МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$

$xy-6x-y+6=(x-1)(y-6)$; $(x-1)(y-6)\geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{y-6}\geq 0, \frac{y-6}{x-1}\geq 0.$

$y-6x=y-6-6x+6=(y-6)-6(x-1)$

$45+9x^2+y^2-18x-12y=9x^2-18x+9+y^2-12y+36=$

$=9(x-1)^2+(y-6)^2$

Пусть $a=x-1$, $b=y-6$. Тогда

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=45+45=90 \end{cases}$. Если $\sqrt{ab}=0$, то $ab=0$, тогда ~~$a=0$~~ или $a=0$

или $b=0$, а также $b=6a$. Если $a=0$, то $b=6a=0$, если $b=0$,

то $a=\frac{b}{6}=0$. То есть, если $\sqrt{ab}=0$, то $a=b=0$, тогда

$9a^2+b^2=0\neq 90$ и $(0,0)$ не является решением. Если $\sqrt{ab}\neq 0$,

~~то должно быть $a\neq 0, b\neq 0$~~, то поделим:

$b-6a=\sqrt{ab} \,|:\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}}-6\sqrt{\frac{a}{b}}=1$. Пусть $\sqrt{\frac{b}{a}}=t$, тогда

$t-\frac{6}{t}=1 \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow t=3$ или $t=-2$. $t=-2=\sqrt{\frac{b}{a}}$ невозможно,

тогда $t=3=\sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{b}{a}=9 \Rightarrow b=9a$.

$9a^2+(9a)^2=90a^2=90 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=1 \vee a=-1$. Если $a=-1$, то

$b=-9$ и $b-6a=-9+6=-3=\sqrt{ab}\geq 0$ — невозможно, значит

$a=1 \Rightarrow b=9$. Тогда $x=a+1=2$, $y=b+6=15$. Ответ: $(2,15)$.

№3. $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$.

ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0,26)$.

Пусть $y=26x-x^2$, ~~$y>0$~~ Тогда $y>0$, $|x^2-26x| = |-y| = y = 26x-x^2$.

$y^{\log_5 12} + (26x-x^2) - 13^{\log_5 y} \geq 0$.

$y^{\log_5 12} + y - 5^{\log_5 13\cdot\log_5 y} \geq 0$.

$y^{\log_5 12} - y^{\log_5 13} + y \geq 0$. Т.к. $y>0$, это равносильно

$\frac{y^{\log_5 12} - y^{\log_5 13} + y}{y} = y^{\log_5\frac{12}{5}} - y^{\log_5\frac{13}{5}} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^{\log_5\frac{13}{5}} - y^{\log_5\frac{12}{5}} - 1 \geq 0$.

Возьмём производную по y от выражения слева и пусть $\alpha = \log_5\frac{13}{5}$, $\beta = \log_5\frac{12}{5}$. $\alpha > \beta > 0$:

$\alpha y^{\alpha-1} - \beta y^{\beta-1}$. Т.к. $\alpha > \beta$, $\alpha - 1 > \beta - 1$, откуда ~~$\forall y \in R$~~ $\forall y > 0$ $y^{\alpha-1}, y^{\beta-1} > 0$, тогда $\alpha y^{\alpha-1} > \beta y^{\beta-1} > 0 \Rightarrow \alpha y^{\alpha-1} - \beta y^{\beta-1} > 0$.

Производная функции $y^\alpha - y^\beta - 1$ всюду положительна на области определения, а значит $y^\alpha - y^\beta - 1$ всюду возрастает и имеет не более одного корня y_0, при котором $y_0^\alpha - y_0^\beta - 1 = 0$. Он равен 25, т.к. $25^{\log_5\frac{13}{5}} - 25^{\log_5\frac{12}{5}} - 1 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 - 1 = \frac{169-144}{5^2} - 1 =$

$= \frac{25}{25} - 1 = 0$. Тогда $y^\alpha - y^\beta - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq y_0 = 25$. $26x - x^2 \geq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$. Вместе с ОДЗ решение имеет вид: $(0,1] \cup [25,26)$. Ответ: $(0,1] \cup [25,26)$.

№5.

~~Пусть $f(1) = a$. Тогда~~ $f(a) = f(a\cdot 1) = f(a) + f(1)$, откуда $f(1) = f(a) - f(a) = 0$.

