МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2xy-12y-x+6=(x-6)(2y-1)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ y=\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x>6 \\ y>\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x<6 \\ y<\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $x=6$

$(x-6)(2y-1)=0 \Rightarrow x-12y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+(6y-\frac{1}{3})^2=90$ – не выполняется

2) $y=\frac{1}{2}$ $\quad 2xy-12y-x+6=0 \Rightarrow x-12y=0 \Rightarrow x=6$, тоже не подходит

возв. 1 равенство в кв.

$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6$

$x^2+x(1-26y)+144y^2+12y-6$

решим отн. x $\quad D=(1-26y)^2-4(144y^2+12y-6)=100y^2-100y+25$

$x=\frac{26y-1\pm\sqrt{(10y-5)^2}}{2} \Rightarrow x_1=\frac{26y-1+10y-5}{2}=18y-3$, $x_2=\frac{26y-1-10y+5}{2}=8y+2$

3) $x>6$, $y>\frac{1}{2}$

$x_1=18y-3$, $x_2=8y+2$

$x_{12}>\frac{1}{2}$.

а) $(x-6)^2+(6y-3)^2=90 \Rightarrow (18y-9)^2+(6y-3)^2=90$

$18y-9,\ 6y-3>0 \Rightarrow f\nearrow \Rightarrow \exists$ 1 решение

$y=1$ подходит $\Rightarrow$ $y=1>\frac{1}{2}$

$x=15>6$

б) $(8y-4)^2+(6y-3)^2=90$

$100y^2-100y+25=90$

$(10y-5)^2=90$

$y>0 \Rightarrow 10y-5=\sqrt{90}$ $\quad y=\frac{3\sqrt{10}+5}{10} > \frac{1}{2}$, $\quad x=\frac{8(3\sqrt{10}+5)}{10}+2 = \frac{12\sqrt{10}+20+10}{5}>6$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4) $x < 6, y < \frac{1}{2}$

a) $(18y-9)^2+(6y-3)^2=90$

$18y-9<0,\ 6y-3<0 \Rightarrow f\nearrow$ при $|y|\nearrow \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 решение при $y=0,\ x=-3$ ($y=\frac{1}{2}$, $x=6$)

б) $(8y-4)^2+(6y-3)^2=90$

$10y-5=-\sqrt{90}$

$y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}<\frac{1}{2}$

$x=8y+2=\frac{(5-3\sqrt{10})8}{10}+2=\frac{20-12\sqrt{10}+10}{5}=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}<6$

Ответ: $(15;1)$, $\left(\frac{30+12\sqrt{10}}{5};\frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right)$, $(-3;0)$, $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5};\frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)} \Rightarrow 10x-x^2>0$

$|x^2-10x|=10x-x^2=\cancel{t}$ $\log_3(10x-x^2)=t>0$

$3^{t\cdot\log_3 4}=4^t$

$10x+4^t\geq x^2+5^t$

$10x-x^2=3^t \Rightarrow 3^t+4^t\geq 5^t$

$3^2+4^2=5^2$ $a^x+b^x<(a+b)^x$ при $x>1 \Rightarrow 3^t+4^t<5^t$ при $t>2$

если $3^x+4^x=5^x$ при $x<2$, то $3^2+4^2<5^2$ – противор $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^t+4^t>5^t$ при $t\in(0;2)$

$t\in(0;2]$

$0<\log_3(10x-x^2)\leq 2$

$10x-x^2\in(-\infty;9]$

$10x-x^2\leq 9$

$x^2-10x-9\geq 0$

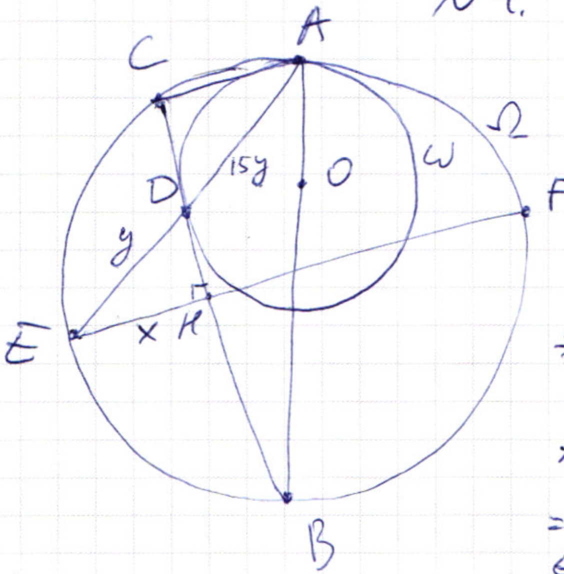
~~$(x-1)(x$~~ $D=100+36=136$ Ответ:

