МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - y = 64 \\ 4x+y = 24 + \sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)}\cdot 2 \end{cases}$

$4x+y = 24 + \sqrt[3]{(-64)\cdot(y+4x)}\cdot 2$

$4x+y = 24 - 4\cdot 2\sqrt[3]{y+4x}$; $\cancel{\text{пусть } \sqrt[3]{y+4x} = t}$

$\cancel{t^3 = 24 - 16t}$

$\cancel{t^3 + 16t - 24 = 0;}$ $\cancel{t = 2 \text{ — корень этого уравнения}}$

$\cancel{8+}$

$y = 4x - 64$:

$4x + (4x-64) = 24 - 8\sqrt[3]{4x-64+4x}$

$8x - 64 = 24 - 8\sqrt[3]{8x-64}$

$8\cdot(x-8) = 8\cdot 3 - 8\cdot\sqrt[3]{8x-64}$

$x - 8 = 3 - 2\sqrt[3]{x-8}$

$x - 8 = 3 - 2\sqrt[3]{x-8}$

$\cancel{2\sqrt[3]{x-8} = 11 - x}$

$x - 8 + 2\sqrt[3]{x-8} - 3 = 0$, пусть $t = \sqrt[3]{x-8}$

$t^3 + 2t - 3 = 0$; $t = 1$ — корень этого ур-я: $1^3 + 2\cdot 1 - 3 = 0$

$$\begin{array}{r|l} t^3+2t-3 & t-1 \\ \underline{t^3 - t^2} & t^2+t+3 \\ t^2+2t & \\ \underline{t^2 - t} & \\ 3t-3 & \\ \underline{3t-3} & \\ 0 & \end{array}$$

$t^3+2t-3 = (t-1)(t^2+t+3) = 0$

$t = 1$ или $t^2+t+3 = 0$

$D = 1 - 4\cdot 3 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корней нет

Значит $\sqrt[3]{x-8} = 1 \Rightarrow x - 8 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9$

$y = 4x - 64 = 4\cdot 9 - 64 = -28$

Ответ: $(9; -28)$

2. $\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

условие: $\begin{cases} 3x>0 \\ 3x \ne 1 \\ 9x>0 \\ 9x\ne 1 \\ x^4>0 \\ \frac{1}{x^2}>0 \\ \log_{3x}(x^4) \geq 0 \\ \log_{9x}\left(\frac{1}{x^2}\right)\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne \frac{1}{3} \\ x \ne \frac{1}{9} \\ \frac{\log_3 x^4}{\log_3 3x} \geq 0 \\ \frac{\log_3 \frac{1}{x^2}}{\log_3 9x} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne \frac{1}{3} \\ x\ne\frac{1}{9} \\ \frac{4\log_3 x}{1+\log_3 x} \geq 0 \quad (1) \\ \frac{-2\log_3 x}{2+\log_3 x}\geq 0 \quad (2) \end{cases}$

$\log_3 x = t$:

(1): $\frac{4t}{1+t} \geq 0$

(2): $\frac{-2t}{2+t} \geq 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t\geq 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t>-2 \\ t\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>-2 \\ t<-1 \end{cases} \\ t=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x>-2 \\ \log_3 x<-1 \end{cases} \\ \log_3 x = 0 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>\frac{1}{9} \\ x<\frac{1}{3} \end{cases} \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)\cup\{1\}$ (*) – условие

учитывая (*): $\log_{3x} x^4 \le \log^2_{9x}\frac{1}{x^2}$

$$\frac{\log_3 x^4}{\log_3 3x} \le \left(\frac{\log_3\frac{1}{x^2}}{\log_3 9x}\right)^2$$

$$\frac{4\log_3 x}{1+\log_3 x} \le \left(\frac{-2\log_3 x}{2+\log_3 x}\right)^2; \quad \log_3 x = t$$

$$\frac{4t}{1+t} \le \frac{4t^2}{(2+t)^2} \Rightarrow \frac{4t^2(t+1)-4t(2+t)^2}{(t+1)(t+2)^2} \geq 0$$

$$\frac{4t^3+4t^2-16t-4t\cdot 4t-4t^3}{(t+1)(t+2)^2}\geq 0$$

$$\frac{4t^2-16t^2-16t}{(t+1)(t+2)^2}\geq 0$$

$$\frac{-12t^2-16t}{(t+1)(t+2)^2}\geq 0$$

$$\frac{t(-12t-16)}{(t+1)(t+2)^2}\geq 0$$

$t\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{4}{3}\right]\cup(-1;0]$

$\left[\begin{array}{l} \log_3 x<-2 \\ \begin{cases}\log_3 x>-2 \\ \log_3 x \le -\frac{4}{3}\end{cases} \\ \begin{cases}\log_3 x>-1 \\ \log_3 x\le 0\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{9} \\ \begin{cases} x>\frac{1}{9} \\ x\le \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\end{cases} \\ \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x\le 1\end{cases}\end{array}\right.$

