МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\cancel{\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$; $\cancel{\sin(x+2y)+\sin x = -\frac{8}{17}}$

$\cancel{tg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}}$

$x \geq 1 \Rightarrow 3y \geq 2.$

$\cancel{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$y \geq \frac{2}{3}$

$x<1$ $\quad y \leq \frac{2}{3}$

$\cancel{\sin x+\sin x\cdot\cos 2y+\sin 2y\cdot\cos x = -\frac{8}{17}}$

$\cancel{\sin x(1+\cos 2y)+\sin 2y\cdot\cos x = -\frac{8}{17}}$

$y \in \forall$

$\Uparrow$

$x=1$

$\cancel{\frac{tg x\cdot}{tg y} = -\frac{8}{17\cdot\sin 2y\cdot\cos x}}$

$3y(x-1) \geq 2(x-1)$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y \geq 2x \quad y \geq \frac{2}{3}x$

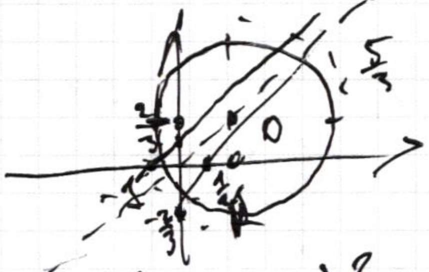
$3xy+2 \geq 2x+3y$

$$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2-3+\left(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{4}{3}=4$$

$$(x-1)^2-1+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12+4+9}{9}=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$$



$$(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)$$

$$\frac{(3y-2x)^2}{(x-1)(3y-2)}=1$$

$$\big((3y-2)-(2x-2)\big)^2=(x-1)(3y-2)$$

$$(3y-2)^2+4(x-1)^2=5(x-1)(3y-2)$$

$$(3y-2)(3y-2-x+1)+4(x-1)(x-1-3y+2)=0.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

α и β $\quad \cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$tg\alpha \to$ з знач.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+$
$+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$-\cos 2\beta\pm\sin 2\beta\cdot 4+\sin 2\alpha=-\frac{8}{\sqrt{17}}$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}$

$\frac{1}{tg\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}=$
$=\frac{\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(3y-2-x+1)(3y-2\cancel{3}-4x+4)=0.$$

$$(3y-x-1)(3y-4x+2)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}3y-x=1.\\ 3y-4x=-2\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}y=\frac{x+1}{3}\\ y=\frac{4x-2}{3}\end{array}\right.$$

$$y \geq \frac{2}{3}x$$

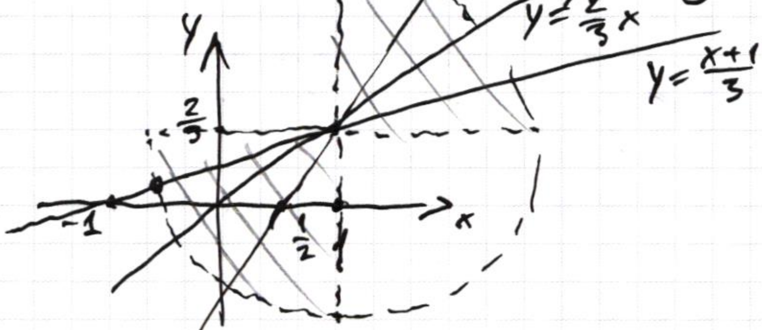
$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow x = \cancel{3}\ 1$$

$$\Downarrow$$

$$y=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$x=1 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$



$$y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}.$$

$$\Downarrow$$

$$(x-1)^2+\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$(3x-3)^2+(x-1)^2=5^2$$

$$(x-1)^2(3+1)^2=5^2. \quad x=\frac{9}{4};-\frac{1}{4}.$$

$$(x-1)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad x-1=\pm\frac{5}{4}.$$

если $x = \frac{9}{4} \Rightarrow y \cancel{<} \frac{2}{3}x \Rightarrow$ не подходит.

