МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________
Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$xy-6x-y+6\ge 0$

$(x-1)(y-6)\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1,\ y\ge 6 \\ x\le 1,\ y\le 6 \end{array}\right.$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$ $\quad y-6x\ge 0 \to y\ge 6x\ (*)$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-(13x-1)y+36x^2+6x-6=0.$

$y=\frac{13x-1\pm\sqrt{169x^2-26x+1-144x^2-24x+24}}{2}=\frac{13x-1\pm\sqrt{25x^2-50x+25}}{2}=\frac{13x-1\pm(5x-5)}{2}=\left[\begin{array}{l} 4x+2\ (1) \\ 9x-3\ (2) \end{array}\right.$

1: $y=4x+2.$ $\quad (*)\!:\ \left\{\begin{array}{l} y\ge 6x \\ y=4x+2 \end{array}\right. \to 4x+2\ge 6x \to x\le 1$

↓(подст. во 2 ур-е)

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24=45$

$25x^2-50x-65=0$

$5x^2-10x-13=0$

$x=\frac{10\pm\sqrt{100+260}}{10}=1\pm 0.6\sqrt{10} \to x=1-0.6\sqrt{10},\ y=4x+2=6-2.4\sqrt{10}$

2: $y=9x-3.$ $\quad (*)\ \left\{\begin{array}{l} y\ge 6x \\ y=9x-3 \end{array}\right. \to 9x-3\ge 6x \to x\le -1$

↓(подст. во 2 ур-е)

$9x^2+81x^2-54x+9-18x-108x+36=45$

$90x^2-180x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0\ \times \\ x=2\ \times \end{array}\right.$

Ответ $\{1-0.6\sqrt{10},\ 6-2.4\sqrt{10}\}$

№3

$\log_5(26x-x^2) \Rightarrow 26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;26)\ (*)$

П $A=26x-x^2 \Rightarrow A$ всегда полож.

~~$(-A)^{\log_5 12}+A\ge 13^{\log_5 A}$~~

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)} \Leftrightarrow A^{\log_5 12}+A\ge 13^{\log_5 A}$

$A=5^{\log_5 A} \Rightarrow 5^{\log_5 A\cdot\log_5 12}+5^{\log_5 A}\ge 13^{\log_5 A} \Leftrightarrow 5^{\log_5 A}\left(5^{(\log_5 12)}+1\right)\ge 13^{\log_5 A}$

$$5^{(\log_5(12))}+1\geq\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 A}$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_5 A\leq\log_{\frac{13}{5}}\left(5^{\log_5 12}+1\right)=\log_{\frac{13}{5}}(12+1)=\log_{\frac{13}{5}}13=\frac{\log_{13}13}{\log_{13}\frac{13}{5}}=\frac{1}{\log_{13}13-\log_{13}5}=\frac{1}{1-\log_{13}5}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\leq 5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}$$

$$26x-x^2\leq 5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}$$

$$x^2-26x+5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}\geq 0\longrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)\\ (*)\Rightarrow x\in(0;26).\end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{676-4\cdot5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}}}{2}\rightarrow$$

$$\cancel{x_2}\ \sqrt{676-4\cdot5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}}<\sqrt{676}=26\Rightarrow x_2<\frac{26+26}{2}=26$$

$$x_1>\frac{26-26}{2}=0$$

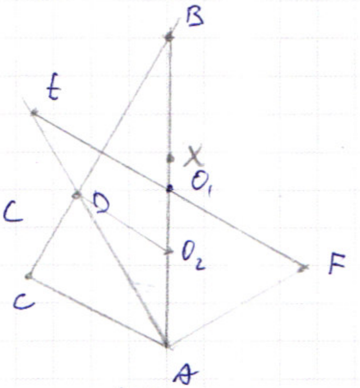
Ответ: $\left(0;\frac{26-\sqrt{676-4\cdot5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}}}{2}\right]\cup\left[\frac{26+\sqrt{676-4\cdot5^{\frac{1}{1-\log_{13}5}}}}{2};26\right)$

$\boxed{№4}$

$\exists$ O_1 - центр Ω, O_2 - центр ω, R-радиус Ω, r-радиус ω

AB - диам $\Rightarrow\angle ACB=90°$. A - т. касания Ω и $\omega\Rightarrow O_1, O_2\in AB$

т.к. D - точ. касания, $O_2D\perp BC\Rightarrow O_2D\parallel AC\parallel EF$



$O_2D=O_2A\Rightarrow\angle O_2DA=\angle O_2AD$

$\parallel$ (т.к. $O_2D\parallel AC$) $\Rightarrow AD$ - бисс. $\angle BAC\Rightarrow E$ - сер. $\smile BEC$