(*):

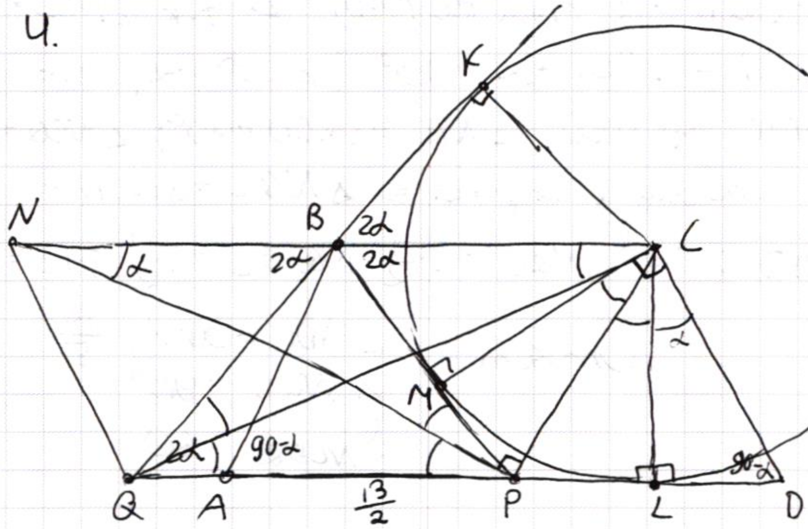
Решение:

Ответ: $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right]\cup\{1\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$
$AP = \frac{13}{2}$
$NC = 13$

1) В $\triangle NPC$, т.к. $\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$ и $NC = 13$, то $NP = 12$ а $PC = 5$

2) Пусть $\angle PNC = \alpha$, тогда $tg\alpha = \frac{5}{12}$.

3) При $BC \parallel AD$ $\angle NPA = \angle PNC = \alpha \Rightarrow \angle CPL = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow$ в $\triangle PLC$: $\angle PCL = \alpha$ (ведь $CL \perp PD$ по свойству кас-ной).

4) $\angle MCP = \angle LCP = \alpha$, т.к. центр вписанной окр-ти лежит на биссектрисе, тогда $\angle BCM = 90 - 2\alpha \Rightarrow \angle CBM = 2\alpha$ (ведь $CM \perp BP$).

5) BC – биссектриса $\angle KBM \Rightarrow \angle KBC = \angle MBC = 2\alpha$, а $\angle NBQ = \angle KBC = 2\alpha$ как вертикальные. Тогда $\angle BQP = \angle NBQ = 2\alpha$ (при $BC \parallel AD$).

6) В $\triangle QBP$: $\angle QBP = 180^\circ - 2\alpha - 2\alpha = 180^\circ - 4\alpha$ (ведь $\angle NBQ + \angle QBP + \angle PBC = 180^\circ$); $\angle BQP = 2\alpha \Rightarrow \angle BPQ = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - 2\alpha = 2\alpha$, значит $\angle BPN = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Получается, $\triangle QBP$ и $\triangle NBP$ – равнобедренные $\Rightarrow$ $NB = BP = BQ$. Пусть $NB = BP = BQ = x$, тогда в $\triangle NBP$: $NP^2 = 2x^2(1 - \cos(180^\circ - 2\alpha)) = 2x^2 \cdot (1 + \cos 2\alpha) = 144$; $tg\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{144 - 25}{169} = \frac{119}{169} \Rightarrow 2x^2 \cdot \left(1 + \frac{119}{169}\right) = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{72 \cdot 169}{288} = \frac{169}{4} \Rightarrow x = \frac{13}{2} = AP$, а значит $\triangle APB$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle BAP = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha = \angle CDA$ (т.к. трапеция равнобокая) $\Rightarrow \angle BAP = \operatorname{arcctg}\frac{5}{12} =$ ~~arcctg~~ $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

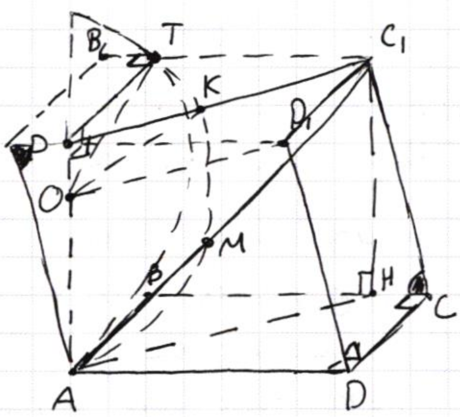
4. (продолжение)