только $x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$.

$$y = \frac{4x}{3} - \frac{2}{3}$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{4x}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$(x-1)^2 \left(1 + \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$\frac{7}{3}$

$$(x-1)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2.$$

$$x - 1 = \pm\frac{5}{7}.$$

$$x = \frac{12}{7};\ \frac{2}{7}$$

при $x = \frac{2}{7} \Rightarrow y < \frac{2}{3}x$ ∨

~~От.~~ y $x = \frac{12}{7}. \Rightarrow y = \frac{34}{21}$

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{12}{7}; \frac{34}{21}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

Дано:

$CD = \frac{5}{2}$

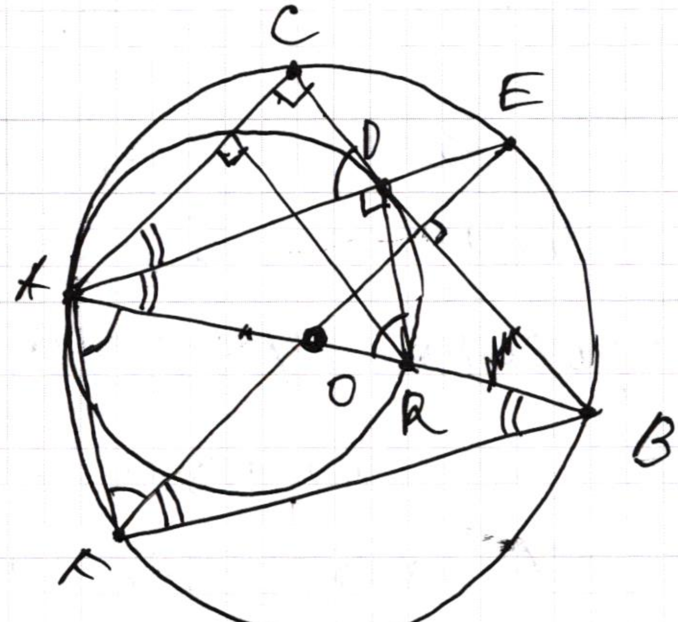
$BD = \frac{13}{2}$.

Найти:

$R_1, R_2 = ?$

$\angle AEF = ?$

$S(AEF) = ?$



Нах-ие:

① $\angle ACB = 90$ (опир. на диам.), также $\angle ADR = 90°$

② $\angle ARD = \angle ADC$ (опир на хорду с касат.).

③ $\angle CAD = \angle DAR$ (т.к. 2 остальн. угла в Δ-ах равны)

⇓

④ AD - бисс в $\Delta CAB \Rightarrow CD : DB = AC : AB$

⇓ Пусть $AC = a$; $AB = b$.

⇓ $\frac{a}{b} = \frac{5}{13}$ $\quad \left(\frac{5+13}{2}\right)^2 + a^2 = b^2$

$9^2 = b^2\left(1 - \frac{25}{169}\right)$ $\quad b^2 = \frac{9^2 \cdot 13^2}{12^2}$

$b = \frac{3 \cdot 13}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_2 = \frac{b}{2} = \frac{39}{8}$ $\quad a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3 \cdot 13}{4} = \frac{15}{4}$

(5) $\triangle ACD \sim \triangle ADR$ (по 3 углам)

$\Downarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AR} \Rightarrow AR = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AC^2+CD^2}{AC} =$

$= \frac{\frac{15^2}{16} + \frac{25}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{15^2+100}{4\cdot 15} = \frac{65}{12}$

$\Downarrow R_1 = \frac{AR}{2} = \frac{65}{24}$

(6) Т.к. AD - бисс $\Rightarrow$ E сер CB $\Rightarrow$ перпендик. из т. E на хорду - это её середина $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF проходит через центр окр. ✓

(7) $\Downarrow \angle FAE = 90°$ (на диам.)

(8) Пусть: $\angle CAD = \alpha \Rightarrow \angle DAR = \alpha \Rightarrow \angle FAO = 90-\alpha$.

$\Downarrow \angle AFO = 90 - \alpha$ (в равноб. $\triangle$ радиусы)

$\angle ADC = 90 - \alpha$ (в прям. $\triangle$-е)

$tg\,\angle ADC = \frac{AC}{CD} = \frac{15\cdot 2}{4\cdot 5} = \frac{3}{2}$

$\Downarrow$ т.к. $\angle ADC = \angle AFE$

$\Downarrow \angle AFE = arctg\,\frac{3}{2}$

(9) $\triangle AFE \sim \triangle CDA$ (по 2-ум углам)