$\angle CAD$

$\Rightarrow EF$ - сер. пер. к $BC\Rightarrow O_1\in EF$ $(EF=2R)$ $\Rightarrow\angle EAF=90°$

AD - бисс. $\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BD}\Rightarrow\sqrt{\frac{4R^2-(12+13)^2}{4R^2}}=\frac{12}{13}\Rightarrow 1-\frac{625}{4R^2}=\frac{144}{169}\Rightarrow 4R^2=\frac{625}{\frac{25}{169}}=25\cdot169\Rightarrow$

$(AB=2R,\ AC=\sqrt{AB^2-BC^2},$

$\Rightarrow \underline{R=\cancel{\frac{65}{4}}=\frac{65}{2}}$

$\exists X$ - втор. т. перес. ω с $AB\Rightarrow BX=\cancel{4}\ 2R-2r$, ~~$BA=2R$~~.

$\Rightarrow BD^2=BX\cdot BA$

$\Rightarrow BD^2=4(R^2-Rr)\Rightarrow$ ~~$r=\frac{BD^2}{4}$~~$=R$ $\quad\underline{r}=\frac{R^2-\frac{BD^2}{4}}{R}=\frac{\frac{65^2}{4}-\frac{13^2}{4}}{\frac{65}{2}}=13^2\frac{\frac{5^2}{2}-\frac{1}{2}}{65}=13\left(\frac{24}{10}\right)=13\cdot2.4$

$\underline{=31.2}$

~~$\angle EAF$~~ $=\underline{\angle AFE}=90°-\angle AEF\overset{(EF\parallel AC)}{=}\angle 90°-\angle EAC=\underline{\angle CDA}$

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4R^2-25^2}=\sqrt{65^2-25^2}=\sqrt{3600}=60$, (т.к. $\angle DCA=90°$) $\overset{tg}{\cancel{\sin}}\angle CDA=\frac{CD}{AD}=\frac{1}{5}$ $\Rightarrow\underline{\angle AFE=\text{arctg}\frac{1}{5}}$

$$\begin{cases}tg\angle CDA=\frac{\sin\angle CDA}{\cos\angle CDA}=\frac{1}{5}\\ \sin^2\angle CDA+\cos^2\angle CDA=1\end{cases}\Rightarrow$$ ~~$\sin^2\angle CDA=\frac{\cos^2\angle CDA}{25}$~~ $\cos^2\angle CDA=25\sin^2\angle CDA$

$\sin^2\angle CDA=\frac{1}{26}\Rightarrow\cos^2\angle CDA=\frac{25}{26}$. $S_{AEF}=\frac{AE\cdot AF}{2}=\frac{4R^2\sin\angle AEF\cos\angle AEF}{2}=$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 2R^2 \cdot \frac{5}{26} = \frac{65^2}{8} \cdot \frac{5}{26} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 13}{4} = \frac{2575}{4}$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$, $r = 31.2$, $\angle AEF = \operatorname{artg} \frac{1}{5}$, $S_{AEF} = \frac{2575}{4}$

$\boxed{№5}$

Пусть a и $b \in \mathbb{N}$. $f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b}) = f(a) - f(b)$

$f(b) = f(b^2) + f(\frac{1}{b}) \Rightarrow f(\frac{1}{b}) = f(b) - f(b^2) = f(b) - f(b) - f(b) = -f(b)$

$f(\frac{a}{b}) < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow$ Нам лишь надо найти пары натур. x и y, что $f(x) < f(y)$ $(4 \le x, y \le 28)$

Заметим, что все пары x и y можно разделить на 3 группы,
1) $f(x) < f(y)$ (S_1)
2) $f(x) = f(y)$ (S_2)
3) $f(x) > f(y)$ (S_3)

Любой паре из 1 гр. можно однозначно сопоставить пару из 3 гр. (в ней x и y поменяны местами). Общее число пар x и $y = (28-4+1)(28-4+1) = 625$.
Т.е. в гр. 1 столько же, сколько и в гр. 2, $|S_1| = |S_3|$

Найдем $f(a)$ для $a \in \mathbb{N}$, $a \in [4; 28]$. $f(1) = f(2) = f(3) = 0$

a	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f(a)	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1

	21	22	23	24	25	26	27	28
…	1	2	5	0	2	3	0	1

9 чисел дающих 0, среди них ~~разл. пар = 36~~ $9 \cdot 9$ пар $= 81$

8 чисел дающих 1, среди них ~~$\frac{8 \cdot 7}{2}$ разл. пар = 28~~ $8 \cdot 8$ пар $= 64$

