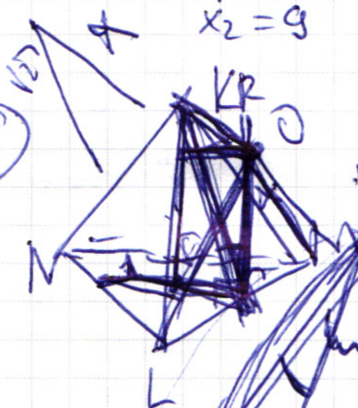
$1 + \frac{(4)^2}{9} \geq \frac{(5^2)}{9}$

$x_1 = 1$

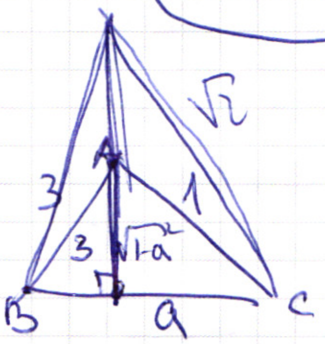
$x_2 = 9$

$x \in (0;1) ; [9;10]$

$9+16=25$

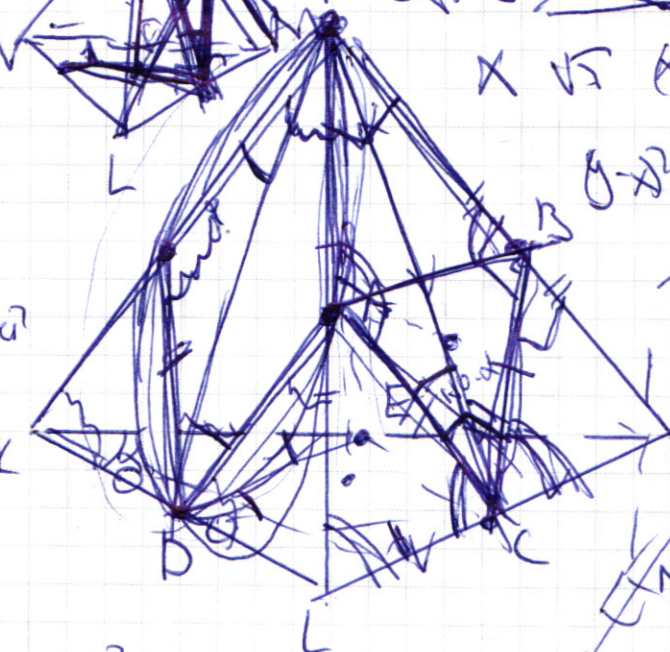


$\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$



X √2 (x-y)²

$(9-x)^2+2-x$



$\sqrt{2-a^2}$ $\sqrt{2-a\ldots+a^2}$

$3-1+a^2 = \sqrt{2+a^2}$

$LM = \sqrt{4-6\cos\alpha} =$

$= \sqrt{2+NL^2}$

$2 = NL^2 + 6\cos\alpha$

$4 - 6\cos\alpha = 2 + NL^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$1+(10x-x^2)^{\log_3 4-1} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5-1}$

$\log_3 5<2$

$\log_3 5-1<1$

$\cancel{f'=(\log_3 4-1)(10x-x^2)^{\log_3 4-2}}$

$\cancel{(10x-x^2)^{\log_3 4-1}=t \quad 10x-x^2=\log}$

$\cancel{1+t\geq}$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $\exists\, 3b=k$