$x=\frac{10\pm\sqrt{136}}{2}=5\pm\sqrt{34} \Rightarrow x\in(-\infty;5-\sqrt{34}]\cup[5+\sqrt{34};+\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Рассм гомотетию с центром в A: $\omega \to \Omega$

Тогда $BC \to$ кас в E, паралл. $BC \Rightarrow$
$\Rightarrow E$ – середина $\smile BC$

$H \in BC$, $EH \perp BC \Rightarrow H$ – середина
$\frac{BC}{2} = CH = \frac{16}{2} \Rightarrow DH = \frac{16}{2} - \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

AB – диаметр $\Omega \Rightarrow \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle DHE \Rightarrow k = \frac{DC}{DH} = 15.$

$ED = y$

По степени точки D: $y \cdot 15y = CD \cdot DB = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{17}{4}$, $y = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$x = \sqrt{y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{4} - \frac{1}{4}} = 2$, $k = 15 \Rightarrow AC = 30$

O – центр ω, $OD \perp CD$ по кас. $\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OD}{AC=30} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{32} = \frac{r}{30} \Rightarrow$ 1) $r = \frac{17 \cdot 30}{32} = \frac{17 \cdot 15}{16}$

$\frac{r}{R}$ – коэф. гомотетии с центром в $A = \frac{15}{16}$

2) $R = \frac{r \cdot 16}{15} = \frac{17 \cdot 15}{16} \cdot \frac{16}{15} = 17$

3) $\angle AFE = 90^\circ - \angle AEF = \angle ADH = \operatorname{arctg} 2$

4) $S_{AEF} = S_{EDH} \cdot \left(\frac{AE}{EH}\right)^2$, т.к. из подобия AEF и HED

$S_{EDH} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \Rightarrow S_{AEF} = \left(\frac{16y}{x}\right)^2 = (8y)^2 = 64 \cdot \frac{17}{4} = 17 \cdot 16$

Ответ: $r = \frac{255}{16}$, $R = 17$, $\angle AFE = \operatorname{arctg} 2$, $S_{AEF} = 17 \cdot 16$

№5.

$f(y \cdot \frac{x}{y}) = f(y) + f(\frac{x}{y}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(x)$ ''

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$, тогда распишем $f(x)$ для x от 2 до 25

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1

22	23	24	25
2	5	0	1

Разделим на группы 0, 1, 2, 3, 4, 5

$\underbrace{\text{10 чисел}}_{0}\ \underbrace{8}_{1}\ \underbrace{2}_{2}\ \underbrace{1}_{3}\ \underbrace{2}_{4}\ \underbrace{1}_{5}$

Для каждой группы посчитаем число сп. выбрать число в ней и в более „старших"

$10 \cdot 15 + 8 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 211$ пар

Ответ: 211.

№6.

$\frac{16x - 16}{4x - 5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$

1) $32x^2 + x(a - 36) + 3 + b \le 0$

отн x решаем

~~$D = (a-36)^2 - 4 \cdot 32 \cdot (3 + b)$~~

если в 1 и $\frac{1}{4}$ значения < 0, то и на $[\frac{1}{4}; 1]$ тоже

$x = 1 \quad 32 + a - 36 + 3 + b \le 0 \Leftrightarrow \underline{a + b \le 1}$ т.к ветви вверх.