3 чисел дающих 2, среди ~~них $\frac{3 \cdot 2}{2}$ пар = 3 пар~~ $3 \cdot 3$ пар $= 9$

2 чисел дающих 3, среди них ~~1 пара~~ $2 \cdot 2 = 4$ пар

2 чисел дающ. 4, среди них ~~1 пара~~ $2 \cdot 2 = 4$ пар

1 чисел дающ 5, среди них 1 пара

$\Rightarrow |S_2| = 81 + 64 + 9 + 4 + 4 + 1 = 163$

$\begin{cases} |S_1| = |S_3| \\ |S_1| + |S_2| + |S_3| = 625 \end{cases} \Rightarrow |S_1| = \frac{625 - |S_2|}{2} = \frac{462}{2} = \underline{231}$

Ответ: 231

№6

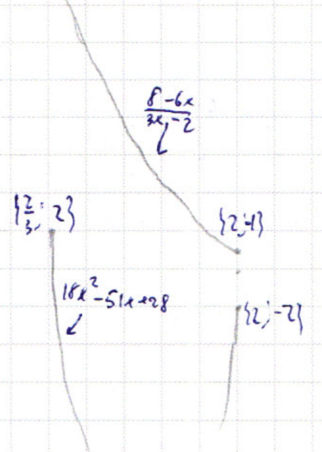
$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$$ ~~<~~

Заметим, что $ax+b$ – отрезок (с выколотой точкой), с концами в коорд. $\frac{2}{3}a+b$ (выколото
$x \in [\frac{2}{3};2]$

$\{\frac{2}{3}; \frac{2}{3}a+b\}$ (выколотая) и $\{2; 2a+b\}$

~~Пусть даны a_0, b_0~~

На данном отрезке чертёж выглядит подобным образом



Выберем $y_0 \in [-2;-1)$, и $y_1 \in [2;+\infty)$.

Заметим, что $y_0 \notin 18x^2-51x+28$, как и y_0
(на ~~отрез~~ полуинтерв. $[\frac{2}{3};2]$),

Также $18x^2-51x+28$ – выпуклая вниз функция, т.е. если y_0 и $y_1 \notin$ ей, то она не пересечет отрезок $\{\frac{2}{3};y_1\} - \{2;y_0\}$.

Также $y_0 \notin$ гиперболе, Посмотрим, пересечёт ли отрезок её при данных y_0 и y_1

Восстановим ур-е отрезка: $\begin{cases} \frac{2}{3}a+b=y_1 \Rightarrow \frac{2}{3}a+y_0-2a=y_1 \Rightarrow a=\frac{y_1-y_0}{\frac{2}{3}-2} \\ 2a+b=y_0 \Rightarrow b=y_0-2a \end{cases}$, $b=y_0-2a=$
$=y_0-\frac{y_1-y_0}{\frac{4}{3}-4}=\frac{\frac{4}{3}y_0-4y_0+y_1-y_0}{\frac{4}{3}-4}$

$=\frac{y_1-(5-\frac{4}{3})y_0}{\frac{4}{3}-4}$. Если $g(x)=\frac{y_1-y_0}{\frac{2}{3}-2}x+\frac{y_1-(5-\frac{4}{3})y_0}{\frac{4}{3}-4}$ не пересекает гиперболу в ≥2 точках, то нер-во не выполнится, иначе выполнится.

№7

Пусть A – сер. XY, B – сер. XT, C – сер. TZ, D – сер. YZ, E – сер. XZ.

AB – ср. лин. $XYT \Rightarrow AB \parallel YT$, $AB=\frac{YT}{2}$, CD – ср. лин. $ZYT \Rightarrow CD \parallel YT$, $CD=\frac{YT}{2}$

$\Rightarrow ABCD$ – паралл. (в т.ч. лежит в одн. плоскости)

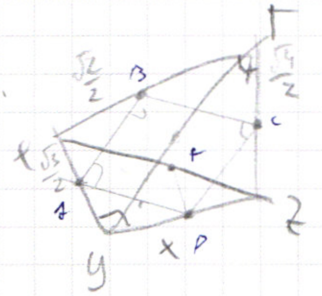
$ABCD$ лежит на сфере $\Rightarrow$ она лежит на сеч. сферы – окр-ти $\Rightarrow ABCD$ – впис. $\Rightarrow ABCD$ – прям.