7) т. C лежит на биссектрисе $\angle BQA \Rightarrow \angle BQC = \angle AQC =$ $= \frac{2\alpha}{2} = \alpha$. А в $\triangle NBQ$ $(NB = BQ)$: $\angle NQB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle NQC = \angle NQB + \angle BQC = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$

8) ~~$\triangle NQC \sim$~~ $\angle NCQ = \angle CQD = \alpha$ (при $BC \parallel AD$) $\Rightarrow$ т.к. $\angle NCL =$ $= 90^\circ = \angle\alpha + \angle QCL$, то $\angle QCD = \angle QCL + \angle\alpha = 90^\circ$ ($\angle LCD = \alpha$, т.к. $\angle LDC = 90^\circ - \alpha$) $\Rightarrow \triangle NQC \sim \triangle QCD$ ($\angle NQC = \angle QCD = 90^\circ$; $\angle NCQ =$ $= \angle CQD = \alpha$) но QC — их общая сторона $\Rightarrow \triangle NQC = \triangle QCD \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{NCDQ} = S_{\triangle NQC} + S_{\triangle QCD} = 2S_{\triangle NQC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot NQ \cdot QC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 =$
$= 60$

Ответ: $\angle ADC = \mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}$
$\angle NQC = 90^\circ$
$S_{NCDQ} = 60$

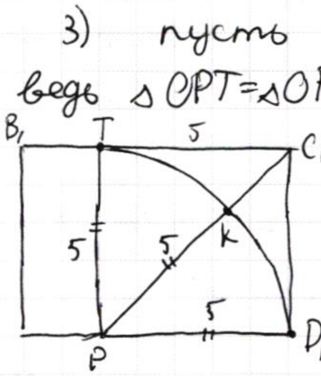
7.



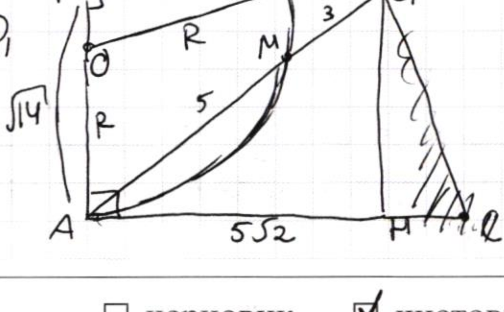
1) Т.к. $ABCD$ и DCC_1D_1 — прямоугольники, то грани AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, значит если O — центр сферы, то $OA \in (AA_1D_1D)$, т.к. $OA \perp (ABCD)$.

2) Пусть $AO \cap A_1D_1 = P$; ~~$PT \perp A_1$~~ тогда если сфера касается B_1C_1 в точке T, то т.к. $OT \perp B_1C_1$ и $AO \perp (A_1B_1C_1D_1)$, (ведь $(A_1B_1C_1D_1) \parallel (ABCD)$) то $B_1C_1 \perp (OPT) \Rightarrow B_1C_1 \perp PT$;

3) пусть сфера пересекает PC_1 в т. K, тогда $PT = PD_1 = PK$ ведь $\triangle OPT = \triangle OPK$ по катету и гипотенузе (в сфера касается прямой D_1C_1 в т. D_1, т.к. т. $O \in (ADD_1)$ и $C_1D_1 \perp (ADD_1)$.)

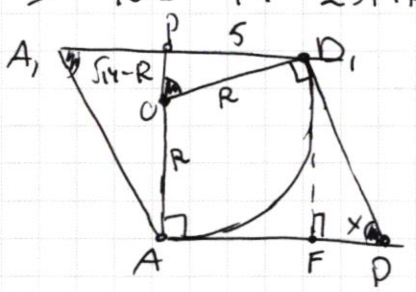


4) $AB = PT = PD_1 = 5 = PK$, $PC_1 = 5\sqrt{2} = AH \Rightarrow$
$\Rightarrow AP = \sqrt{(5+3)^2 - (5\sqrt{2})^2} =$
$= \sqrt{64 - 50} = \sqrt{14}$



5) $B_{\Delta} OPK$: $PO = \sqrt{14} - R$; $OK = R$; $PK = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 14 - 2\sqrt{14}R + R^2 + 25 \Rightarrow R = \frac{39}{2\sqrt{14}}$