$x = \frac{1}{4} \quad 32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{a}{4} - 9 + 3 + b \le 0$

$a - 4b - 16 \le 0$

$\underline{a + 4b \le 16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b$$

$$\frac{16x-16-4ax^2-4bx+5ax-5b}{4x-5} \le 0$$

$4x-5$ - корень $x=\frac{5}{4} > 1, \frac{1}{4} \Rightarrow$ на $[\frac{1}{4}; 1]$ выраж >0 ~~знак~~

$4a^{\cancel{x}}x^2+4bx+\cancel{5b}-5ax-16x+5b+16 \ge 0$ на $[1; \frac{1}{4}]$

$4ax^2+x(4b-5a-16)+5b+16 \ge 0$

1) $4a>0$

~~рассм 1 и $\frac{1}{4}$~~

меньший корень ≥ 1 или больший $\le \frac{1}{4}$

x_{12} ~~$= -a+16+5a-4b \pm \sqrt{\ }$~~

$$x_1 = \frac{-4b+5a+16 \pm \sqrt{(4b-5a-16)^2-4\cdot 4a(5b+16)}}{8a} \le \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-4b+5a+16-\sqrt{(4b-5a-16)^2-4\cdot 4a(5b+16)}}{8a} \ge 1$$

2) $4a<0$

рассм 1 и $\frac{1}{4}$. если значения ≥ 0 то ~~и~~ на $[\frac{1}{4}; 1]$ ≥ 0 т.к. ветви вниз

$x=1$ $4a+4b-5a-\cancel{16}+5b+\cancel{16} \ge 0$

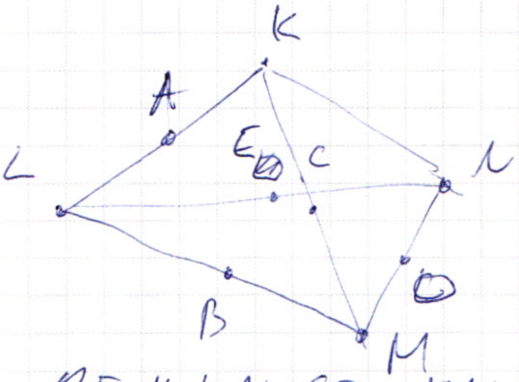
$9b-a \ge 0$

$x=\frac{1}{4}$ $\frac{a}{4}+b-\frac{5}{4}a-4+5b+16 \ge 0$

$-a+6b+12 \ge 0$

$$\begin{cases} a<0 \\ 9b-a \ge 0 \\ -a+6b+12 \ge 0 \end{cases}$$

№7.



$AE \parallel KN$, $CD \parallel KN$, $= \frac{1}{2} KN \Rightarrow AECD$ – параллелограмм

вписан в сферу $\Rightarrow$ прямоугольник

Также $NCBD$ параллелограмм $\Rightarrow$ прямоугольник.

$KN \perp LM$, $\angle LNM = 90^\circ$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $(a-36)^2 - 4(3+b) < 0$

$a^2 - 72a + 36^2 - 12 - 4b < 0$

$D = 72^2 - 4(36^2 - 12 - 4b) = 48 + 16b \geq 0$

$a = \dfrac{72 \pm \sqrt{48+16b}}{2}$

$a < 0$

б) $-a + 36 + \sqrt{(a-36)^2 - 4(3+b)} < 16$

$-a + \sqrt{} < -20 \quad \varnothing$

$(28-36)(28+36)$

$-8 \quad 64$

$-a + 36 - \sqrt{(a-36)^2 - 4(3+b)} > 64$

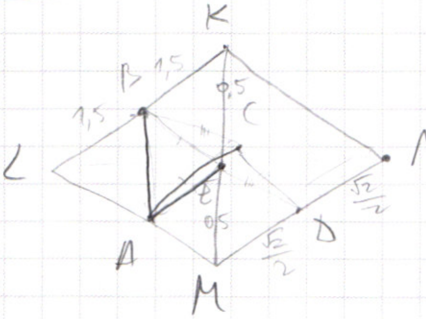
$-a - \sqrt{(a-36)^2 - 4(3+b)} > 28$

$-a - 28 > \sqrt{(a-36)^2 - 4(3+b)}$

$\cancel{a^2} + 56a + 28^2 > \cancel{a^2} - 72a + 36^2 - 12 - 4b$

$128a - 524 > -4b$

$\begin{cases} 128a - 524 + 4b > 0 \\ a < 0 \end{cases}$

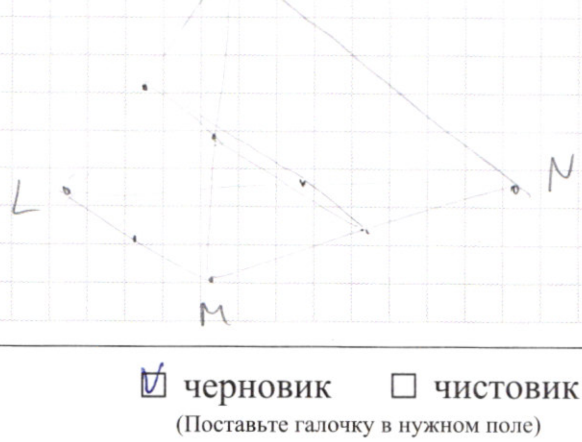


$KL = 3, \; KM = 1, \; MN = \sqrt{2}$

$BCDE$ – прямоуг.