при этом $\underline{AD} : EF = AD : \underline{AB}$ (т.к. диаметры равны)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{\frac{15^2}{16}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}\left(1+\frac{9}{4}\right)}=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$k\ AD:AB=\frac{5\sqrt{13}}{4}:\frac{3\cdot 13}{4}=\frac{5}{3\sqrt{13}}$$

$$S(AFE)=AF\cdot AE=AC\cdot CD\cdot\left(\frac{3\sqrt{13}}{5}\right)^2=\frac{15}{4}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9\cdot 13}{5^2}=$$
$$=\frac{27\cdot 13}{8}$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{5}{3\sqrt{13}}$$

Ответ: $R_1=\frac{65}{24}$; $R_2=\frac{39}{8}$; $\angle AEF=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$;
$S(AFE)=\frac{351}{8}$

$$\begin{array}{r} 27\\ \times 13\\ \hline 81\\ +27\ \\ \hline 351 \end{array}$$

одна из частей нерав. возрастает.
больше чем другая.

для $t = 4 \Rightarrow x^2 + 6x = 4$.

$(x+3)^2 = 13$

$x = \pm\sqrt{13} - 3$

$3 + 4 \geq 5$ ✓

т.к. от $(-6; 0)$ не подх.

$\Downarrow$

$x > 0$.

$\Downarrow$

для $x > 0$ левая часть больше правой $\Rightarrow x \in (0; +\infty)$.

если же $x < -6$.

t убывает

$\Downarrow$

лев $\leq$ прав.

$\Downarrow$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

№3.

Пусть $t = x^2+6x$, $t>0$.

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} + 3^{\log_3 t} \geq 3^{\log_3 t \cdot \log_4 5}$$

$$3^{\log_3 t \cdot \log_4 3} + 3^{\log_3 t} \geq 3^{\log_3 t \cdot \log_4 5}.$$

если $t>4$. $t<4$.

$3+4 \geq 5$.

$0 \to 4$.

$$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$$

t^{x^2+6x} t возр от $-\infty$ до -6 и от 0 до $+\infty$

$+ \quad - \quad +$; $-6 \quad 0$

$-6 \quad 0$

и t ~~всегда~~ возраст, на $x\in(0;+\infty)$

если бы t могло быть равно 0 и убывает на $x\in(-\infty;-6)$

$0+0\geq 0$.

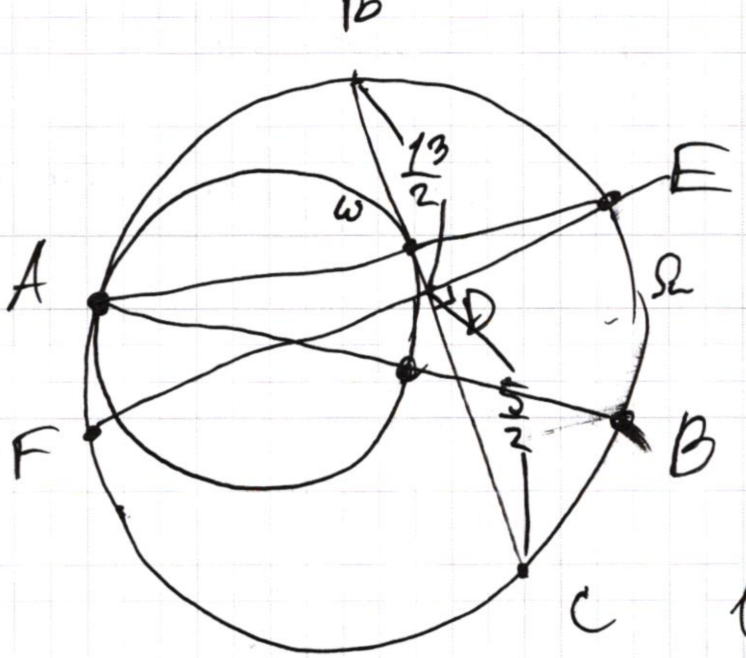
точка равенства, но $t\neq 0$.

$1-\log_4 3 \vee \log_4 5 - 1$.

$\log_4 \frac{3}{4} \vee \log_4 \frac{5}{4}$.

$\frac{3}{4} \overset{<}{\vee} \frac{5}{4}$.