$f(1) = 0$. Тогда $f(1) = 0 = f(y\cdot\frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$.

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$. Если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то это равносильно $f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Ищем кол-во пар (x, y) таких, что $x, y \in \{4, 5, \ldots, 28\}$ и $f(x) < f(y)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Построим таблицу значений f на $\{4, 5, \dots, 28\}$. Заметим, что если $n \in \mathbb{N}$ имеет разложение $n = \prod\limits_{p_i \in \mathbb{P},\, n \vdots p_i} p_i$ на простые p_i, то $f(n) = \sum\limits_{p_i \in \mathbb{P},\, n \vdots p_i} f(p_i) =$

$= \sum\limits_{p_i \in \mathbb{P},\, n \vdots p_i} \left[\frac{p_i}{4}\right]$. Таблица:

n:	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(n)$:	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

25	26	27	28
2	3	0	1

~~Всего в таблице: 9 решений~~

f равна: 0 на 9 числах, откуда пар, в которых $f(x)=0$ и $f(x)<f(y)$ всего $9 \cdot (8+3+2+2+1) = 9 \cdot 26 = 144$

1 на 8 числах, откуда пар, где $f(x)=1$ и $f(x)<f(y)$ всего $8(3+2+2+1) = 64$

2 на 3 числах, откуда пар, где $f(x)=2$ и $f(x)<f(y)$ всего $3(2+2+1) = 25$

3 на 2 числах, откуда пар, где $f(x)=3$ и $f(x)<f(y)$ всего $2 \cdot (2+1) = 6$

4 на 2 числах, откуда пар, где $f(x)=4$ и $f(x)<f(y)$ всего $2 \cdot 1 = 2$

5 на 1 числе, откуда пар, где $f(x)=5$ и $f(x)<f(y)$, всего $1 \cdot 0 = 0$.

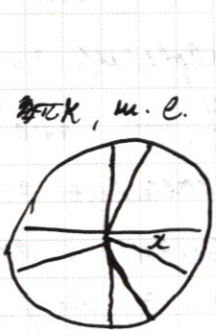
Итого: $144+64+25+6+2 = 231$. Ответ: 231.

№ 1.

Пусть $2\alpha + 2\beta = x$, $2\beta = y$. Тогда $\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x+y) + \sin(x-y) =$ ~~$2\beta = y$~~ $= \frac{2}{17}$ ~~т.е.~~ $\Leftrightarrow 2\sin x \cos y = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\alpha = \frac{x-y}{2}$. $\operatorname{tg}\alpha$ определён, откуда $\frac{x-y}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, т.е.

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{17}}$. $\quad$ $x - y \neq \pi(2k+1)$



Вычислим $\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$. $\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} =$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$= \frac{\sin x - \sin y}{\cancel{\sin}\cos x + \cancel{\sin}\cos y}$. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}}{\pm\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{-1\pm 4}{\pm 4+1} = \frac{-1+4}{4+1}; \frac{-1-4}{4+1}; \frac{-1-4}{-4+1}; \frac{-1+4}{-4+1} =$

$= \frac{3}{5}; -1; \frac{5}{3}; -1$. Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

~~Докажем~~

6. ~~Пусть~~ $2+\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b+2 \geq 18x^2-51x+28+2$

Пусть $t = 3x+2$ $x \in (\frac{2}{3}; 2] \Leftrightarrow t \in (0; 4]$.

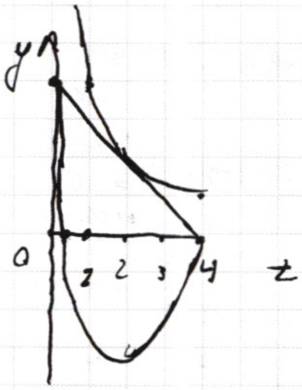
$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4\cancel{t} - 2(3x-2)}{3x-2} = \frac{4}{t} - 2$.

$18x^2 - 51x + \overset{30}{\cancel{28}} = 2t^2 - 9t + 4$;

$\cancel{\frac{4}{t}}2 + ax + b = a't + b'\cancel{+2}$, где $3a' = a$, $b' = b+2$.