LM – ?

$KN \perp LM$



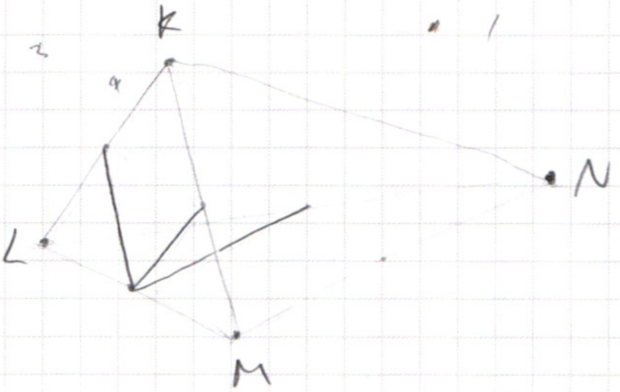
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

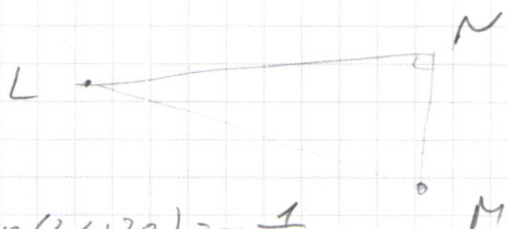
Страница №__

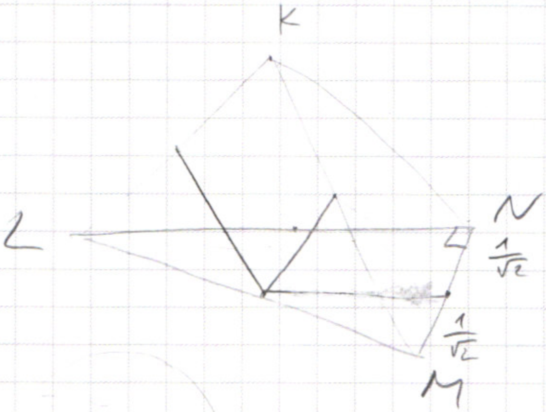
(Нумеровать только чистовики)

$KL = 3$
$KM = 1$
$MN = \sqrt{2}$



$\cancel{x^2} + y^2 - 2xy\cos\alpha + y^2 + \cancel{z^2} - 2yz\cos\beta = \cancel{x^2} + \cancel{z^2} - 2xz\cos\gamma$



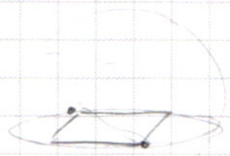


$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1) $\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \cos 2\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

~~$x=$~~ 2.

1) $x>6$, $y>\frac{1}{2}$ $(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$D=(10y-5)^2$

$x=\frac{26y-1\pm(10y-5)}{2}$

$x_1=\frac{26y-1+10y-5}{2}=18y-3>6$

$x_2=\frac{26y-1-10y+5}{2}=8y+2>6$

x_1 $(18y-9)^2+(6y-3)^2=90$

$(6y-3)^2+(2y-1)^2=10$ $y\geq\frac{1}{2}$

$\boxed{y=1}$ $9+1=10$ $f\nearrow\Rightarrow$ одно решение

x_2 $(8y-4)^2+(6y-3)^2=90$

$64y^2-64y+16+36y^2-36y+9=90$

$100y^2-100y+25=90$

$(10y-5)^2=90$

$10y-5>0\Rightarrow 10y-5=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ $\boxed{y=\frac{3\sqrt{10}+5}{10}}$

2) $x<6$, $y<\frac{1}{2}$ $(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$D=(10y-5)^2$

