МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Т.к $f(ab)=f(a)+f(b)$, то $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$.

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right)}$ Также $f(y)=f(y^2)+f\left(\frac{1}{y}\right)$, а $f(y^2)=f(y)+f(y)$, то есть $f(y)=f(y)+f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$, а тогда

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$, т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, то $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(y)>f(x)$ – нужно найти кол-во ~~таких пар, при к-х $f(x)+f(y)<0$~~

Т.к. $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, то $f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ ~~тогда~~

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$, тогда найдём все $f(x)$, где $x\in[3;27]$.

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$.

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$.

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$.

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(12)=f(4)+f(3)=0$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(24)=f(2)+f(12)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

и т.д.

Нам необх. все $f(x)\neq 0$, такие пары, что $f(y)>f(x)$. $f(x)$ может принимать значения $\{0;1;2;3;4;5\}$, при $3\le x\le 27$, тогда необх пары $(x;y)$, такие:

$\begin{cases} f(y)=\{1;2;3;4;5\} \\ f(x)=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(y)=\{2;3;4;5\} \\ f(x)=1 \end{cases}$

Кол-во чисел, таких, что $f(x)=0$ — 10 чисел

$f(x)=1$ — 7 ~~чис~~

$f(x)=2$ — 3

$f(x)=3$ — 2

$f(x)=4$ — 2

$f(x)=5$ — 1

Тогда, кол-во пар, где $\begin{cases} f(x)=0 \\ f(y)=\{1;2;3;4;5\} \end{cases}$: $\underbrace{10}_{f(x)=0}\cdot\underbrace{(7+3+2+2+1)}_{f(y)=\{1;2;3;4;5\}}=10\cdot 15=150$

$\begin{cases} f(x)=1 \\ f(y)=\{2;3;4;5\} \end{cases}$: $7\cdot(\cancel{2+2+3}\,3+2+2+1)=7\cdot 8=56$

$\begin{cases} f(x)=2 \\ f(y)=\{3;4;5\} \end{cases}$: $3(2+2+1)=3\cdot 5=15$

$\begin{cases} f(x)=3 \\ f(y)=\{4;5\} \end{cases}$: $2(2+1)=6$

$\begin{cases} f(x)=4 \\ f(y)=5 \end{cases}$: $2\cdot 1=2$. Тогда общ. кол-во пар:

$150+\overset{206}{56}+\overset{221}{15}+6+2=229$

Ответ: 229.

№6 $\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$. Изобр. графики данных

ф-й: $f(x)\ \frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$; $g(x)\ 8x^2-34x+30=0$

$\frac{D}{4}=17^2-8\cdot 30=49=7^2$

$x=1$ — асимпт.

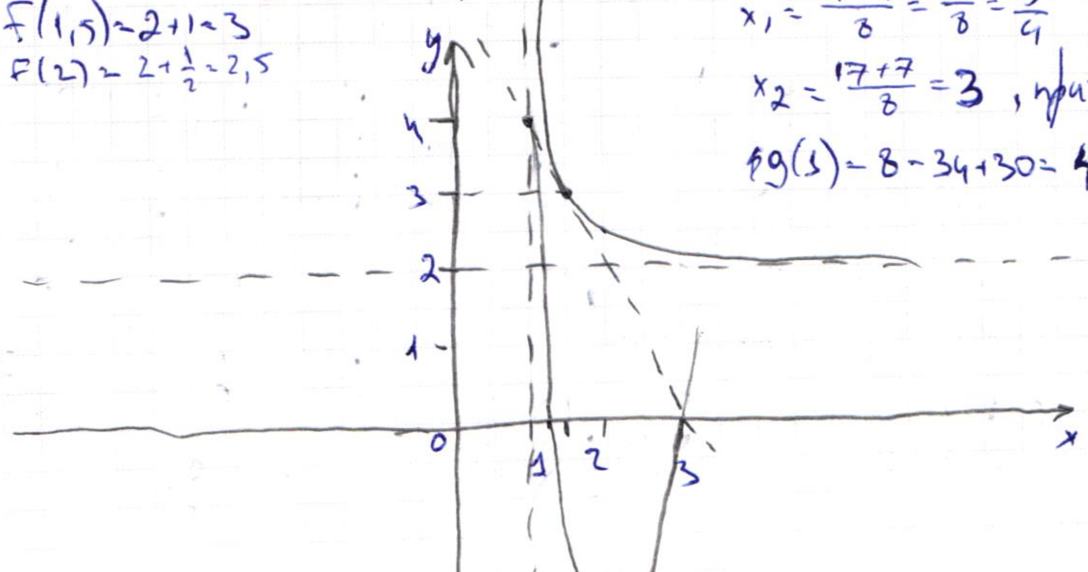
$x_1=\frac{17-7}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