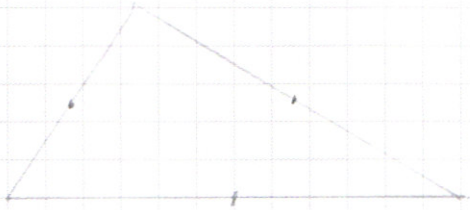
$\Rightarrow YT \perp XZ$.

$AEDY$ лежит в плоскости XYZ и $AE \parallel YZ$ (ср. линия) и $DE \parallel XY$ (ср. лин) $\Rightarrow AEDY$ – паралл.

т.к. они лежат на сфере, $AEDY$ – прям. $\Rightarrow \angle XYZ = 90°$.

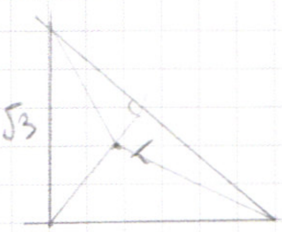
$\frac{8-6x}{3x-2}$ $r = \frac{2}{3}$





~~$\angle(XYZ, TY)$~~ $\sqrt{\frac{3}{4}+x^2} = \frac{XZ}{2}$

$XZ = 2 + 4 - 4\sqrt{2}\cos\varphi$



$6 - 2.4\sqrt{10} - 6 + 3.6\sqrt{10}$

$1.2\sqrt{10} = \sqrt{}$

$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28$

$8 - 34 + 28 = 2$

$18 \cdot 4 - 102 + 28 = -2$

$\frac{8-12}{6-2}$ -1

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$A = 26x - x^2 > 0 \to x \in (0;26)$

$A^{\log_5 12} + A \geq 13^{\log_5 A}$ $\cdot A$

~~$5(A^{\log_5 12}) + 5A \geq A \cdot 13^{\log_5 A}$~~

$A^{\log_5 12+1} + A^2 \geq 25^{\log_5 A}$ $y = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$A^{(\log_5 12)-1} + 1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 A}$

$A^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq 51^2$

$5^{\log_5 12 \cdot \log_5 A} + 5^{\log_5 A} \geq 13^{\log_5 A}$

$5^{xy} + 5^y \geq 13^y$

$5^y(5^{x-1}+1) \geq 13^y$

$\left(\frac{13}{5}\right)^y \leq 5^x + 1$

$\frac{65^2 - 25^2}{65^2}$

$\left(\frac{13}{5}\right)^y = 5^x + 1$

$y = \log_{\frac{13}{5}} 5^x + 1$ $\frac{40 \cdot 40}{65^2}$ $\frac{3600}{65^2}$

$= \frac{60}{65}$

81
64

$\log_5 A \leq \log_{\frac{13}{5}} 5^{\log_5 12} = \log_{\frac{13}{5}} 12$

$\log_5 \frac{60}{65}$ 25

$A \leq 5^{\log_{\frac{13}{5}} 12}$

$\log_5 A \leq B$

$\log_5$

4 · 18 · 28

51
51
51
$\log_2 a$ 295

$2^{\log_2 a} = a$

2601 − 2016

$A = 5^{\log_5 A}$

$1 = \log_a a$ $x = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$x^2 = 25y^2$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$ ~~$f(0) = f(a) + f(0)$~~ f0

$x^2 + y^2 = 1$

$2^{\log_2 8} = 8$

585 | 5
117 | 3
39 | 3
13 | 13

$f(a) = f(a) + f(1)$

$26y^2 = 1$ $2^x = 8$

$y = \frac{1}{\sqrt{26}}$ $x = 10$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$

2500 + 25

$2^0 = 1$

13
25
52
26
312

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} f(a) + f(b^2) - f(b)^2$

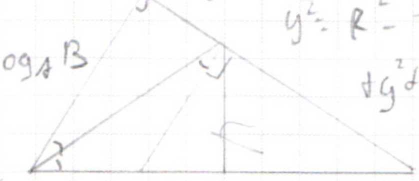
$= f(a) + f(b)$

$A^x \leq B$

$x = \log_A B$

$y^2 = R^2 - 2Rr$

$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$



26
26

156
52

$r = \frac{R^2 - y^2}{2R} = \frac{13 \cdot \frac{4}{25} - 13^2}{\frac{4}{5}\sqrt{13}} =$