$x=\frac{26y-1\pm(5-10y)}{2}$

$x_1=18y-3$, $x_2=8y+2$

x_1 $(18y-9)^2+(6y-3)^2=90$

$(6y-3)^2+(2y-1)^2=10$

$\boxed{y=0}$

$(-3)^2+(-1)^2=10$

x_2 $(8y-4)^2+(6y-3)^2=90$

$(10y-5)^2=90$

$10y-5=-\sqrt{90}$

$\boxed{y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

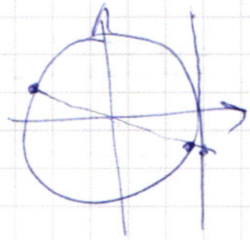
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

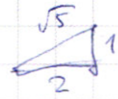
33

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt5} =$





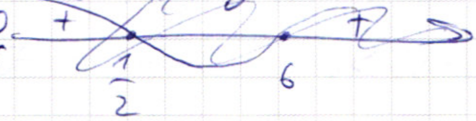
$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$ $\qquad 2xy - 12y - x + 6 = (x-6)(2y-1)$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$ $\qquad (x-6)(2y-1) \geq 0$



$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 45$

$x = 6 \qquad y = \frac{1}{2}$

$x^2 + 144y^2 - 24xy = 2xy - 12y - x + 6$

$x - 12y = 0$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$x = 6$

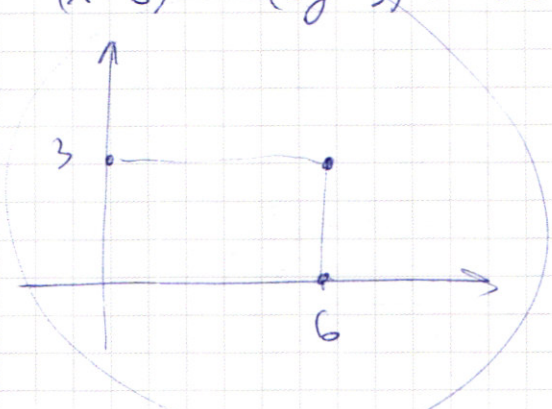
$y = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x > 6 \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x < 6 \\ y < \frac{1}{2} \end{cases}$

26×26: $156 + 52 = 676$

$144 \times 4 = 576$



$x^2 + x(1-26y) + 144y^2 + 12y - 6$

$D = 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24$

$D = 100y^2 - 100y + 25 = (10y-5)^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\log_3(10x - x^2) = t > 0$ $\quad x(10-x)$

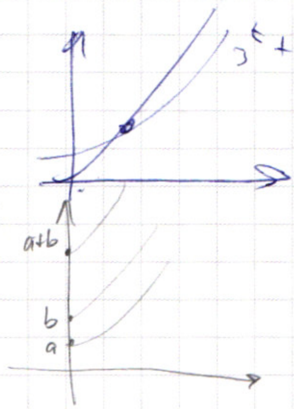
$10x - x^2 = 3^t$

$3^{t \cdot \log_3 4} = 4^t$

$10x + 4^t \geq x^2 + 5^t$

$10x - x^2 \geq 5^t - 4^t$

$t \in (0; 2]$.



$3^t \geq 5^t - 4^t$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$3^3 + 4^3 = 27 + 64 < 125$