$f(1,5)=2+1=3$

$f(2)=2+\frac{1}{2}=2,5$

$x_2=\frac{17+7}{8}=3$, причём

$g(1)=8-34+30=4$



☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

У данных ф-й есть ключевые точки

$f(1,5)=3$

$g(1)=4$

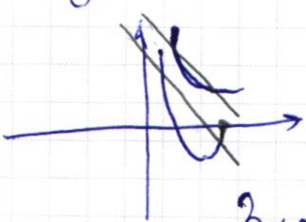
$g(3)=0$ $ax+b$ - прямая.

Заметим, что точки $(1;4)$; $(1,5;3)$; $(3;0)$ лежат на одной прямой $y=-2x+6$. То есть при $a=-2$ и $b=6$ нер-во выполняется

Причём, т.к. $f'=\left(2+\frac{1}{2x-2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{2(x-1)^2}$, в т. 1,5

$f'(1,5)=-\frac{1}{2(0,5)^2}=-\frac{1}{0,5}=-2$, то есть график $y=-2x+6$ касается этой гиперболы

При смещении прямой $-2x+6$ вверх или вниз (уменьш и увел b), очевидно, что нерав-во перестанет быть верным:

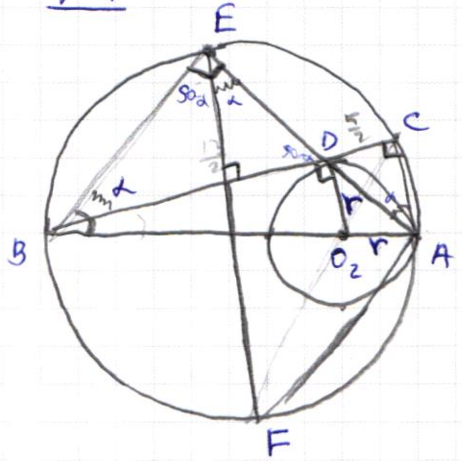


При изменении угла наклона произойдет такая же ситуация

Значит такое нер-во выполняется, только если $a=-2$ и $b=6$

Ответ: $a=-2$
$b=6$.

№4



Дано: Ω и ω кас. в т. A.
AB – диам. Ω
BC – хорда Ω
BC – кас. ω в т. D.
$AD \cap \Omega = E$
$EF \perp BC$; $F \in \Omega$
Найти: R – ?
r – ?
если $CD = \frac{5}{2}$
$BD = \frac{13}{2}$.

Решение:

Проведём O_2D – радиус ω, тогда т.к. BC – касат., то $O_2D \perp BC$

Т.к. AB – диам, то $\triangle ABC$ – прямоуг.; $\angle ACB = 90^\circ$.

Тогда рассм. $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$.

1) $\angle B$ – общ
2) $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$.

Тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$; $BC = BD + DC = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$.

Причём $BA = 2R$ – R – радиус Ω
$BO_2 = AB - r = 2R - r$ – радиус ω.