$\angle x = 180^\circ - \angle AOD_1$; $\angle AOD_1 = 180^\circ - \angle POD_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle x = POD_1$

$\sin \angle x = \frac{5}{R} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{14}}{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \arcsin \frac{10\sqrt{14}}{39} = \angle BB_1C_1.$

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot h$; $h = \sqrt{14}$;

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 5 \cdot (5 + FD)$ $FD = \frac{FD_1}{tg x} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 5 \cdot (5 + \sqrt{14}$

~~tgx =~~ $tg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{39^2}{100 \cdot 14} - 1 = \frac{39^2 - 1400}{1400}$ tr

$V = \sqrt{14} \cdot 5 \cdot \left(5 + \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{1400}}{\sqrt{39^2 - 1400}}\right)$

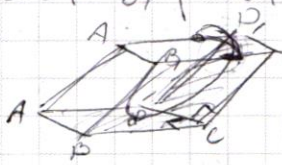
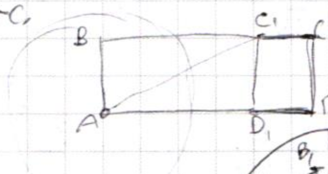
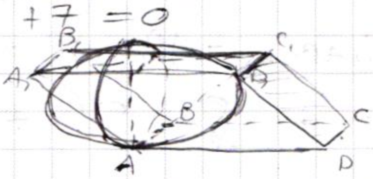
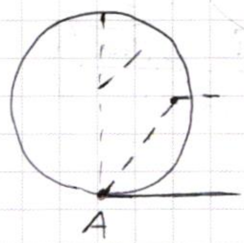
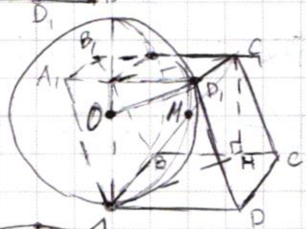
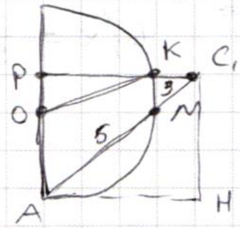
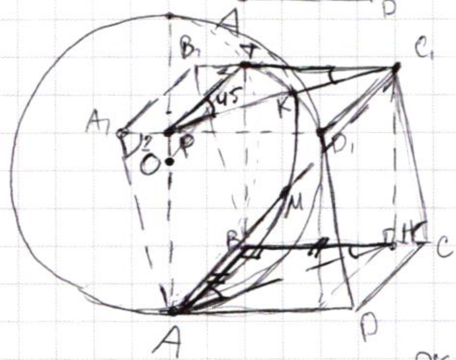
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2(x+y) - \frac{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}{\cos(\frac{\pi}{6}+x)}\, 18\cos(x+y) + 8 = 0$$

$$2\cos^2(x+y) - 1 + 8 - \sin(\tfrac{\pi}{3}-x)\, 18\cos(x+y) = 0$$

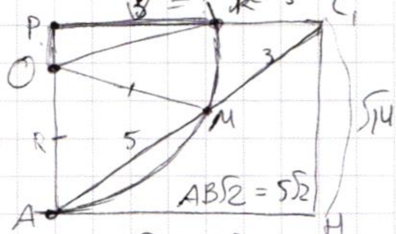
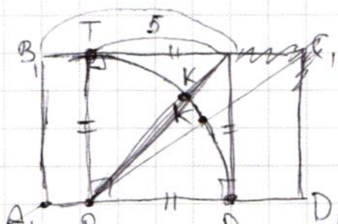
$$2\cos(x+y)\left(\cos(x+y) - 9\sin(\tfrac{\pi}{3}-x)\right) + 7 = 0$$

7.

$\angle BB_1C_1 = ?$

$5 = ?\ 5\sqrt{2} - 5$

$PK = PT = AB = PD_1 = BH$

$\frac{C_1H}{CC_1} = \sin x$

$C_1H = \sqrt{64 - 25\cdot 2} = \sqrt{14}$

$V = \sqrt{14}\cdot 5\cdot(5+HC)$

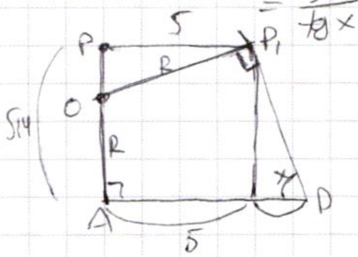
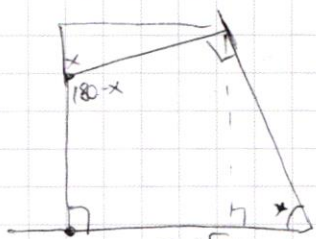
$\frac{HC_1}{HC} = tg\, x \Rightarrow HC = \frac{HC_1}{tg\, x} = \frac{\sqrt{14}}{tg\, x}$