$5^t - 4^t - 3^t \leq 0$

$a + b = c$

$a^x + b^x \overset{?}{<} (a+b)^x$

$9^x + 16^x \overset{?}{<} 25^x$

$3^t + 4^t - 5^t$

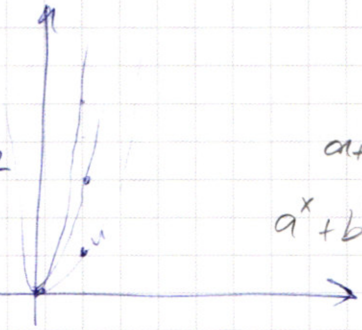
$(3^t)' = x \ln 3$

$(3^t + 4^t)' = t(\ln 3 + \ln 4)$ $\quad t \cdot \ln 12$

$(5^t)' = t(\ln 5)$

$\ln 3 + \ln 4 < \ln 5$

$e^{\ln 3 + \ln 4}$



e^x

$(e^x)' = x \cdot \ln e = x$

$a^x + b^x = (a+b)^x$

$(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = a + b$

$a + b = c$

$a^x + b^x \overset{?}{<} (a+b)^x$

$\ln 3 = \log_e 3$

$e^{\ln 3} = 3$

$e^{\ln 3 + \ln 4} = 3 \cdot 4 = 12 > 5$

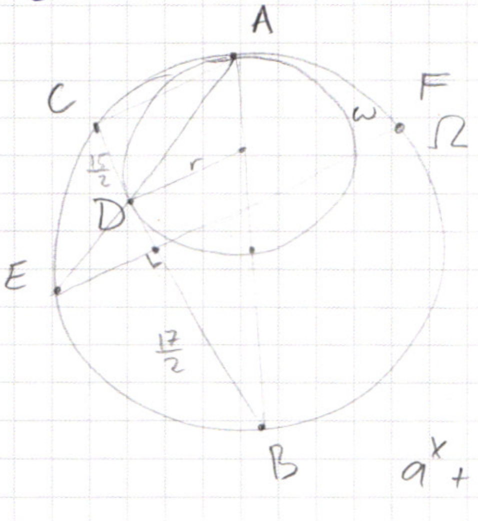
$9^x + 16^x \vee 25^x$

$a + b$

$e^a = 3$

$e^b = 4$

$e^{a+b} = 12$



$R, r, \angle AFE, S_{AEF} - ?$

$CD =$

$2R(2R - 2r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{32}$

$a^x + b^x = (a+b)^x$

$a^x + b^x - (a+b)^x = 0$

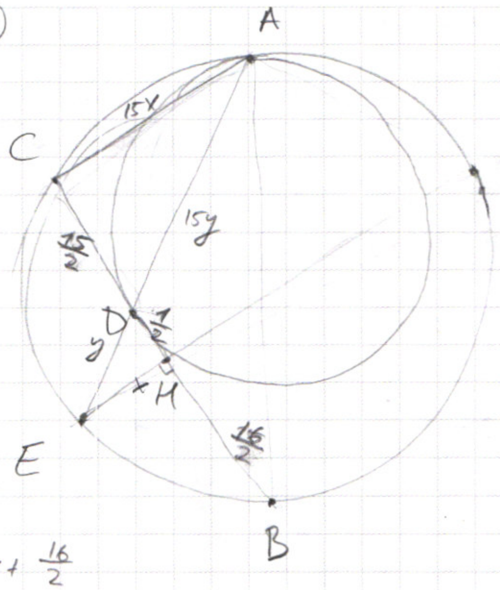
$x(\ln a + \ln b) = x \ln ab$

$x(\ln(a+b))$

$a^x + b^x = c^x$

$a^y + b^y = c^y$

4



$15\cdot 3\cdot \frac{15^2}{3} =$

$= 45\cdot$

$+\begin{array}{r}1024\\3475\\\hline 4499\end{array}$

$15\cdot 175$

$45\cdot$

$\times \begin{array}{r}63\\6\end{array}$

225

$x+\frac{16}{2}$

$y\cdot 15y = \frac{\cancel{15}\cdot 17}{4}$

$y^2 = \cancel{\sqrt{\frac{17}{4}}} \frac{17}{4} \quad y=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$x^2 - 32^2 = 15^3$

$(x-32)(x+32)$

$\times\begin{array}{r}225\\15\\\hline 1225\\225\\\hline 3475\end{array}$

$x=\sqrt{\frac{17}{4}-\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$AC = \frac{15\sqrt{15}}{2}$

$AB^2 = 16^2 + \left(\frac{15\sqrt{15}}{2}\right)^2 = 256 + \frac{225\cdot 15}{4} = \frac{1024+3475}{4}$

$2r\cdot 15x = 15^2y^2$

1) $r = \frac{15y^2}{2x} = \frac{15\cdot\frac{17}{4}}{\frac{2\cdot\sqrt{15}}{2}} = \sqrt{15}\cdot\frac{17}{4}$

$\frac{r}{R} = \frac{15\cancel{y}}{16\cancel{y}}$

2) $R = \frac{16r}{15} = \frac{\sqrt{15}\cdot 17\cdot \cancel{16}4}{4\cdot 15} = \frac{68\sqrt{15}}{15}$