Тогда $\frac{\frac{13}{2}}{9} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow \frac{13}{18} = 1 - \frac{r}{2R}$

$\frac{r}{2R} = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{9} \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$

Тогда по т. Пифагора для $\triangle BDO_2$

$BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$\frac{169}{4} + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$, т.к. $r = \frac{5}{9}R$, то

$4R^2 - 4R\cdot\frac{5}{9}R = \frac{169}{4}$

$\left(4 - \frac{20}{9}\right)R^2 = \frac{169}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{13 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{13\cdot 3}{2 \cdot 4} = \boxed{\frac{39}{8}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 Продолж. $R=\frac{39}{8}$

Тогда $r=\frac{5}{9}R=\cancel{\frac{117}{32}}\cancel{\frac{5}{9}}=\cancel{\frac{13\cdot 9\cdot 5}{32\cdot 9}}=\cancel{\frac{13\cdot 5}{32}}=\cancel{\frac{65}{32}}\ \frac{5}{9}\cdot\frac{39}{8}=\frac{65}{24}$

2) Заметим, что $\angle AFE=\angle ABE$ (опир. на дугу EA)

$\angle ABE=\angle ABC+\angle CBE$.

Пусть $\angle CBE=\alpha$, тогда, т.к. $EF\perp BC$, то $\angle BEF=90^\circ-\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow DEF=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$, т.к. $\angle AEB=90^\circ$ (опир. на диам. AB)

Тогда $\angle BDE=90^\circ-\alpha=\angle CDA$ (вертик.), тогда т.к. $\angle DCA=90^\circ$, то $\angle CAD=\alpha$.

Тогда $\angle CBE=\angle CAD=\alpha$, то есть $\angle AFE=\angle ABC+\angle CAD$.

$tg\angle ABC=\frac{AC}{CB}=\frac{O_2D}{DB}=\frac{r}{DB}=\frac{65}{24}:\frac{13}{2}=\frac{65\cdot 2}{13\cdot 24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

$tg\angle CAD=\frac{CD}{AC}$. Найдём AC по теор. Пиф. $\triangle ABC$

$AC^2=AB^2-BC^2=(2R)^2-9^2=\cancel{\left(2\cdot\frac{117}{32}\right)^2-9^2=\left(\frac{9\cdot 13}{16}\right)^2-9^2=}$

$\cancel{=9^2(}\left(2\cdot\frac{39}{8}\right)^2-9^2=\frac{39^2}{4^2}-9^2=3^2\left(\frac{13^2}{4^2}-3^2\right)=$

$=9\left(\frac{169-16\cdot 9}{16}\right)=9\left(\frac{169-144}{16}\right)=9\cdot\frac{25}{16}=\frac{3^2\cdot 5^2}{4^2}\Rightarrow AC=\frac{3\cdot 5}{4}=\frac{15}{4}$.

Тогда $tg\angle CAD=\frac{5}{2}:\frac{15}{4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{15}=\frac{2}{3}$.

Тогда $tg(\angle AFE)=\frac{tg(\angle CAD)+tg(\angle ABC)}{1-tg(\angle CAD)tg(\angle ABC)}=\frac{\frac{5}{12}+\frac{2}{3}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{13}{12}}{\frac{36-10}{36}}=$

$=\frac{13}{12}:\frac{26}{36}=\frac{13\cdot 36}{12\cdot 26}=\frac{3}{2}\Rightarrow \angle AFE=arctg\frac{3}{2}$

~~Ответ: $R=\frac{39}{8}$; $r=\frac{65}{24}$; $\angle AFE=arctg\frac{3}{2}$~~

3) Заметим, что $\triangle AFE=\triangle ABE\Rightarrow S(AFE)=S(ABE)$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$S(ABE) = \frac{1}{2} BE \cdot AE.$

Т.к. $tg \angle ABE = \frac{3}{2}$, то $\frac{AE}{BE} = \frac{3}{2}$. Тогда пусть $BE = 2x$, $AE = 3x$, то

по теор. Пиф. для $\triangle AEB$

$9x^2 + 4x^2 = AB^2 \Rightarrow \cancel{13x}\, x^2 = \frac{AB^2}{13^2}$; $AB = 2R = \frac{39}{4} = \frac{3}{4} \cdot 13$, тогда

$x^2 = \frac{13^2 \cdot \frac{9}{16}}{13} = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$, тогда $BE = \frac{3}{2}$, $AE = \frac{9}{4}$.