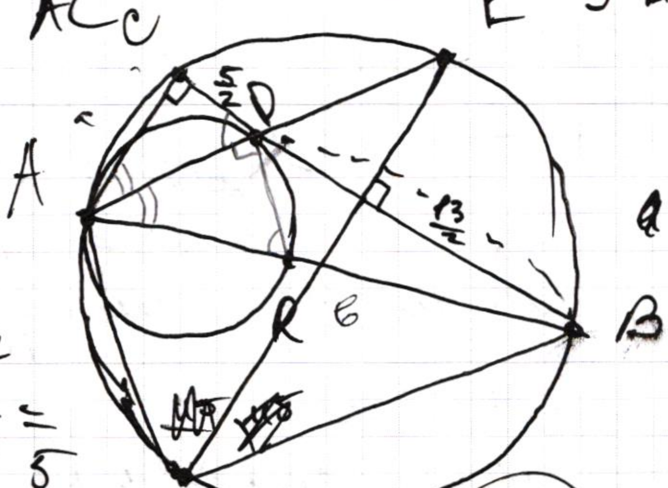
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{(135-x)}{2}$

$180-45$

$\frac{AR}{AD} = \frac{AD}{AC}$



$9^2 + a^2 = b^2$

$\frac{a}{b} = \frac{5}{13}$

$9^2 + b^2\cdot\frac{25}{13^2} = b^2$

169

$9^2 = b^2\left(\frac{12}{13}\right)^2$

$b = \frac{9\cdot 13}{12} = \frac{39}{4} = \frac{13\cdot 3}{2}$

$a = \frac{39}{4}\cdot\frac{5}{13} = \frac{15}{4}$

$AR = \frac{AD^2}{AC} = \frac{13\cdot 25\cdot 4}{16\cdot 15} = \frac{13\cdot 5}{12} = \frac{13\cdot 5}{6\cdot R}$

$\frac{25}{4} + \frac{15^2}{16} = \frac{25}{4}\left(1+\frac{9}{4}\right) = \frac{13\cdot 25}{16} = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$8x-26$

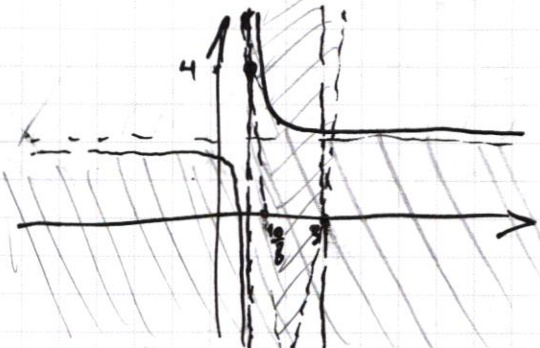
$x \in (1;3]$

$$2+\frac{1}{2x-2} \geq 8x^2-34x+30 \quad (8x-10)(x-3)$$

$2\cdot2\cdot2 \quad 2\cdot2\cdot7$

$$-2+\frac{1}{2x-2} \geq 8x^2-34x+26$$

$$-2+\frac{1}{2x-2} \geq (8x-26)(x-1)$$



$x=1 \Rightarrow$ это асимптота для 1 графика
верт. гиперболы

$x=3 \to$ это точка пересеч. второго графика параболы и нуля

Если $ax+b \geq (8x-10)(x-3)$ $(1;3]$.

и при $x=1$. $(8x-10)(x-3)=4$.

На рисунке видно, что наша область, где ...

жет наход $ax+b$ – это всё, что под правой гиперболой, до $y=4$, где параб пересек. $x=1$.
И все, что над параболой, до $x=3$, а до места, где гипербола находится в коорд $x=3$.

$\frac{4x-3}{2x-2}$, при $x=3$ равна $\frac{9}{4}$

В итоге: $ax+b$ пересекает границу $x=1$ в т. $y=4$ и выше и выйти не ниже, чем $y=0$, в $x=3$.

~~Пуст~~ Рассмотрим вариант, в котором.

$$\begin{cases} 4=a\cdot 1+b & b=4-a. \\ 0=a\cdot 3+b \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$3a=a-4.$$

$$a=-2 \Rightarrow b=6.$$

$$f(x)=-2x+6.,$$

Сравним с гиперб., чтобы проверить, что она не пересек.