$(\sqrt{14}-R)^2 + 25 = R^2$

$14 - 2\sqrt{14}R + 25 = 0$

$2\sqrt{14}R = 11$

$R = \frac{11}{2\sqrt{14}}$

$\sin x = \frac{5}{R} = \frac{5\cdot 2\sqrt{14}}{11} = \frac{10\sqrt{14}}{11}$

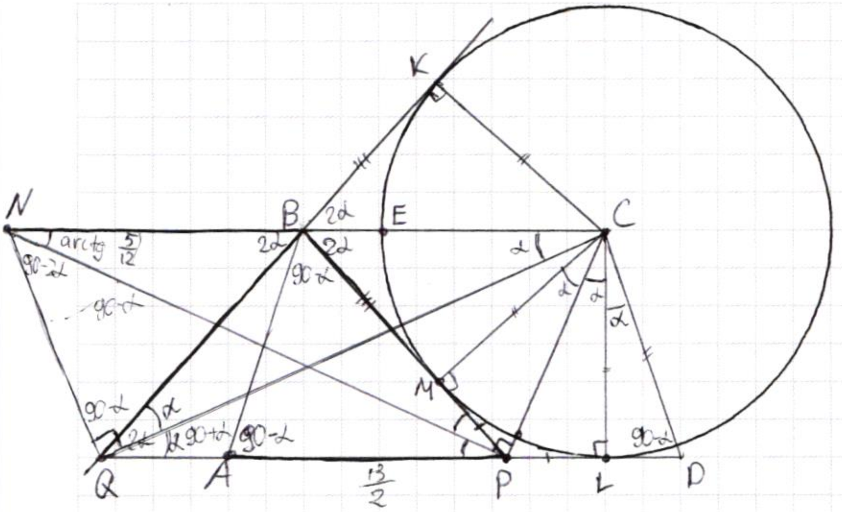
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$NP=12$, $PC=5$, $NC=13$

$AP=\frac{13}{2}$

$AP=BC-PL+DL$ $\quad tg\alpha=\frac{5}{12}$

$\angle CPL=90-\alpha \Rightarrow tg\angle(CPL)=tg(90-\alpha)=$

$=ctg\alpha=\frac{12}{5}$;

$\frac{CL}{PL}=\frac{12}{5}\Rightarrow\frac{R}{PL}=\frac{12}{5}\Rightarrow$

$\Rightarrow PL=\frac{5}{12}R$

$BN=BP=BQ$

BE $\quad ||| = x,\ | = y$ $\quad$ пусть $x+y=t$

$x^2=BE\cdot(BE+2\cdot(13-(x+y)^2-BE)$

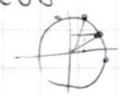
$NP^2=12^2=144=2t^2(1-\cos(180-2\alpha))=2t^2(1+\cos 2\alpha)$

$tg\alpha=\frac{5}{12}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{5}{13};\ \cos\alpha=\frac{12}{13}\Rightarrow\cos2\alpha=$

$=\frac{144}{169}-\frac{25}{169}=\frac{119}{169}$ $\quad$ ~~$2\cos^2\alpha-1=\frac{288}{169}-\frac{169}{169}$~~ $=\frac{119}{169}$

$120+168$

288



$144=2t^2\left(1+\frac{119}{169}\right)$ $\quad 72=t^2\cdot\left(\frac{288}{169}\right)$

$t^2=\frac{169\cdot72}{288}=\frac{13^2\cdot72}{72\cdot4}=\left(\frac{13}{2}\right)^2\Rightarrow t=\frac{13}{2}$

Значит $AP=BP\Rightarrow\angle ?=\frac{180-2\alpha}{2}=90-\alpha\Rightarrow$ $\quad x+y=\frac{13}{2}$

$\Rightarrow\angle ?=\cancel{arctg}(90-\alpha)=\cancel{arcctg\alpha}=\frac{12}{5}=$

$=arctg\frac{12}{5}$

~~$\angle QBA=180-2\alpha-90$~~ $\quad \angle ?_1=arctg\frac{12}{5}$ ✓ $=\angle ADC$

$\angle NQC=90°$ ✓ $\quad \sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)=$

$S_{NCDQ}=S_{пар.ма}=NC\cdot h=13h$ $\quad =\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)$

либо: $S=2S_{\triangle}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot NQ\cdot QC=12\cdot5=60$ ✓

6. $\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}\le ax+b\le-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$