Тогда $S(ABE) = S(AFE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{16}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = arctg \frac{3}{2}$

$S(AFE) = \frac{27}{16}$.

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

Рассм. 2-е ур-е.

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \;|:3$

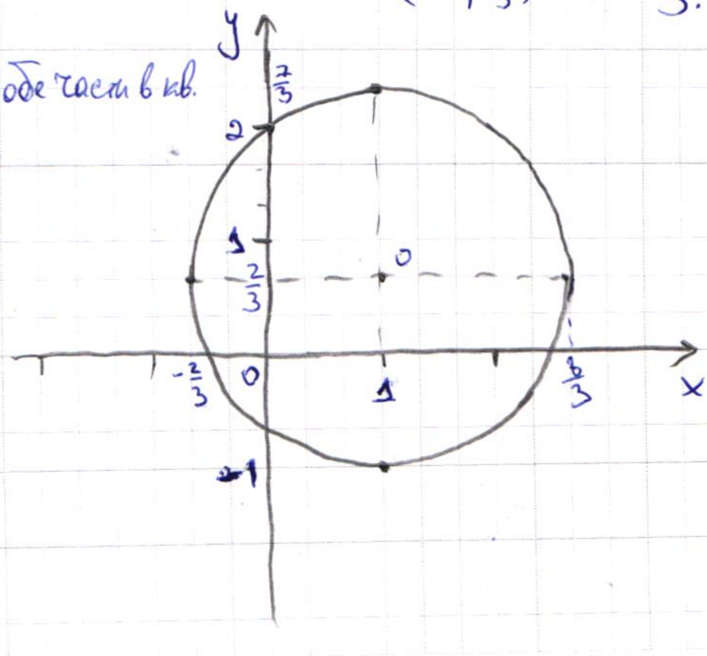
$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}^{(3} + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12+4+9}{9} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ – Окружность с ц. в т. $O\left(1; \frac{2}{3}\right)$ и $R = \frac{5}{3}$.

Из перв. ур-я: $3y - 2x \geq 0$

$y \leq \frac{2}{3}x$, возв. обе части в кв.



$(3y - 2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$.

Огр.: $x^2+6x>0$ (подлогарифм. выраж. полож.)

Тогда $|x^2+6x|=x^2+6x$

Пусть $x^2+6x=t$, тогда $t>0$

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} \geq t(t^{\log_4 5-1}-1)$. Заметим, что $\log_4 5-1<0$, тогда $t^{\log_4 5}<1 \Rightarrow t^{\log_4 5-1}-1<0$

Тогда, т.к. $t>0$, то правая часть выражения всегда отрицательна, а правая наоборот положительна. Тогда нер-во всегда выполняется внутри ОДЗ, то есть $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$.

№1 $\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+$

$+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$. $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\cos 2\alpha\cos 2\beta-\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

Подставив, получим:

$(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta)\cos 2\beta + (\cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta)\sin 2\beta +$

$+ \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta -$

$- \sin 2\alpha \underbrace{\sin^2 2\beta}_{(1-\cos^2 2\beta)} + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta -$

$- \cancel{\sin 2\alpha} + \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha} = 2(\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta) =$

$= 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) =$

$= 2\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{8}{17} : \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \cdot 2\right) = +\frac{4}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$

Тогда $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \ \Big| \cdot \sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$ | :cos

Но $\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$, то есть либо $\alpha = 0$, но это не подх, ведь тогда $tg\,\alpha$ – единств. Значит