~~$\frac{4}{t} - 2 \geq a'x + b' - 2$~~

$\frac{4}{t} \geq a't + b' \geq 2t^2 - 9t + 4$ при $t \in (0, 4]$.



Рассмотрим прямую $y = 4 - t$. Она пересекает $2t^2 - 9t + 4$ в точках 0 и 4 и касается $\frac{4}{t}$ в точке 2. Рассмотрим прямую $a't + b'$. Если она касается $\frac{4}{t}$ и удовлетворяет условию, то в случае, когда её угол наклона ~~меньше~~ меньше по модулю, чем -1, она должна пересечь $2t^2 - 9t + 4$ на $(0; \frac{1}{2}]$. Если её угол наклона больше по модулю, чем -8, то она должна пересечь $2t^2 - 9t + 4$ на $[\frac{1}{2}; 4]$. Если же она не касается $\frac{4}{t}$, то она должна лежать ниже некоторой параллельной ей касательной, т.к. пересекать $\frac{4}{t}$ она не может. В этом случае она опять пересечёт $2t^2 - 9t + 4$. Отсюда вывод, что подходит только $4 - t$, откуда $a = 3a' = -3$, $b = b' - 2 = 2$. Ответ: $(-3, 2)$.

5: $\frac{4-6x+4}{3x-2} = \frac{4-2(3x-2)}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2.$

$18\pi^2$

$51 = 21+30 = 3\cdot 17 \qquad 2\cdot(3x)^2 - 17\cdot 3x + 28$

$t^2 - 17t + 28 \qquad 32-68+28$

$32-68+28 =$

$4\cdot 7 \qquad 2t^2 - 17t + 28$

$= 32 - 218 - 51 + 28$

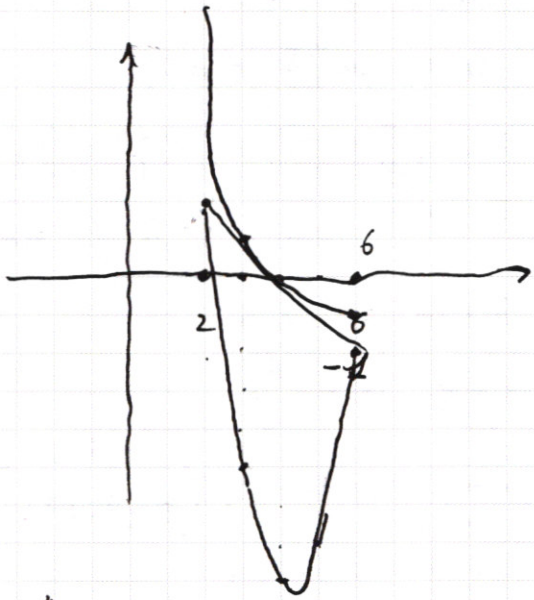
$8 -$

6. $\cancel{x=3t}$ $t = 3x$

$50 - 85 + 28 \qquad \frac{17}{4}$

$\frac{2}{3} < x \le 2 \qquad \underline{3a' = a}$ 6. $\qquad \cancel{24} + \frac{3}{2}$

4



$2 < 3x \le 6 \qquad a' = \frac{a}{3} \qquad 2\cdot 14$

$8+28 \qquad 28 - 35$

$$\begin{cases} 2 < t \le 6 \\ \frac{8-2t}{t-2} \geq a't + b \geq 2t^2 - 17t + 28 \end{cases}$$

$72 - 102 + 28$

$t^2 - \underline{17t} + 14$

4

$\begin{array}{r} \times\, 28 \\ 8 \\ \hline \cancel{16} \\ 64 \\ \hline 16 \\ 224 \end{array}$

$\frac{17 \pm \sqrt{289 - 8\cdot 28}}{4}$

5. $\frac{4}{t-2} - 2 = at + b$

$\cancel{2}$ 2 3 5 7 11 13 17 19

23

0 1

$\cancel{165}$ $4 + 2(t-2)$ $\qquad 4 = 2\cdot 2$

$\frac{2}{4}\ \frac{2}{4}$

$\frac{4}{t-2} - 2 \qquad \frac{2}{4}\ \frac{2}{4} \qquad 0$

5.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	40	4	0

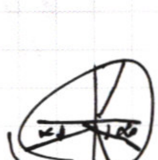
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
4	2	1	2	5	0	2	3	0	1