5. $\begin{cases}\sin(x+y)=9\cos(\frac{\pi}{3}-x)\\ \cos(x+2y)=\frac{\sqrt3}{2}\sin(x+2y)=-\frac{16\sin(x+\frac{\pi}{6})}{2}\end{cases}$ $\quad tgx-tgy$

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos(x+2y)-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin(x+2y)=-8\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-(x+2y)\right)=-8\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(x+2y)-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin(x+2y)=\cos(\frac{\pi}{3}+x+2y)=-8\sin(x+\frac{\pi}{6})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44$

$y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20$

$4x - y = 64$

$y^2-16x^2 = (y-4x)(y+4x) = -64(y+4x)$

$4x - \sqrt[3]{-64(y+4x)} = 44$

$y - \sqrt[3]{-64(y+4x)} = -20$

$4x + 4\sqrt{y+4x} = 44$

$y + 4\sqrt{y+4x} = -20$

$t^3+16t-24=0$

$2: \ 8+32-24$

$-8-32$

$f'(t) = 3t^2+16;\ f'(t)=0$ при $t = \pm$ >0

$4\sqrt{y+4x} = 44-4x$

$\sqrt{y+4x} = 11-x$

$t^3+8t^2-8t^2$

t^3

$11-x \geqslant 0$

$y+4x = 121-22x+x^2$ $\frac{3}{2}$

$y+4x+8\sqrt{y+4x} = 24$

$\sqrt{y+4x} = t$

$t^2+8t-24=0$

$D = 64+96 = 160 = (4\sqrt{10})^2$

$t = \frac{-8\pm 4\sqrt{10}}{2}$

$t = -4\pm 2\sqrt{10}$

$\sqrt{y+4x} = -4-2\sqrt{10} \rightarrow \otimes$

или

$\sqrt{y+4x} = -4+2\sqrt{10}$

$y+4x = 4\cdot 10 - 2\cdot 4\cdot 2\sqrt{10}+16$

$y+4x = 56-16\sqrt{10}$

$4x-y = 64$

$8x = 120-16\sqrt{10}$

$x = 15-2\sqrt{10}$

$y = 4x-64 = 60-8\sqrt{10}-64 =$

$= -8\sqrt{10}-4 =$

$= -4(2\sqrt{10}+1)$

$x = 15-2\sqrt{10};\quad y = -4(1+2\sqrt{10})$

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x}\frac{1}{x^2}$

$\frac{27}{8}+\frac{48}{2}-24$

$\cancel{\log_{3x} x^4}$

$2\sqrt{\log_{3x} x} \leq \frac{\ln\frac{1}{x^2}}{\cancel{\log_{3x}}\ln 9x}$

$\log_{3x} x^4 \leq \log^2_{9x}\frac{1}{x^2}$

$\log_{3x} x^4 \geqslant 0 \rightarrow \frac{\lg x^4}{\lg 3x} \geqslant 0$

$\log_{9x}\frac{1}{x^2} \geqslant 0$

$\frac{\lg\frac{1}{x^2}}{\lg 9x} \geqslant 0$

$\frac{4\lg x}{\lg 3+\lg x} \geqslant 0$

$\log_{3x} x^4 \geqslant 0 \quad \frac{\log_3 x^4}{\log_3 3x} \geqslant 0$

$\frac{4\log_3 x}{1+\log_3 x} \geqslant 0$ $+ \ \ - \ \ +$; -1, 0; $\log_3 x$

$\left[\begin{array}{l}\log_3 x < -1 = \log_3\frac{1}{3}\\ \log_3 x \geqslant 0 = \log_3 1\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}x<\frac{1}{3}\\ x>1\end{array}\right. \rightarrow x\in(0;\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$

$\log_{9x}\frac{1}{x^2} \geqslant 0$

$\left\{\begin{array}{l}\log_9 x > -1\\ \log_9 x \leq 0\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}x>\frac{1}{9}\\ x\leq 1\end{array} \rightarrow x\in(\frac{1}{9};1]$

$\frac{\log_9\frac{1}{x^2}}{\log_9 9x} \geqslant 0 \quad \frac{2\log_9(\frac{1}{x})}{1+\log_9 x} \geqslant 0$ $= x^{-1}$ $\quad \frac{-2\log_9 x}{1+\log_9 x} \geqslant 0$

$- \ \ + \ \ -$; -1, 0; $\log_9 x$

0, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1

$x\in(\frac{1}{9};\frac{1}{3})$!