$\begin{cases} a-2k=\sqrt{\frac{ak}{3}} \\ a^2+k^2=90 \end{cases}$

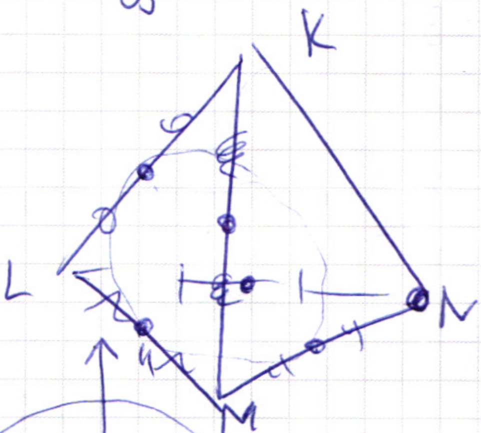
$\cancel{a^2+4k-4ka=\frac{ak}{3}}$

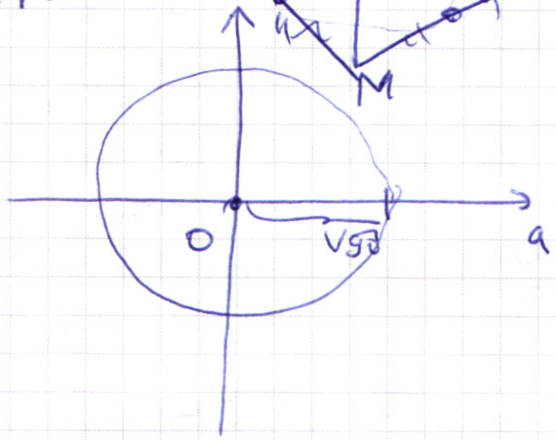
$\cancel{a^2+4k-\frac{13ak}{3}=0}$

$a^2+36b^2-12ab=ab$

$a^2+36b^2-13ab=0$

$D=13^2b^2-4\cdot 36b^2=25b^2 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{13b\pm 5b}{2}=\left[\begin{array}{l} 9b \\ 4b \end{array}\right.$





⑤ $f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $\forall p$ - прост

$2\le x\le 25$
$2\le y\le 25$
$f(x/y)<0$

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{y}\right)\Rightarrow f(1)=0$

$f(3)=0$ $f(2)=0$ $f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$f(5)=1$ $\cancel{f(4)}$

$f(7)=1$ $f(4)=f(8)+f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$

$f(11)=2$ $\Rightarrow f(4)=f(2)+f(2)=0$

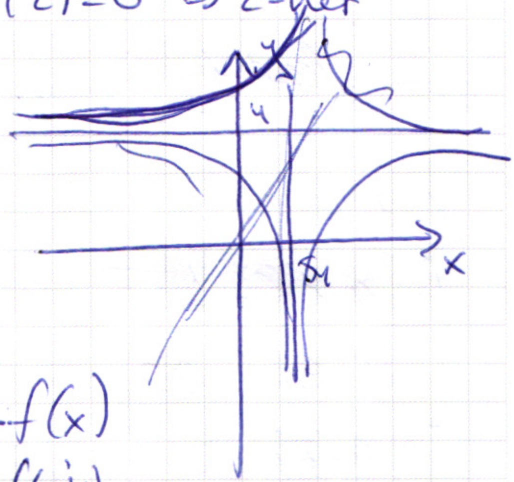
$f(13)=3$ $f(8)=0\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow 2$ - нет

$f(17)=4$

$f(19)=4$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=\underset{\shortparallel}{f(x)}+f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$f(23)=5$

$f(p_1)+\dots+f(p_n)$



$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(xy)-f(x)$

$f(x)=f(xy)+f\left(\frac{1}{y}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(xy)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$36\times 9=324$

⑥ $\frac{16x-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$

$x\in\left[\frac{1}{4};1\right]\Rightarrow 4x-5\in[-4;-1]\Rightarrow -\frac{1}{4x-5}\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

$\left[4\frac{1}{4};5\right]$

$-32x^2+36x-3$ $x_0=\frac{-36}{-64}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$ $36-35=1$

$\frac{-32\cdot 81}{16^2}+\frac{36\cdot 9}{16}-3=$

$\frac{-162}{16}+\frac{36\cdot 9}{16}=\frac{324-162}{16}=\frac{162}{16}-3=\frac{162-48}{16}=\frac{114}{16}=\boxed{\frac{57}{8}}$

$7\frac{1}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)