$\Downarrow$

$$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2} \quad x\neq 1.$$

$$-4x^2+12x+4x-12=4x-3.$$

$$4x^2-12x+9=0.$$

$$\Downarrow (2x-3)^2=0.$$

касается, такое возможно

Но если подвинуть $ax+b$, то только вверх, т.к. левая граница не ниже 4, а правая не ниже 0.
Но тогда $ax+b$ будет пересек. гиперб $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$a=-2$, $b=6$ – ед. вариант.

Ответ: $a=-2$; $b=6$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4 = a+b$ $\quad b = 4a$

$0 = 3a+b$ $\quad 3a = a-4.$

$2a = -4.$

$a=-2.\ b=6$ $\quad p = z+t.$

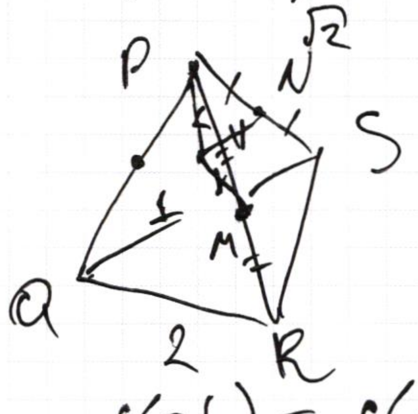
$-2x+6 = \dfrac{4x-3}{2x-2}.$ $\quad x \neq 1.$ $\quad \left[\dfrac{p}{4}\right]_{\sqrt{2}} = \left[\dfrac{z}{4} + \cancel{\dfrac{t}{4}}\right] =$

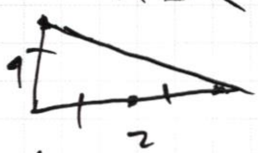
$-4x^2+12x+4x-12 = 4x-3.$ $\quad = \left[\dfrac{z}{4}\right]$

$4x^2-12x+9=0.$

$(2x-3)^2=0.$

RS < 3





$RS = ?$ $\quad MN^2 < 1,5.$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = [p/4] = \dfrac{\cancel{[p]}}{4} = \dfrac{[p]}{4}$

$3 \le x \le 27.$

$3 \le y \le 27.$

$f(x/y) < 0$ $\quad f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

Пусть: $x^2+6x=t$.

$$3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t}+t \geq \cancel{|5|}\, 5^{\log_4 5\cdot\log_5|t|}$$

$t>0$
(из. лог.).

$$3^{\log_4 t}+t-5^{\log_4 t}\geq 0$$

$$3^{\log_4 3\cdot\log_3 t}+t-5^{\log_4 5\cdot\log_5 t}\geq 0.$$

$$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}-t^{\log_4 5}\geq 0.$$

$$t^{\log_4 4}\left(t^{\log_4\frac{3}{4}}+1-t^{\log_4\frac{5}{4}}\right)\geq 0$$

точки перехода: $t=0$

$$t^{\log_4\frac{3}{4}}+1=t^{\log_4\frac{5}{4}}$$

$$\cancel{t^{\log_2\frac{9}{16}}+1=t^{\log_2\frac{25}{16}}}$$

$\Downarrow$ ~~если $t=2$.~~

$$\cancel{\frac{9}{16}+1=\frac{25}{16}}\ \checkmark$$

$$\log_4\frac{3}{4}=\frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln 4}=\frac{\ln\frac{3}{4}}{2\ln 2}=\frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln 2}$$

$$x^2+6x=0 \Rightarrow x=0;-6.$$

$x(x+6)=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x^2+6x=2.$

$D=36-4\cdot\cancel{2}+=$

$t^{\log_4\frac{3}{4}}\left(1-t^{\log_4\frac{5}{3}}\right)=-1.$

$t^{\log_4\frac{3}{4}}\cdot\cancel{x}\,(1-t^{\log_4\frac{5}{3}})=-1.$

$\cancel{1}-t^{\log_4\frac{5}{3}}\cancel{x}=-\frac{1}{t^{\log_4\frac{3}{4}}}=-t^{-\log_4\frac{3}{4}}$

$t^{\log_4\frac{5}{3}}=t^{-\log_4\frac{3}{4}}+1.$

x^{lo}

$t^{\log_4\frac{5}{4}}-t^{\log_4\frac{3}{4}}=1.$

$t^{\log_4 5-1}-t^{\log_4 3-1}=1.$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}-t^{\log_4 5}\geq 0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)