3) $\angle AFE = \angle EDB = \arcsin\sqrt{\frac{15}{17}}$

4) $S_{AEF} = k^2\cdot S_{OEH} = k^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2} = k^2\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}$

$k = \frac{16y}{x} = \frac{16\sqrt{17}}{\frac{2\cdot\sqrt{15}}{2}} \qquad k^2 = 16^2\cdot\frac{17}{15}$

$S_{AEF} = 16^2\cdot\frac{17}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{32\cdot 17\sqrt{15}}{15}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad$ Опр. на $\mathbb{Q}_+$

$\begin{cases} 2 \le x, y \le 25 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$ $\quad f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$ $\quad f(19)=4$

$f(6)=f(2)+f(3)$

$f(a)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$ $\quad f(p$

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$f(x)=0$ $\quad x\neq 1$ $\quad f(ax)=f(a)$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=-k$

$f\left(\frac{2}{3}\right)$ $\quad f(nx)=f(n)+f(x)$ $\quad f\left(n\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)=f(n)-kx$

$f(nx^k)$

$f(n)\geq 0$

$f(19^n)=4n$ $\quad f(2^n)=0$

$f(19^n\cdot$ $\quad f\left(2^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=$

$f\left(\frac{p}{q}\right)>0$, если q $\quad f\left(\frac{18}{19}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$ $\quad f\left(19\cdot\frac{18}{19}\right)=$

x 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$f\left(b\cdot\frac{a}{b}\right)=f(b)+f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a) \Rightarrow$

$f(x)$ $\quad \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	1

$\underbrace{10}_{0}$ $\quad \underbrace{8}_{1}$ $\quad \underbrace{2}_{2}$ $\quad \underbrace{1}_{3}$ $\quad \underbrace{2}_{4}$ $\quad \underbrace{1}_{5}$

Выбрать x и y: $f(x)<f(y)$

$10\cdot 15+8\cdot 6+2\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1=150+\underbrace{48+8+3+2}_{61}=$ 211 пар

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ ⑥

$x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$x_1 \ge 1 \quad x_2 \le \frac{1}{4}$ $\quad 4x-5<0$

$(ax+b)(4x-5) \le 16x-16$

$4ax^2-5ax+4bx-5b-16x+16 \le 0$ на $[\frac{1}{4}; 1]$

(1) $4ax^2+x(4b-5a-16)+16-5b \le 0$

$ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\Rightarrow 32x^2-36x+3+ax+b \le 0$

(2) $32x^2+x(a-36)+3+b \le 0$ на $[\frac{1}{4}; 1]$

$D=(a-36)^2-4(3+b)$

$x=1 \quad 32+a-36+3+b \le 0$

$a+b-1 \le 0 \quad \underline{a+b \le 1}$

$x=\frac{1}{4}$

$32\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(a-36)+3+b \le 0$

$2+\frac{a}{4}-9+3+b \le 0$

$\frac{a}{4}+b-4 \le 0$

$a+4b-16 \le 0 \quad \underline{a+4b \le 16}$

$4ax^2+x(4b-5a-16)+16-5b \le 0$

1) если $4a>0$

$x=1 \quad 4a+4b-5a-\cancel{16}+\cancel{16}-5b \le 0$

$\cancel{-5a-b}\ \underline{-a-b \le 0}$

$x=\frac{1}{4} \quad \frac{a}{4}+b-\frac{5}{4}a-4+16-5b \le 0$

$-a-4b+12 \le 0$

$a+4b-12 \ge 0$

тогда $\begin{cases} a \ge 0 \\ a+b \le 1 \\ a+4b \le 16 \\ a+b \ge 0 \\ a+4b \ge 12 \end{cases}$ $\quad b \le 1$, $a \ge 8$ $\quad |b| = a-x, \ 0 \le x \le 1$

$a+4b \ge 12$

$a-4a+4x \ge 12$

$4x-3a \ge 12$

2) $4a<0$

$x=\frac{-a+36 \pm \sqrt{(a-36)^2-4(3+b)}}{64}$

а) $D<0 \quad (a-36)^2-4(3+b)<0$

б) $\left[\begin{array}{l} \frac{-a+36+\sqrt{(a-36)^2-4(3+b)}}{64} < \frac{1}{4} \\ \frac{-a+36-\sqrt{(a-36)^2-4(3+b)}}{64} > 1 \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)