$\boxed{\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

Но тогда $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta +$

$+ \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha =$

$= -\frac{8}{17}$; $\left[\begin{array}{l} -\frac{8}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0 \\ \frac{8}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{16}{17} \\ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{16}{17} \\ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}. \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

$3^{\log_4 t} + 3^{\log_3 t} \geq 3^{\log_3 t \log_4 5}$

$3^{\log_3 t} = t$

$t(t^{\log_4 5 - 1} - 1) \leq 3$

$\log_4 t = \dfrac{\log_3 t}{\log_3 4}$

$t^{\frac{1}{\log_3 4}} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t(t^{\frac{1}{\log_3 4} - 1} + 1) \geq t(t^{\log_4 5 - 1})$

$t^{\frac{1}{\log_3 4} - 1} + 1 \geq t^{\log_4 5 - 1}$

$\dfrac{\log_3 4 - 1}{\log_3 4} < 0$

$t^{\log_4 5 - 1} - t^{\frac{1}{\log_3 4} - 1} \leq 1$

13^2

$\times 9$

117

$y \leq \frac{2}{3}x$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 - 3y + 2x - 2$

$y = \frac{2}{3}x$

$9 \cdot \frac{4}{9}x^2 - 15x \cdot \frac{2}{3}x + 4x^2 - 2x + 2x - 2 = 0$

$4x^2 - 10x + 4x^2 - 2 = 0$

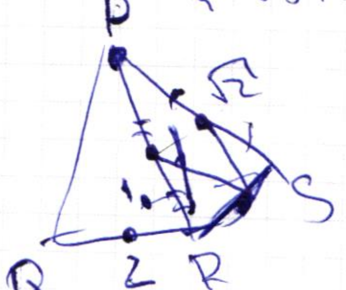
$8x^2 - 10x - 2 = 0$

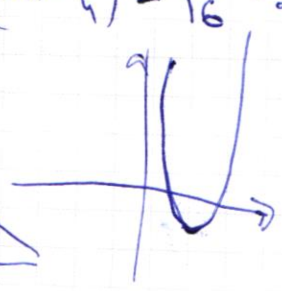
$4x^2 - 5x - 1$

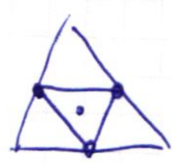
$\frac{D}{4} = 25 + 16 = 41$

$4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 =$

$= \left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = 2\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{9}{16}$







☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{r}{R}=\frac{5}{9}$, то $r=\frac{5}{9}R$

$\frac{5}{9}R=\frac{4R^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2}{4R}$ $\quad x^2+6x$

$\frac{20}{9}R=4R^2-\frac{169}{4}$ $\quad \log_4(t)=y$ $\quad 4^y=$

$4R^2-\frac{20}{9}R-\frac{169}{4}=0 \;\Big|\cdot 36$

$144R^2-\cancel{20}\,80R-169\cdot 9=0$ $\quad 13^2\cdot 9$ $\quad x^2+6x>0$

$\frac{D}{4}=40^2+144\cdot 13^2\cdot 3^2$ $\quad 5^2\cdot 8^2$ $\quad 12^2$ $\quad 1600$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2+r^2=(2R-r)^2$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2+\cancel{r^2}=4R^2-4Rr+\cancel{r^2}$

$4R^2-4Rr-\left(\frac{13}{2}\right)^2=0$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{18}$

$1-\frac{r}{2R}=\frac{13}{18}$

$\frac{r}{2R}=\frac{5}{18}$

$\frac{r}{R}=\frac{5}{9}$

$9y^2+3y$ $\quad (3y)^2+3y+\frac{1}{4}$

$\cancel{f(0)=f(0)+f(b)}$ $\quad \cancel{f(b)=0}$

$4R^2-\frac{20}{9}R-\frac{169}{4}=0 \;\Big|\cdot 36$

$x_1+x_2=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}\Rightarrow \cancel{x_2=\frac{5}{9}-x_1}$