$\frac{x-y}{2} = \pi$

$x - y = \pi(2n+1)$

$\frac{4}{t} = 4 - t$

$4 = 4t - t^2$



$\frac{\pi}{2} + x - y = 2$

$\sin(x) + \cos y = 0$

$\sin x + \sin(x - \frac{\pi}{2})$

$\sin(x) + \sin(\frac{\pi}{2} - y) = 0$

$a = -3$

$b = 2$

$\frac{x+y}{2} =$

$x + y \ne \pi(2k+1)$

$2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x + y - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$= 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin x + \cos y = 0.$

$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0.$

$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2} = \pi n$; $\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n - \frac{\pi}{2}$

$\pi(2n - \frac{1}{2}) = x - y$

$\frac{x+y}{2} = \pi n - \frac{\pi}{4}$

$x + y = \pi(2n - \frac{1}{2})$

$x - y = \pi(2n - \frac{1}{2})$

$2x = \pi(2n - \frac{1}{2})$

$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 2(9+36) \end{cases}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}$

$b = 9a$

$\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\frac{b}{a} = 9$

$9a^2 + b^2 = 2 \cdot 45$

$9a^2 + 81a^2 = 90$

$a^2 = 1$

$a = 1$

$a = -1$

$\sqrt{\frac{b}{a}} =$

$b = 9a$

$3a = 3a$

1, 9

−1, −9

2. Ответ: 2, 15.

2. $\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 2(9+36) \end{cases}$

$9a^2 + b^2 = 2(9+36)$

$y - 6x = \sqrt{ab}$

$x = a + 1$

$y = b + 6$

$b + 6 - 6a - 6$

$b - 6a = \sqrt{ab}$

$9a^2 + b^2 = 2(9+36).$

$9 + 36 - 12 - 72 = 45$

$9 + 36 - 28 - 72 = 45$

$9a = 0$

$\sqrt{\frac{b}{a}} - 6\sqrt{\frac{a}{b}} = 1$

$x - \frac{6}{x} = 1$

$x^2 - x - 6 = 0$

$1 = 3 - 2$

$(x-3)$

$x = 3$

$x = -2$

1, 9.

$x = 3$

$y = 6$

3

$9 + 36$

$x = abc$

$x < y$

Ам

2. Ответ: (2, 15); 15

$x \neq y$

3. $y^{\log_5 - 12} + y \geq \cancel{\log^5} y^{\log_5 13}$

$12 + 5 \geq 13$

5^{-n}

$12n + 5^{-n} \geq 13n$

$n = 5^{-n}$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$y^{\log_5 12} + y - 13^{\log_5 y} \geq 0$

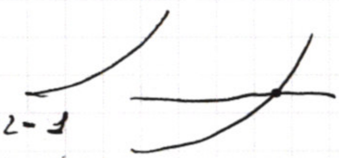
$13^{\log_5 y} = 5^{\log_5 13 \cdot \log_5 y} = y^{\log_5 13}$

$y^{\log_5 12} - y^{\log_5 13} + y \geq 0.$

$y^{\log_5 13} \leq y^{\log_5 12} + y$ $\quad$ $y\ \cancel{lo}$ $\quad$ y $\quad$ $x - y + \frac{\pi}{2} = 2\pi n$

$\cancel{y_5^{13} + y} \geq$

0



$y^{\log_5 13} + y \geq y^{\log_5 12}$ $\quad$ $\log_5 12\, y^{\log_5 12 - 1}$

$y^{\log_5 12} + y \geq y^{\log_5 13}$

$y = 0$ $\quad$ $26x - x^2 \geq 0.$

$y \geq 0.$ $\quad$ $x \in [0, 26].$ $\quad$ $26 \cdot 13 - 13^2 = y^{\log_5 12} + y \geq y^{\log_5 13}$

$26x - x^2 = 5$ $\quad$ $= 13 \cdot (26 - 13) = 169$ $\quad$ 13 $\quad$ $y^{\alpha} + y \geq y^{\beta}$