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{3}{2}: \quad \frac{27}{8} + \frac{48}{2} - 24 \Rightarrow 0$

$324 \cdot 2 = 648$

$\sqrt{2}: \quad 2\sqrt{2} = 24 - 16\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 24 = 18\sqrt{2} - 24 \to 576$

$t^3 + 4t^2 - 4t^2 - 18t + 32t - 24$

$t^3 + 2t^2 - 2t^2 - 4t + 2t - 24$

$x - 8 = t$

$t^3 + 4t - 3 = 0$

$1: \quad 5 - 3$

$-1: \quad -5 - 3$

$\sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 4x - 44$

$\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} = 4(x-11)$

$-8\sqrt[3]{y+4x} = 4(x-11)$

$2 \cdot \sqrt[3]{y+4x} = 11 - x$

$y = 4x - 64$

$\times \begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ 1331 \end{array}$

$64(x-8) =$

$= 1331 - 3 \cdot 121 \cdot x + 3 \cdot 11 \cdot x^2 - x^3$

$64x - 512 = 1331 - 363x + 33x^2 - x^3$

$x^3 - 33x^2 + 363x + 64x - 512 - 1331 = 0$

$x^3 - 33x^2 + 425x - 1843 = 0$

$4x + y = a$

$4x - y = b$

$b = 64$

$a = 24 + \sqrt[3]{(-b) \cdot a}$

$a = 24 - 8\sqrt[3]{a}$

$a + 8\sqrt[3]{a} - 24 = 0$

$(\sqrt[3]{a})^3 - a^2 \cdots + 8\sqrt[3]{a} - 2 \ldots = 0$

$(2\sqrt{2})^2$

$(2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$

$t^3 + 4t - 3 = 0$

$t^3 + \cancel{2t \ldots}^2$

$t > 0$

$1: \quad$ мн.

$\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{8}$

$\underbrace{(4x-y)(4x+y)}^{a} = 64 \cdot (24 + \sqrt[3]{a \cdot 2})$

$a = 64 \cdot 24 + 128\sqrt[3]{a}$

$t^3 - 128t - 64 \cdot 24 = 0$

$64: \quad 64^3 - 2 \cdot 64 \cdot 64 - 64 \cdot 24 = 0$

$\sqrt[3]{x-8} = t$

$2t^3 + t - 3 = 0$

$4x = 44 + \sqrt[3]{}$

$y = -20 + \sqrt[3]{}$

~~$4xy =$~~

$4x + y = 24 + 2\sqrt{-8}$

$1:$

$36 - 64$

$4 \cdot 9 - 4 \cdot 16 = 4 \cdot -\cancel{17}$

$\cancel{2}8$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{3x} x^4 \le \log^2_{9x} \frac{1}{x^2}$

$\frac{\log_3 x^4}{\log_3 3x} \le \left(\frac{\log_3 \frac{1}{x^2}}{\log_3 9x}\right)^2$

$\frac{4\log_3 x}{1+\log_3 x} \le \left(\frac{-2\log_3 x}{2+\log_3 x}\right)^2$; $\log_3 x = t$

$\frac{4t}{1+t} \le \left(\frac{-2t}{2+t}\right)^2 \rightarrow (t^2+4t+4)4t$

$\frac{4t}{1+t} \le \frac{4t^2}{(t+2)^2}$

$\frac{4t^2(t+1) - (t+2)^2 \cdot 4t}{(t+1)(t+2)^2} \geq 0$

$\frac{\cancel{4t^3} + 4t^2 - \cancel{4t^3} - 16t^2 - 16t}{(t+1)(t+2)^2} \geq 0$

$-2 \quad -\frac{4}{3} \quad -1 \quad 0 \quad t$

$\frac{-12t^2 - 16t}{(t+1)(t+2)^2} \geq 0$

$\frac{3t^2+4t}{(t+1)(t+2)^2} \le 0$ $\quad t \in (-\infty; -2) \cup$ $\cup \left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup$ $\cup (-1; 0]$

$\frac{t(3t+4)}{(t+1)(t+2)^2} \le 0$

$0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad x$

Ответ: $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right)$

$\log_3 x < -2 \Rightarrow x < \frac{1}{9}$

$\begin{cases} \log_3 x > -2 \\ \log_3 x \le -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x > \frac{1}{9} \\ x < 3^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} = \end{matrix}$

$= \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$

$\log_3 x > -1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

$\log_3 x \le 0 \Rightarrow x \le 1$

3. $A = \overline{abcdefg}$ $\quad r_1 + r_2 + r_3 = 12345$

на 10^0: ост. равен 0

на 10^{20} – не рассматриваем

на 10^1: от 0 до 9

на 10^2: от 0 до 99

на 10^3: от 0 до 999

пусть рассматриваются $\underset{1}{10^{x-1}}, \underset{2}{10^{x}}, \underset{3}{10^{x+1}} \Rightarrow r_1 \in [0; \underbrace{9...9}_{x-1 \text{ цифр}}]$