$x_1x_2=-\frac{169}{16}$

$\cancel{x_1\left(\frac{5}{9}-x_1\right)=-\frac{169}{16}}$

$(12R)^2-80R-13^2\cdot 3^2=0$ $\quad (13\cdot 3)^2$

$\cancel{2 \mid 2 \mid 13 \mid 3}$ $\quad 2^4\cdot 3$

$\frac{D}{4}=1600+144\cdot 169\cdot 9=$ $\quad 5^2\cdot 2^6$ $\quad 2^4\cdot 3^2\cdot 13^2\cdot 3^2$

$=2^4(25\cdot 4+$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(0)=f(0)+f(b)$

$\underline{f(b)=0}$

$f(b)=f(1)+f(b)$

$f(1)=0$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2b)=f(2)+f(b)$

$f(4)=2f(2)$

$f(x^2)=2f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $\quad \cancel{x^2\ldots}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

150, 56, 15, 6, 2, 229

$3^4=81$, 169, 81, 169, 1352, 13689, 13789

43, 7, 55

117, 7, 819

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t=3^{\log_3 t}$

$3^{\log_4 t}+3^{\log_3 t}\geq 3^{\log_3 t\log_4 5}$

$\log_4 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 4}$ $\quad \log_4 t=\frac{\log_3 t}{\log_3 4}$

$3^{\log_3 t}\left(3^{\frac{1}{\log_3 4}-1}\right)$ $\quad 3^{\frac{\log_3 t}{\log_3 4}}+3^{\log_3 t}\geq 3^{\log_3 t\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}}$

$113\cdot 113$: 339, 113, 113, 12769

$117\cdot 117$: 819, 117, 117, 13689

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $f(\frac{1}{3}) = f(3) - f(9)$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)}$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $f(y^2) = f(y) + f(y)$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $f(\frac{1}{y}) = \cancel{f(1)} - f(y)$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $f(\frac{1}{10}) = -1$

$= x$ $\underbrace{f(\frac{10}{10})}_{=1-1} = f(10) + f(\frac{1}{10}) =$

$x - x tg^2\alpha = 2tg\alpha$

$3y - 2x > 0$ $f(\frac{1}{y}) = f(\frac{1}{2y}) =$ $x tg^2\alpha + 2tg\alpha - x = 0$ $f(x) \cdot f(y) < 0$

$\cancel{x < 1{,}5y}$

$y > \frac{2}{3}x$ $= f(\frac{1}{3y})$ $tg^2\alpha + \frac{2}{x}tg\alpha - 1 = 0$ $f(\frac{1}{y})f(y) > f(x)$

$f(y) = f(y^2) + f(\frac{1}{y})$, $D = \frac{4}{x^2} + 4 = 4(\frac{1}{x^2} + 1) = \frac{4}{x^2}(1+x^2)$.

$f = 2f(\frac{1}{y}) = f(y) - f(y^2)$ $tg\alpha = -\frac{2}{x}$. $= \frac{2}{x}\sqrt{1+x^2}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$f(y) - f(y^2) < 0$ $f(\frac{1}{2}) = f(2) - f(4) = 0$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\underbrace{\sin 2\alpha}\,\underbrace{\cos 2\beta} + \underbrace{\sin 2\beta}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$ $x \neq 0$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cancel{f(\frac{1}{2}) = f(3)\, f(\frac{1}{2})}$

$f(6) = 0$

$f(2) = 0$ $\boxed{f(3) = 0}$ $f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(11) = 2$ $f(\frac{1}{y}) < 0$, тогда

$f(36) = f(6) + f(6)$ $f(y) < 0$ т.к.