$\cancel{x^2 - 66}$ $\quad$ $x^2 - 26x + 5 = 0.$

$\frac{13 \pm \sqrt{169 - 20}}{2}$ $\quad$ $\alpha y^{\alpha - 1} + 1 \geq \beta y^{\beta - 1}$

$\frac{13 \pm \sqrt{149}}{2}$ $\quad$ $\alpha y^{\alpha - 1}$ $\quad$ $\beta y^{\beta - 1} + \alpha y^{\alpha - 1} - 1 \geq 0$

$\frac{13 \pm 12}{2}$ $\quad$ $\sin x + \cos y = 0$ $\quad$ $\beta > \alpha$

$\sin x - \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$ $\quad$ $\beta + \alpha = 2$

$y \in [0;$

1. $9x = 2k + 1f$

$y = 2f$

$\sin \alpha = \sin \beta$

$\sin(\alpha) - \sin \beta = 0.$

$\sin x + \cos y = 0$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\cos y = -\sin x$ $\quad$ $2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0$

$\sin(x + y) + \sin(x - y) = -\frac{2}{17}$ $\quad$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ $\quad$ $\frac{\alpha - \beta}{2} =$

$\sin x \cos y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $(-1)^n \arcsin y + \pi n = (-1)^m \arcsin y + \pi m$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\frac{\alpha - \beta}{2} = \pi m$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\alpha - \beta = 2\pi m$

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi m + \frac{\pi}{2}$

$\alpha + \beta = \pi(2m + 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $2\alpha+2\beta=x$

$2\beta=y$

$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x+y)+\sin(x-y)=-\frac{2}{17}$

$2\sin x\cos y=-\frac{2}{17}$

$\cos y=-\frac{2}{17}$

$\frac{}{2\sin x}=\frac{-\frac{2}{17}}{-\frac{2}{\sqrt{17}}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}=-\sin$

$\cos y=-\sin x$

$\sin x+\cos y=0.$

$r_2=r_1^{\frac{m}{n}}$

$f(r_2)=f(r_1)\cdot\frac{m}{n}$

$f(1)=0$

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=0.$

$f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(q^{\frac{m}{n}})$ $f(r)=\sum_{p|m}[p/4]-\sum_{p|n}[p/4]$.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

x^2-26x

$y^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5 y}$

$|y|^{\log_5}$

3. ОДЗ:

$26x-x^2>0$ $x\in(0,26)$.

$0, 26$

$26x-x^2{}^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)}\geq0$

$y^{\log_5 12}+y-13^{\log_5 y}\geq0.$

2. $y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+1=$

$(3x-3)^2$

$9x^2-18x+9=$

$=9(x^2-2x+1)=9(x-1)^2$

$y^2-12y+36=$

$=(y-6)^2$

$f(1\cdot a)=f(1)+f(a)$

$f(1)=0.$

$f(q^n)=nf(q).$

$q^{\frac{m}{n}}=p$

$q^m=p^n$

$f(q^{\frac{m}{n}})$

$f(p)$

$f(p^n)=f(q^m).$

$nf(p)=mf(q)$

$f(p)=\frac{m}{n}f(q)$

$f(q^{\frac{m}{n}})$

$y=5$

$12+5-13$

$y=1$

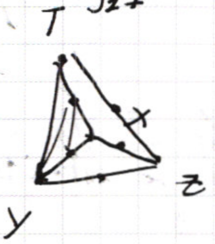
$1+1-1\geq0.$

1. $\sin x \neq -\frac{1}{\sqrt{17}}$ 4.

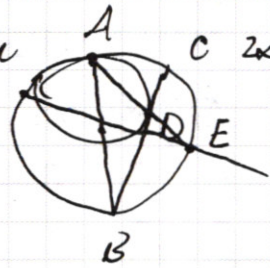
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $2\alpha+2\beta-\frac{\pi}{2} = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cancel{\sin}\ 2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$



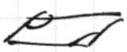
$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

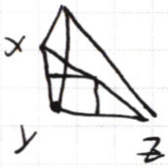


$2\alpha - \frac{\pi}{2} = \cancel{\arccos}\ 2\pi k$

$\alpha = (\pi + \frac{1}{4})k$

$\frac{\pi k}{4} +$





$\alpha + \alpha =$

$2\alpha = $

$\frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

2. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $x - y = \pi(2n+1) - 1$

6. $\frac{2}{t-2} - 2$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$7z - 10z + 28$ $\frac{2}{t-2} - 2 = a't + b$ $\frac{2}{t-2} - 2 = a't + b$