$r_2 \in [0; \underbrace{9...9}_{x \text{ цифр}}]$

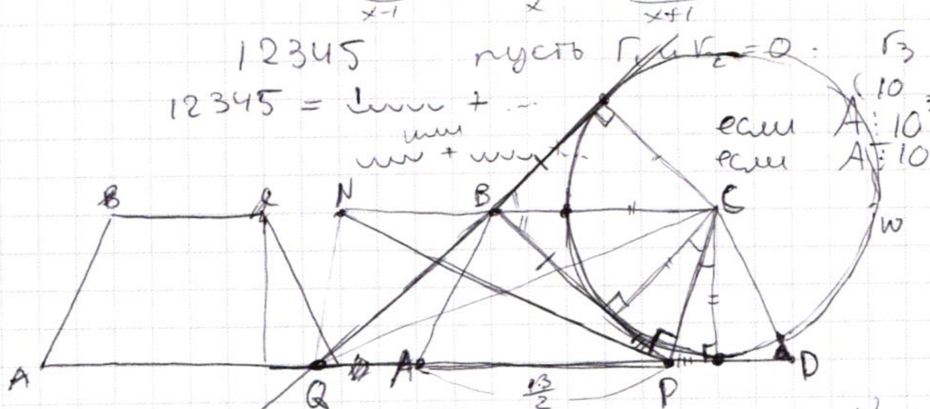
$r_1 + r_2 + r_3 = \underbrace{9...9}_{x-1} + \underbrace{9...9}_{x} + \underbrace{9...9}_{x+1}$

12345 $\quad$ пусть $r_1 и r_2 = 0$: $\quad r_3 = 12345 \Rightarrow A =$

$12345 = \text{~~~~} + \text{~~}$

если $A : 10^3 \Rightarrow$ ×

если $A \vdots 10^3$, $A : 10^2 \Rightarrow S_r =$ ост. при : на 10^3



$\angle ADC = ?$ $\quad tg\angle NCP = \frac{12}{5}$

$\angle NBC = ?$ $\quad AP = \frac{13}{2}$

$S_{NCPQ} = ?$ $\quad NC = 13$

$NP = 12$

$tg\angle NCP = \frac{NP}{PC} = \frac{12}{5}$; $NC = 13$ $= 169 = PC^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 PC^2$

$NP = \frac{12}{5} PC$ $\quad 169 = PC^2 \cdot \frac{144+25}{25} \Rightarrow 1 = PC^2 \cdot \frac{1}{25} \Rightarrow PC = 5$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin(x+y)=9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\end{cases} \quad / \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}+x+2y\right)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$64+81=145$

$81-64=17$

$$(\quad / \quad)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(x+y)=9\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right)}{\sin(x+y)}=-\frac{8}{9}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right)=-\frac{8}{9}\sin(x+y)$$

или

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x+2y\right)=-\frac{8}{9}\sin(x+y)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\cos(x+2y)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin(x+2y)=-\frac{8}{9}\sin(x+y)$$

$$\sin(x+y)=9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=9\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x+2y\right)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-8\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2(x+y)\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos(2x+2y)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin(2x+2y)=-8\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\left(\cos2(x+y)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin2(x+y)\right)}^{+8}=0$$

~~либо $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$, либо $\cos2(x+y)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin2(x+y)=8$~~

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\left(\cos2(x+y)+8\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin2(x+y)=0$$

[$\quad x+2y=x+y+y$ или $2(x+y)-x$ $\quad 2\sin(x+y)\cdot\cos(x+y)$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2(x+y)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos2(x+y)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin2(x+y)=$$
$$=-8\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\overset{?}{=}-\frac{8}{9}\sin(x+y)$$

~~$\sin^2(x+y)=$~~

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\left(1-2\cdot81\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot2\cdot9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos(x+y)=$$
$$=-8\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{8}{9}\sin(x+y)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\left(1-2\cdot81\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot2\cdot9\cdot\cos(x+y)+8\right)=0$$

0 или $\left(1-162\cdot\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot18\cdot\cos(x+y)+8\right)=0$

$$9-162+162\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-18\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos(x+y)=0$$

$$\sqrt{1-\sin^2(x+y)} \qquad -\sqrt{1-\sin^2(x+y)}$$

$$\sqrt{1-81\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} \qquad -\sqrt{1-81\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)