$f(3) f(y)$

$3 \cdot 1{,}7 > 5$

$f(1) = 0$ $\cancel{f(36) = f(6)}$

$f(\frac{x}{y}) < 0 = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(2) = 0$ $f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $f(x) > 0$

$f(3) = 0$ $f(6) = 0$ $f(\frac{1}{y})$

$f(5) = 1$ $f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(7) = 1$ $f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(11) = 2$ $+ f(10) = 1$ $f(\frac{1}{y}) = f(2) + f(\frac{1}{2y})$

7 $f(13) = 3$ $f(12) = 0$

$f(17) = 4$ $+ f(14) = 1$ $f(\frac{1}{y}) = f(\frac{1}{2y})$

$f(19) = 4$ $+ f(15) = 1$

$f(23) = 5$ $f(16) = 0$ $14 \cdot 14 =$

$\cancel{26}$ $f(18) = 0$ $14\ x$ $= 196$.

$f(\frac{1}{20}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{5}) =$ $+ f(20) = 1$

$+ f(21) = 1$ $+ f(25) = 2$ $y\ 14$

$= f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{5})$ $+ f(22) = 2$

$f(24) = 0$

☒ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{p^2}{4}\right) = f(p) + f\left(\frac{p}{4}\right) = [p/4] + f\left(\frac{p}{4}\right)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |:3 \end{cases}$$

$3x-2y>0$

$y < \frac{3}{2}x$ ~~$\frac{2}{3}$~~

~~$3x^2-6x+1+3y^2-4y$~~

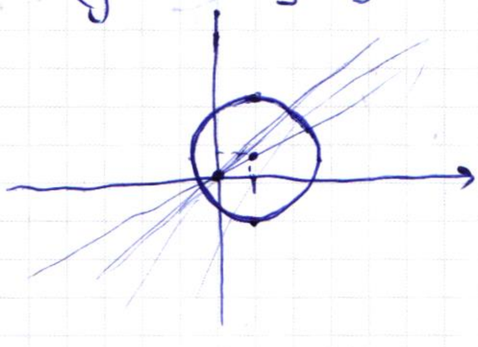
~~$3x^2-6x$~~

~~$(\sqrt{3}x)^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x + \sqrt{3}^2 + 3y^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}x + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 + \sqrt{3}^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$~~

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$

$x^2-2x+1-1+y^2-\frac{4}{3}y+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}+\frac{4}{9}+1 = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$



$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$3y(3y+1-2x) + 2x(2x+1-3y) - 3xy - 2$

$(3y-2x)(3y-2x+1) - 3y - 2 = 0$

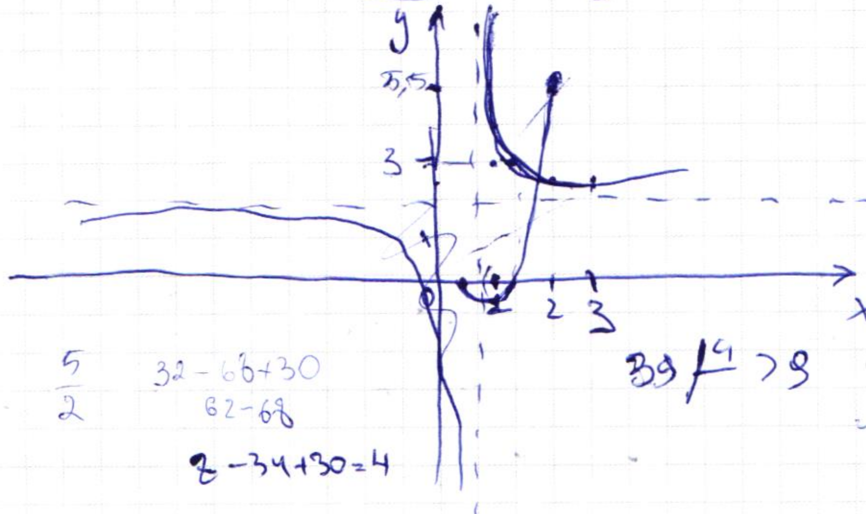
☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-3}{2(x-1)} = 2 + \frac{1}{2x-2}$ $\quad \frac{4x-3}{2x-2}$, $\ 4x-4$, $\ 1$, $\ 2$ $\quad x \neq 1$