$\sin(2\alpha)$

$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\frac{2}{t-2} = b + 2 + a't$ $\frac{2}{t-2} = a't + b + 2$

$2\alpha + 2\beta =$ $\frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\frac{2}{t-2} - 2;\ 2t^2 - 17t + 28$ $2 = a't(t-2) + b + 2$

$6a' + b = -2$ $(t-2)$

$-1+4$

$\frac{\pi}{2} - 2(\alpha+\beta) = \pm\arccos 1$

$2 = a't^2 - 2a't + (b+2)t - 2b - 4$

$\frac{=1 \pm 4}{\pm 4 + 1}$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ $a't^2 + (b+2-2a')t - 2b - 4 = 0$

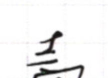
$\cos(2\alpha + 2\beta + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\frac{\pi}{2} +$ $(b+2-2a')^2 + 8(b+2) = 0.$

$2\alpha + 2\beta + \frac{\pi}{2} = \pm\arccos(\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n$ $2\alpha + 2\beta = x$ $\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \pm\arccos(\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n$ $2\beta = y$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\beta = 2\alpha + 2\beta + \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\frac{-1 \pm 4}{\sqrt{17}}$ $\sin x + \cos y = 0.$



$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\frac{\pm 4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\operatorname{tg}(\frac{x-y}{2})$

$2\alpha + \frac{\pi}{2} = \pm 2\arccos(\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n$ $\operatorname{tg}(\frac{x-y}{2}) = \frac{2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})}{2\cos(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})}$

$\alpha = \pm\arccos(\frac{1}{\sqrt{17}}) + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}$ $x + y \neq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin y = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\frac{-1 \pm 4}{\sqrt{17}}$ $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. 4 5 6 7 8 9 10, 11, 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 0 4 0 4 1 1

22 23 24 25 26 27 28

2 5 0 2 3 0 1

24, 39 47 61 75, 83, 88, 100, 103, 109, 115, 124, 125, 133, 134, 138, 142, 144, 147, 148, 149.

5: Ответ: 149.

9 − 0 $\quad 8+3+2+2+1 = 10+3+3 = 16 \cdot 9 = 144$

8) − 1 $\quad 3+2+2+1 = 8 \quad 8 = 64 \mid 208$

3) − 2 $\quad 2+2+1 = 5 \cdot 3 = 15 \mid \cancel{218}\ 223$

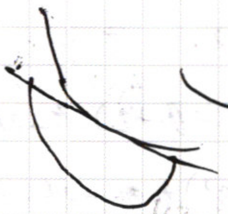
2) − 3 $\quad 2 \cdot 3 = 6 \mid 229$

2) − 4 $\quad 2 \cdot 1 = 2 \mid 231$

2) − 5 $\quad 1 \cdot 0 = 0 \mid 231$. Ответ: 231.

3. $y^{\log_5 25}$

3.



$26x - x^2 \geq 25$

$x^2 - 26x + 25 \leq 0$

25, 1

$169 - 144 = 25$

$-\infty, 1$

$x \geq 2$

$y \geq 25$

y

$13^x - 12^x \geq 5^x$

3. $y^{\log_5 12} + y \geq y^{\log_5 13}$

$y > 0.$

$y^{\log_5 12 - 1}$

$y^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq y^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$\log_5 \frac{13}{5} \quad \log_5 \frac{12}{5}$