$\left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} = 6$

$\sqrt{13} \cdot \frac{\frac{4}{25} \cdot 13}{\frac{4}{5}}$

$A^x = B$ 676

$1 < \log_{\frac{13}{5}} 12 \geq 1$ C 2

$\log_{\frac{13}{5}} 12 - 1 = \log_A B$

$A >$

$x = \log_{\frac{A}{13}} C \to \left(\frac{A}{13}\right)^x = C$

$\sqrt{(x+y)^2}$

$5^B \geq A y^2 (4R^2 - x^2 - 2xy - y^2) = 4R^2 x^2$

145 154 168 162

81 + 64 + 9 + 4 + 4 + 1

$4R^2(y^2 - x^2) - y^2x^2 - 2xy^3 - y^4 = 0$

$= \frac{\ln C}{\ln A - \ln B}$

$\frac{\sqrt{4R^2 - (x+y)^2}}{2R} = \frac{x}{y}$

112
18
896

7	1	2	1 13 4	5	6	7	8
0	0	0	2816 0	1	0	1	0

$f(15) = f(25) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = f(15) - f(25) = -1$

112
18
896

$AFE = 90 - \alpha$

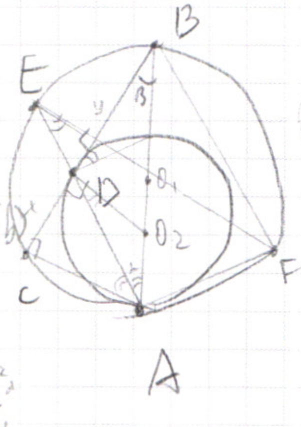
112
2016

$\sin 2\alpha = \frac{x+y}{2R}$

$BD^2 = (BO_2 - r)(BO_2 + r)$

$BD^2 = BO_2^2 - r^2$

$AF \cdot AC = 4R^2 \sin\alpha \cos\alpha$



$\boxed{R = \sqrt{13} \cdot \frac{2}{5}}$

$\frac{25^2}{4R^2} = \frac{1}{13}$

$\frac{5}{2R} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$y^2 = (R - 2r)R$

$1 - \frac{(x+y)^2}{4R^2} = \frac{x}{y}$

$1 - \frac{25^2}{4R^2} = \frac{12}{13}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$ $\qquad \log_2 8 = 3$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\qquad 2^3 = 8$

$2^{\log_2 a} = a$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\sin^2}$ $\qquad \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$= \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + (\pm\frac{4}{\sqrt{17}})\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$A = x^2-26x$ $\qquad (2-k)^{\log_2 a} = a - k^{\log_2 a}$

$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$ $\qquad A^{\log_5 12} \geq A + 13^{\log_5 A}$ $\qquad A<0$

$9x^2-18x+9$ $\qquad (x-1)(y-6)\geq 0$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x\geq 1,\ y\leq 6 \\ x\leq 1,\ y\geq 6 \end{array}\right.$ $\qquad x^2-26x<0$ $\qquad x\in(0;26)$ $\qquad 37\cdot 3$

$y^2-12y+36$ $\qquad |A| \quad (-A)^{\log_5 12} \geq A + 13^{\log_5 A}$

$$\begin{array}{r} \times\ 324 \\ 73 \\ \hline 972 \\ +\ 2268 \\ \hline 23652 \end{array}$$

$y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$ $\qquad (-A)(-A)^{\log_5 12-1}$

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$ $\qquad (-A)((-A)^{\log_5 12-1}+1)\geq$ $\geq 13^{\log_5 A}$

$$\begin{array}{r|l} 23976 & 3 \\ 7992 & 3 \\ 2664 & 3 \\ 888 & 3 \\ 296 & 8 \\ 37 & 37 \end{array}$$

13 $\quad 23652/81$ $\quad 32423$ $\quad 384$ $\quad 5913$

$y = \frac{13x+1\pm\sqrt{169x^2+26x+1-144x^2-24x+24}}{2}$

$= \frac{13x+1\pm\sqrt{25x^2-50x+25}}{2} = \frac{13x+1\pm 5\sqrt{x^2-2x+1}}{2} = \frac{13x+1\pm 5(x-1)}{2}$

1) $y = 13x+1+5x-5 = 18x-4$ $\qquad x\geq 1\to$ $\quad 18x-4\geq 14$ $\qquad x\leq 1\to$ $\quad 18x-4\leq 14$

$y\in(6;14)$, $x\leq 1$

2) $y = 13x+1-5x+5 = 8x+6$ $\qquad x\geq 1\to$ $\quad \geq 14$ $\qquad x\leq 1\to$ $\quad \leq 14$

$9x^2+64x^2 + ~~96x~~ + 36 - 18x - ~~96x~~ - 72 = 45$ $\qquad 4\cdot 81 = 324$

$73x^2-18x-81=0$ $\qquad x = \frac{18\pm\sqrt{324+23652}}{146}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)