$117 \mid 16$

$16 \cdot 9 = 144$



$\frac{1}{2x-2} = 2$

$4x-4=1$

$x = \frac{5}{4}$ $\quad x^{-1} = -1 x^{-2}$

$\left(\frac{1}{2x-2}+2\right)' =$

$= \left(\frac{1}{2x-2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)' =$

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} \quad -\frac{1}{2}\cdot 4 = -2$

$1{,}5 \quad 0{,}5$

$\frac{5}{2}$ $\quad 32-68+30$ $\quad 62-68$

$8-34+30=4$

$39 \mid^{4} > 9$

$8x^2-34x+30=0 \qquad 4x^2-17x+15=0$

$D = 289 -$

$\cancel{\frac{D}{4} = 17^2 - 8\cdot 3\ldots = 289 - 24 = 265}$

$289-240=49=7^2$

$x_1 = \frac{17-7}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$8x^2 - 2\cdot$

$\cancel{(2\sqrt{2}x)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{17\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{17\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{289}{8} + 30} = 2\sqrt{2}x$

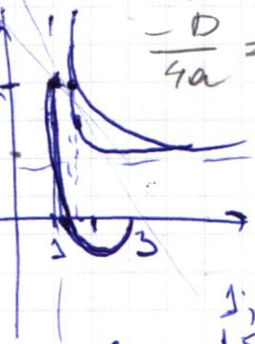
$4\sqrt{2}\, y = 34$

$y = \frac{34}{4\sqrt{2}} = \frac{17}{2\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{4} = \frac{289}{8}$

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$8\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) =$

$-\frac{D}{4a} = \frac{\frac{D}{4}}{a} = \quad (8x-5)\left(x-\frac{3}{2}\right)$



$3x^2+4x^2 = AB^2$

$13x^2 = AB^2$

$x^2 = \frac{AB^2}{13}$

$x = \frac{AB}{\sqrt{13}}$

$= \frac{-49}{8} = 6$

$11 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$

$-2x+6$

$k+b=4$

$1{,}5k+b=3$

$0{,}5k=-1$

$k=-2$

$b=6$

$1;4$

$1{,}5;3$

$0{,}5x = -1$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$ $\quad 3 \quad -x^2$

$x^2+6x=t$

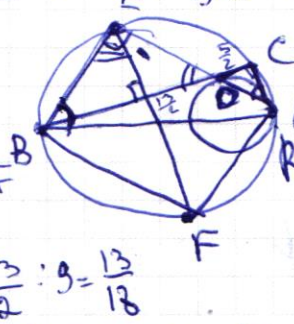
$BC=9$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$t = 3^{\log_3 t}$ $\quad \frac{16}{9}R^2 = \frac{169}{4}$

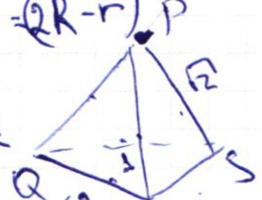
$3^{\log_4 t} + 3^{\log_3 t} \geq |t|$ $\quad |t| = \log$

$\cup EC = \cup AF$



$R^2 = \frac{13\cdot 3}{4\cdot 2}$

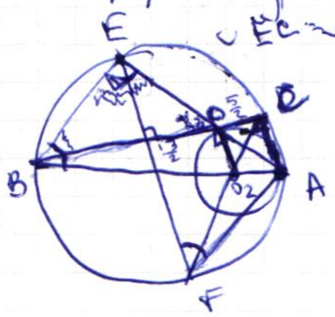
$\left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2 = (2R-r)^2$



$\frac{169}{4} + r^2 =$

$= 4R^2 - 4Rr + r^2$

$4R\left(\frac{169}{4} - 4R^2\right) = r = \frac{4R^2 - \frac{169}{4}}{-4R}$



$\frac{13}{2} : 9 = \frac{13}{18}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18} \qquad \frac{r}{2R} = \frac{5}{18}$

$\frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)