$y^{\alpha} + 1 \geq y^{\beta} \quad y^{\beta} - y^{\alpha} \geq 1$

$y \quad - y \quad \geq 1$

$\beta y^{\beta-1} - \alpha y^{\alpha-1} \geq 0.$

$y = 5^x$

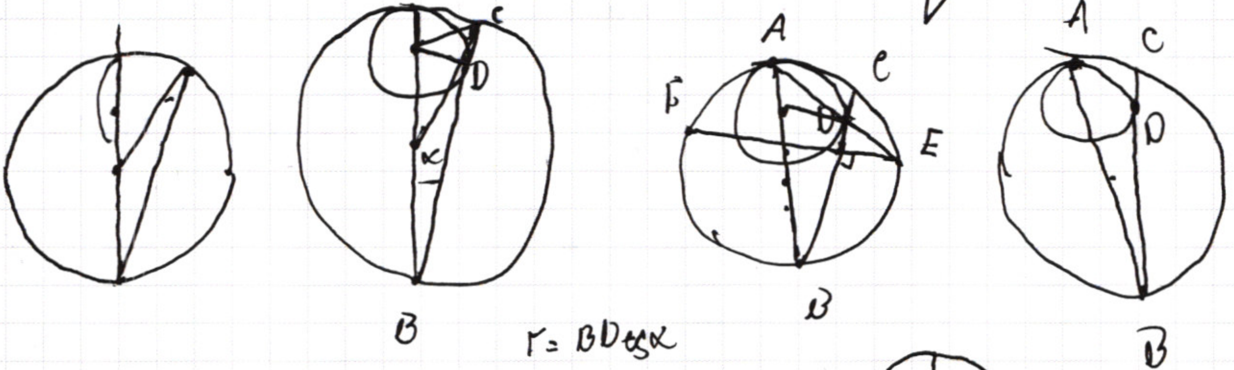
$\beta > \alpha \quad y^{\beta-1}$

$\frac{13}{5}^x - \frac{12}{5}^x \geq 1$

Ответ: $(0, 1] \cup [25, 26)$.

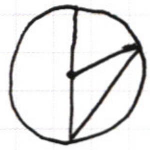
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$r = BD\,tg\alpha$

$2R = \frac{BD}{\cos\alpha} + \frac{BD\sin\alpha}{\cos\alpha} =$



$= \frac{BD}{2}\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$R =$

6. $\frac{2}{t-2}$

$\frac{2}{t-2} - 2 \geq at + b$

$\frac{2}{t-2} \geq at + b + 2$

$289 - 240$

49

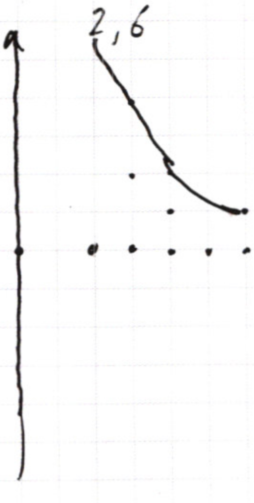
$(t-2)$

$2 < t \leq 6$

$0 < t-2 \leq 4$

$2 \geq at^2 - 2at + (b+2)t - 2(b+2)$

at^2



$\frac{2}{t-2} - 2 \geq at + b \geq 2t^2 - 17t + 28$

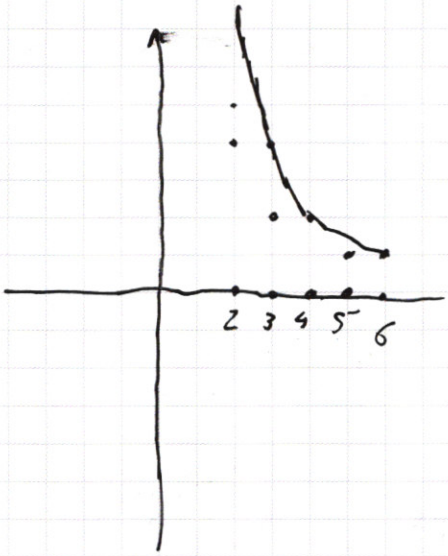
$\frac{17 \pm 7}{4}$ $\frac{24}{4} = 6$

$\frac{21}{t-2} \geq a't + b' \geq 2t^2 - 17t + 30$

$2,5$ $\frac{17+7}{4}$

$\frac{5}{2}$;

$4 \geq a't$



$\frac{4}{t}$ $2(t+2)^2-17(t+2)+30.$

$\frac{10}{4}$ $\frac{24}{4}$ $2t^2+8t+8-17t-34+30$

2,5, 6 $2t^2$

0,5, 4

4,5 2

$2t^2-\cancel{9}t+4$

$2t^2-9t+4$

(0, 4]

$\frac{4}{t} \geq a'x+b' \geq 2t^2-9t+4.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА