МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ По формуле суммы синусов получаем:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$.

Подставив $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, получим:

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$.

Рассмотрим случай, когда $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$. Тогда по формуле синуса суммы:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$.

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ определен, то $\cos\alpha\neq 0 \Rightarrow 2\sin\alpha+\cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Пусть теперь $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$. Аналогично получаем:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$.

$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0$.

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sin\alpha = -2\cos\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = -2\end{array}\right.$

<u>Ответ</u>: $\operatorname{tg}\alpha \in \{-2, -\frac{1}{2}, 0\}$.

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

условие: $x-2y \geqslant 0$.

с учетом условия возведем обе части уравнения (1) в квадрат:

$(x-2y)^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0.$

$\mathcal{D}_x = (1-5y)^2-4(4y^2+2y-2) = 1-10y+25y^2-16y^2-8y+8 = 9y^2-18y+9 =$ ~~[illegible]~~ $= (3y-3)^2$

$x_1 = \frac{(5y-1)+(3y-3)}{2} = 4y-2 \qquad x_2 = \frac{(5y-1)-(3y-3)}{2} = y+1.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4y-2 \\ x=y+1 \end{array}\right. \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad (2). \\ x-2y \geqslant 0 \end{cases}$

Подставив $x=4y-2$ в (2), получим:

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0.$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$

$25y^2-50y=0.$

$y^2-2y=0.$

$y(y-2)=0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=6 \end{array}\right.$

Подставим теперь $x=y+1$ в уравнение (2):

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y-12=0.$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$

$10y^2-20y-15=0.$

$2y^2-4y-3=0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4+\sqrt{10}}{2} \\ x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}. \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{2}$ В объединении получаем следующие пары $(x;y)$: $(-2;0)$, $(6;2)$, $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ и $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$. Из них условию $x-2y \geqslant 0$ подходит только $(6;2)$ и $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

Ответ: $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

$\boxed{3}$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x = t$.

$5^{\log_{12}t} + t \geqslant |t|^{\log_{12}13}$

условие: $t>0 \Rightarrow |t|=t$

$5^{\log_{12}t} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t = 12^{\log_{12}t}$, $t^{\log_{12}13} = \left(12^{\log_{12}t}\right)^{\log_{12}13} = \left(12^{\log_{12}13}\right)^{\log_{12}t} = 13^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geqslant 13^{\log_{12}t}$. $\log_{12}t = y$.

$5^y + 12^y \geqslant 13^y \quad \Big| \cdot \frac{1}{13^y}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geqslant 1$.

$f(y) = \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y$ – монотонно убывающая (как сумма двух убывающих).

$f(2) = 1 \Rightarrow f(y) \geqslant 1 \Leftrightarrow y \leqslant 2$. (в силу убывания $f(y)$).

~~Когда~~

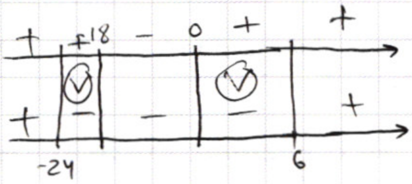
$\boxed{3}$ $\log_{12} t \leq 2$

$\log_{12} t - \log_{12} 144 \leq 0.$

$(12-1)(t-144) \leq 0$

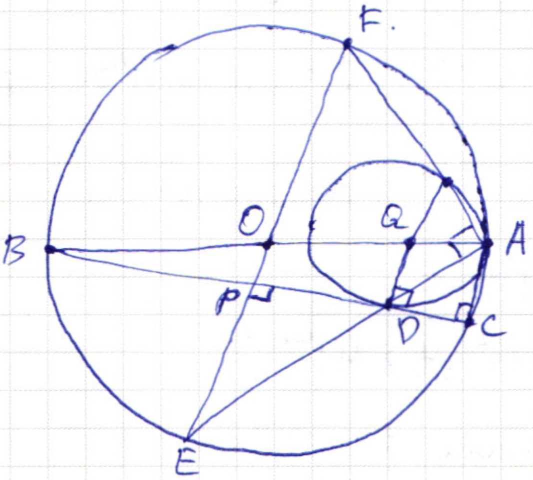
$0 < t \leq 144.$

$$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \leq 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases}$$



<u>Ответ</u>: $x \in [-24, -18) \cup (0, 6]$.

$\boxed{4}$ Обозначим центры окружностей Ω и ω как O и Q соответственно. Т.к. ω и Ω касаются, то O, Q и A лежат на одной прямой.



$QD \perp BC$ (как радиус, проведенный в точку касания ω с BC).

$\triangle QDA$ - р/б $\Rightarrow \angle QAD = \angle QDA$.

$\triangle OEA$ - р/б $\Rightarrow \angle$ $\Rightarrow \angle OAE = \angle OEA$.

$\angle QAD = \angle OAE \Rightarrow \angle OED = \angle QDA \Rightarrow OE \parallel QD. \Rightarrow OE \perp BC$ (т.к. $QD \perp BC$).

$\Rightarrow E, O$ и F лежат на одной прямой.

Обозначим $FE \cap BC = P$. $\triangle BOC$ - р/б и OP - в нём высота $\Rightarrow P$ - середина BC.

Пусть $PD = x$. Тогда $BP = PC = x+8$. $\Rightarrow BD = BP + PD = 2x+8 = 17 \Rightarrow x = \frac{9}{2}. \Rightarrow$

$\Rightarrow PD = \frac{9}{2}$, $BP = \frac{25}{2}$, . $BD = BP + PD = 17$.

$\angle DCA = \angle BCA = 90^\circ$ (как опирающийся на диаметр AB в Ω).

$\angle EPD = \angle DCA = 90^\circ$, $\angle PDE = \angle ADC$ (как вертикальные) $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle PED. \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{PD}{DC} = \frac{9/2}{8}$. Пусть $DE = \frac{9}{2}y$, $AD = 8y$.

По свойству пересекающихся хорд: $ED \cdot DA = BD \cdot DC$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{4}$ $17\cdot 8=\frac{9}{2}y\cdot 8y \Rightarrow 36y^2=136 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{34}}{3}. \Rightarrow DE=\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{3}=\frac{3\sqrt{34}}{2}.$

По теореме Пифагора для $\triangle EPD$:

$EP=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{34}}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{15}{2}.$

$OP=OE-PE=R-\frac{15}{2}$ (далее R – радиус Ω, r – радиус ω).

По теореме Пифагора для $\triangle BOP$:

$OP^2+BP^2=BO^2$

$\left(R-\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{25}{2}\right)^2=R^2$

$R^2-15R+\frac{225}{4}+\frac{625}{4}=R^2$

$15R=\frac{425}{2} \Rightarrow \boxed{R=\frac{85}{6}}$

$OQ=OA-QA=R-r$

$BQ=BO+OQ=2R-r.$

По теореме Пифагора для $\triangle BQD$:

$QD^2+BD^2=BQ^2$

$r^2+17^2=(2R-r)^2$

$r^2+389=4R^2-4Rr+r^2$

$4Rr=4R^2-389 \Rightarrow r=\frac{4R^2-389}{4R}=R-\frac{389}{4R}.$

Подставив $R=\frac{85}{6}$, получим $\boxed{r=\frac{136}{15}}$

$\boxed{4}$

$\frac{DE}{DA} = \frac{9}{16} \Rightarrow DA = \frac{8\sqrt{34}}{3}$ (т.к. $DE = \frac{3\sqrt{34}}{2}$).

$AE = ED + DA = \frac{25\sqrt{34}}{6}$. $EF = 2R = \frac{85}{3}$.

$\angle FAE = 90°$ (как опирающийся на диаметр EF в Ω).

Из прямоуг. $\triangle AEF$: $\sin\angle AFE = \frac{AE}{FE} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \boxed{\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}}$

По теореме Пифагора из $\triangle AFE$:

$AF = \sqrt{FE^2 - AE^2} = \frac{5\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{25\sqrt{34}}{6} = \frac{2125}{12}$ $\boxed{S_{AEF} = \frac{2125}{12}}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$, $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

$\boxed{5}$ Подставим $a = b = 1$ в условие $f(ab) = f(a) + f(b)$:

$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Подставим теперь $b = \frac{1}{a}$:

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$. (заметим также, что $f(t^n) = n f(t)$).

Рассмотрим каноническое разложение чисел x и y: (на простые множители).

$x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot 13^{\alpha_6} \cdot 17^{\alpha_7} \cdot 19^{\alpha_8} \cdot 23^{\alpha_9}$

$y = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot 7^{\beta_4} \cdot 11^{\beta_5} \cdot 13^{\beta_6} \cdot 17^{\beta_7} \cdot 19^{\beta_8} \cdot 23^{\beta_9}$

Тогда:

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) = f(2^{\alpha_1}) + f(3^{\alpha_2}) + \ldots + f(23^{\alpha_9}) -$

$- f(2^{\beta_1}) - f(3^{\beta_2}) - \ldots - f(23^{\beta_9}) = \alpha_1 f(2) + \alpha_2 f(3) + \ldots + \alpha_9 f(23) -$

$- \beta_1 \cdot f(2) - \beta_2 \cdot f(3) - \ldots - \beta_9 \cdot f(23) = \alpha_1 \cdot \left[\frac{2}{4}\right] + \alpha_2 \cdot \left[\frac{3}{4}\right] + \ldots + \alpha_9 \cdot \left[\frac{23}{4}\right] -$

$- \beta_1 \cdot \left[\frac{2}{4}\right] - \beta_2 \cdot \left[\frac{3}{4}\right] - \ldots - \beta_9 \cdot \left[\frac{23}{4}\right] < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{5}$ Подставляя $[\frac{2}{4}], [\frac{3}{4}], \dots, [\frac{23}{4}]$ получим:

$\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5+3\alpha_6+4\alpha_7+4\alpha_8+5\alpha_9 < \beta_3+\beta_4+2\beta_5+3\beta_6+4\beta_7+4\beta_8+5\beta_9$. (1)

Заметим, что $\alpha_3, \dots, \alpha_9, \beta_3, \dots, \beta_9 \in \{0,1\}$ (т.к. $x, y \leq 24 < 5^2$), а также

что числа x и y однозначно определяются наборами $(\alpha_1, \dots, \alpha_9)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_9)$.

Найдем количество наборов $(\alpha_3, \dots, \alpha_9)$ и $(\beta_3, \dots, \beta_9)$ удовлетворяющих (1).

Пусть $\alpha_9 = 1 \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_8 = 0$.

$5\beta_9 + 4\beta_8 + \dots + \beta_3 > 1$.

Это не выполняется только если $\{\beta_3, \beta_5, \beta_6, \dots, \beta_9\} = \{0\}$ или если
и $\beta_4 = 1$

$\{\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_9\} = \{0\}$ и $\beta_3 = 1$ или если $\{\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_9\} = \{0\}$.

Знашит, из 2^7 вариантов для набора $(\beta_3, \dots, \beta_9)$ нам не подходит только 3. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получается 125 вариантов.

$\boxed{6}$ $\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$.

$\underbrace{-8x^2-(a+30)x-17-b}_{\overset{\shortparallel}{f(x)}} \geq 0$ при $\forall x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$.

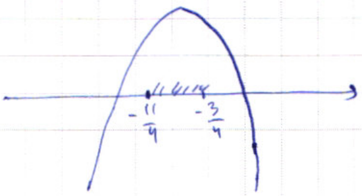


рис.

для этого необходимо и достаточно, чтобы

выполнялось: $\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \geq 0. \to \\ f(-\frac{3}{4}) \geq 0 \to \end{cases} \begin{cases} 11a-4b \geq -20. \\ 3a-4b \geq -4. \end{cases}$

$\boxed{6}$ $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

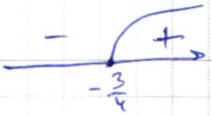
$$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0.$$

$$\frac{4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11}{4x+3} \le 0.$$

если $a=0$:

$$\frac{(4b-12)x+3b-11}{4x+3} \le 0.$$

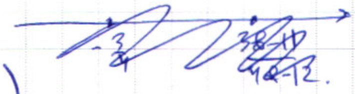
$b=3$: $\frac{1}{4x+3} \ge 0$



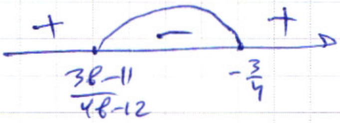
не выполняется для $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

~~если~~

$b \ge 3$:



(при этом $\frac{3b-11}{4b-12} < -\frac{3}{4}$)



необходимо:

$\frac{3b-11}{4b-12} \le -\frac{11}{4}.$

$3b-11 \le -11b+33.$

$14b \le 44.$

$b \le \frac{22}{7}. \Rightarrow b \in [3, \frac{22}{7}].$

$b<3$: ~~если~~ .

если $b \in (\frac{1}{3}, 3) \Rightarrow \frac{3b-11}{4b-12} < -\frac{3}{4}.$

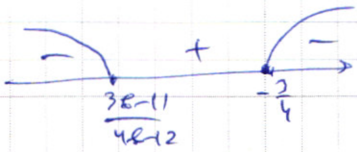
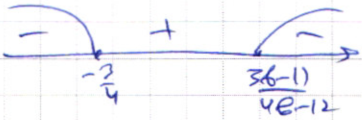


рис.

— не может выполняться для всех $x \in [-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}]$ (см. рис.)

если $b \le \frac{1}{3}$: — выполняется.



$\frac{38-11}{48-12} = -\frac{3}{4}$

$34 \times 9 = 306$ $\quad 306 - 81 = 225$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-12b+44 \geq 12b+36. \quad 24b \leq 8.$ $\quad b \leq \frac{1}{3}$

$\frac{425}{2\cdot15} = \frac{85\cdot\cancel{5}}{2\cdot3\cdot\cancel{5}} =$

$A = \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}.$ $\quad \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{5}\sqrt5}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\sqrt5}$

$$\overset{\shortparallel}{2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)} = -\frac{4}{5}.$$

$17 \times 8 = 136$

$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta = -\frac{4}{5}. \Rightarrow \cos2\beta = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{5}\sqrt5}\cdot\sqrt5\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt5}}$

$\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}.$ $\quad \frac{136}{36} = \frac{34}{9}$ $\quad 625+225 = 850.$ $\quad \frac{850}{4} =$ $= \frac{425}{2}$

$x = \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2} \quad y = \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$
$\sin x = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$
$\sin y = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$
$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$A = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha = -1.$

$4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha = 0.$

$2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha = 0.$

~~$\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha = 0.$~~

~~$\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha) = 0$~~
$\neq 0. \quad = 0.$

~~$\cos\alpha = -\sin\alpha.$~~ ~~$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = -1}$~~

$\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0 \quad 2\sin\alpha = -\cos\alpha.$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}}$

$\frac{5\cdot\sqrt{17}\sqrt2}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}\ \sqrt2 =$ $= \frac{}{17}$ $\cdot\ \frac{5\sqrt{34}}{2}$

~~$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}.$~~

~~$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$~~

~~$-2\sqrt5\cos\beta$~~

$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \quad \sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - $ ~~$\sin\cos2\alpha$~~

$\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha = -1.$

~~$2\sin\alpha\cos$~~

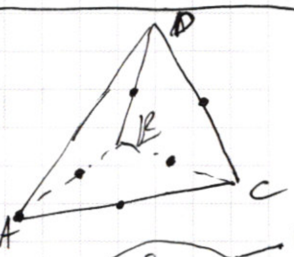
$4\sin\alpha\cos\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}.$

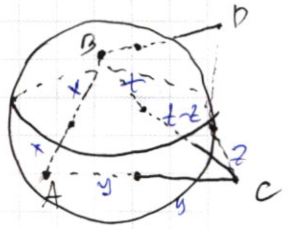
$4\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha = 0.$

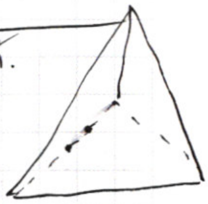
$2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha = 0.$

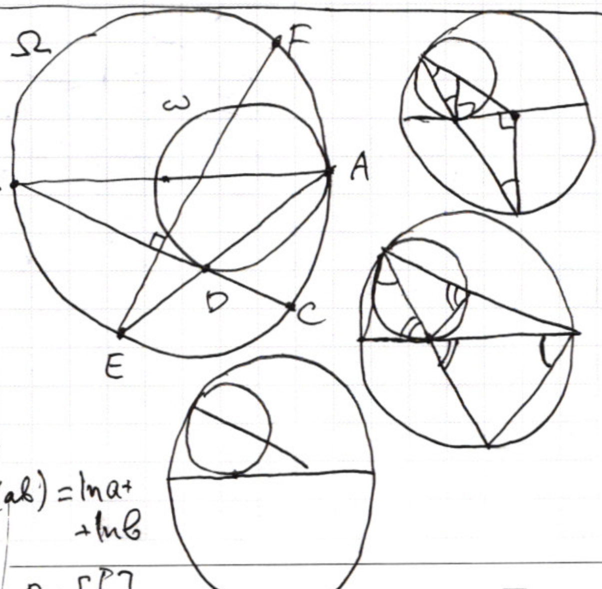
$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0. \quad \sin\alpha = -2\cos\alpha.$
$\quad\ \ = 0 \quad$ или $\quad = 0.$

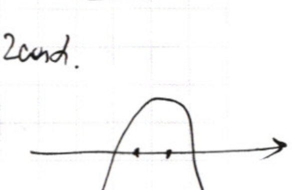
$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = 0}$ $\quad \boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = -2}$











$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\log_a P = \left[\frac{P}{4}\right].$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

~~12~~ 24 · 6

② $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2=4x+18y+12 \end{cases}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$. ⓷ $\Rightarrow$

$\begin{array}{r} 32 \\ +18 \\ \hline 50 \end{array}$

$\left[\begin{array}{l} \Pi=-\frac{3}{2} \\ \Sigma=2 \end{array}\right.$

~~$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$.~~

$x\geqslant 2y$.

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 6 \\ \hline 144 \end{array}$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2}\geqslant 2+\sqrt{10}$.

$6\cdot(-24)=-144$

$6-24=-18$. $\frac{D}{4}=4+6=10$.

$x^2-4x+9y^2-18y-12=0$.

$\frac{D_x}{4}=4-9y^2+18y+12=-9y^2+18y+16$. плохо.

$y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

$4+\sqrt{10}\geqslant 4+2\sqrt{10}$.

$\times$.

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 9 \\ \hline 108 \\ +81 \\ \hline 189 \end{array}$

$\frac{(2-\sqrt{10})(2+\sqrt{10})}{4}=$

$=\frac{4-10}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$.

$9y^2-18y+x^2-4x-12=0$.

$\frac{D_y}{4}=81-9(x^2-4x-12)=-9x^2+36x+189$.

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}\geqslant 2-\sqrt{10}$.

$4-\sqrt{10}\geqslant 4-2\sqrt{10}$.

$\frac{2+\sqrt{10}}{2}+\frac{2}{2}$.

$t>0$.

$|t|=t$.

$\Rightarrow$ $x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$. $2\sqrt{}$ · $\sqrt{10}$.

$\frac{2-\sqrt{10}}{2}+\frac{2}{2}$.

$D_x=$ ~~$1-10y+25y^2-8y^2-2y+2\ldots 8(2y^2-4y+1)$~~

~~$4y^2+(2-5x)y+x^2+x-2=0$.~~

~~$D_y=$~~

$D_x=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$.

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=4y-2$ $x_2=\frac{5y-1+3-3y}{2}=y+1$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$ $x^2+18x=t$.

$5^{\log_{12}t}+t\geqslant|t|^{\log_{12}13}$ $t>0$.

$5^{\log_{12}t}+t\geqslant t^{\log_{12}13}$ $5^{\log_{12}t}=12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t}=t^{\log_{12}15}$.

$t^{\log_{12}5}+t\geqslant t^{\log_{12}13}$.

$5^y+12^y\geqslant 13^y$.

$\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y\geqslant 1$.

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geqslant 13^{\boxed{\log_{12}t}}$ "y"

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{25\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}}{6}=$

$=\frac{125\cdot 17}{12}=$

$\begin{array}{r} 125 \\ \times 7 \\ \hline 875 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1250 \\ +875 \\ \hline 2125 \end{array}$

$\sqrt{\frac{85^2}{3^2}-\frac{25^2\cdot 34}{6^2}}=\sqrt{\frac{5^2\cdot 17^2}{3^2}-\frac{5^4\cdot 17\cdot 2}{3^2\cdot 2^2}}=\sqrt{\frac{5^2\cdot 17^2}{3^2}-\frac{5^4\cdot 17}{3^2\cdot 2}}=$

$=\frac{5}{3}\sqrt{17^2-\frac{25\cdot 17}{2}}=$

$=\frac{5}{3}\cdot\frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

$\begin{array}{r} 389 \\ \times 2 \\ \hline 778 \end{array}$

$2\cdot 17^2-25\cdot 17=$

$=34\cdot 17-25\cdot 17=$

$=9\cdot 17$.

+

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

330 - 310

$+\begin{array}{r}242\\68\\\hline 310\end{array}$

$-8x^2-30x-17-ax-b\geq 0$ при $\forall x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$.

$\begin{cases} f(-\frac{11}{4})\geq 0\\ f(-\frac{3}{4})>0\end{cases}$

$4R=4\cdot\frac{85}{6}=$

$=2\cdot\cancel{2}\cdot\frac{85}{\cancel{2}\cdot 3}=$

$=\frac{170}{3}$

$\frac{384}{\frac{170}{3}}=384\cdot\frac{3}{170}=$

$=17\cdot\cancel{12}\cdot\frac{3}{\cancel{17}\cdot 10}=\frac{51}{10}$

$\frac{12x+11-(ax+b)\cdot(4x+3)}{4x+3}\leq 0.$

$\frac{12x+11-4ax^2+(4b-3a)x-3b}{4x+3}\leq 0.$

$\frac{4ax^2-(4b-3a+12)x+3b}{4x+3}\leq 0.$

$+\begin{array}{r}330\\68\\\hline 398\end{array}$ $-\begin{array}{r}398\\242\\\hline 156\end{array}$

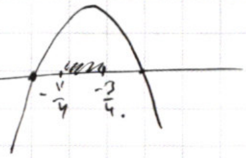
$\frac{11(a+30)+6b-4b-242}{4}\geq 0.$

$=-\cancel{8}\cdot\frac{121}{16_2}+(a+30)\cdot\frac{11}{4}+17-b\geq 0.$

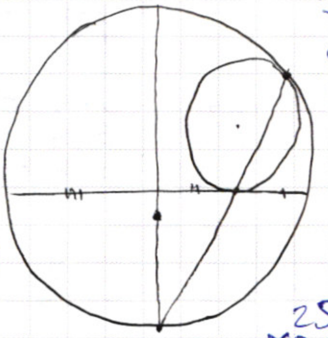
$=\frac{3a+90-8b-4b-18}{4}$ $+\begin{array}{r}18\\68\end{array}$

$=-\frac{9}{2}+\frac{3(a+30)}{4}-17-b=$

$-8\cdot\frac{9}{16_2}+(a+30)\cdot\frac{3}{4}-17-b=$



$\times\begin{array}{r}51\\3\\\hline 153\end{array}$



$\times\begin{array}{r}85\\5\\\hline 425\end{array}$

$\times\begin{array}{r}255\\255\end{array}$

$384=2R(2R-2r)$

$\frac{85}{6}-\frac{51}{10}=$

$=\frac{425-153}{30}=\frac{272}{30}=$

① $a=0.$

$384=255(255-2r).$

$\frac{(b+3)x+3b}{4x+3}\leq 0.$

$b+3=0$

$\frac{9}{4x+3}\leq 0.$

$x\leq-\frac{3}{4}.$

$b+3\neq 0.$

~~384 22.~~ $\frac{384}{255}=255-2r.$

$+\quad-\quad+$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{3b}{b+3}$

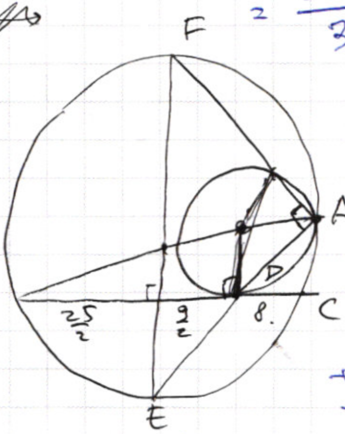
$\frac{DA}{DE}=\frac{16}{9}$

$\frac{16^{3}}{9_{3}}\cdot\frac{3\sqrt{34}}{2}$

$2r=\frac{255^2}{255}-\frac{384}{255}.=$

$\times\begin{array}{r}17\\8\\\hline 136\end{array}$

$\Rightarrow r=\frac{255^2-384}{510}=$



$-\begin{array}{r}425\\153\\\hline 272\end{array}$

$=\frac{136}{15}.$

$+\begin{array}{r}255\\17\\\hline 272\end{array}$

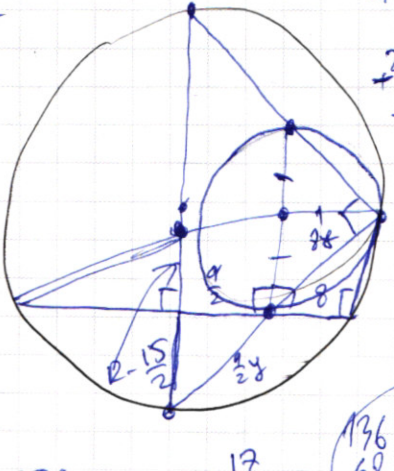
$384=2R(2R-2r)$

$\times\begin{array}{r}34\\4\\\hline 136\end{array}$

$36y^2=136.$

$=\frac{(255-17)(255+17)}{510}=\frac{272\cdot 238}{510}.$

$+\begin{array}{r}255\\17\\\hline 238.\end{array}$



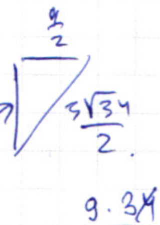
$\frac{8}{3}+\frac{3}{2}=$

$=\frac{16+9}{6}=$

$=\frac{25}{6}$

$y^2=\frac{34}{9}\Rightarrow$

$\frac{9^{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{3}=\frac{3\sqrt{34}}{2}$

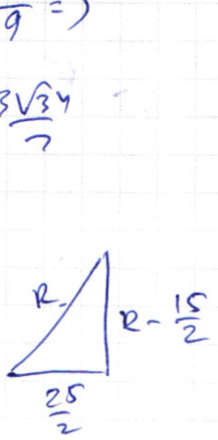


$\frac{9\cdot 34^{17}}{4_2}=\frac{153}{2}$

$\times\begin{array}{r}17\\9\\\hline 153\end{array}$

136	2
68	2
34	2
17.	

$\begin{array}{r}98\\81\\89\end{array}+$



$\times\begin{array}{r}85\\3\\\hline 255\end{array}$

$\frac{153}{2}-\frac{81}{4}=\frac{225}{4}.$

$\times\begin{array}{r}153\\2\\\hline 306\end{array}$ $-\begin{array}{r}306\\81\\\hline 225\end{array}$

$15R=\frac{425}{2}$

$3R=\frac{85}{2}\Rightarrow\boxed{R=\frac{255}{2}}$

$R^2=R^2-15R+\frac{225}{4}+\frac{625}{4}=R^2-15R+\frac{425}{2}.$

$+\begin{array}{r}625\\225\\\hline 850\end{array}$

$\frac{850}{2}=425.$

$-18+30-90-68-4b\cdot 20.$

$-8\cdot\frac{16}{9}+(a+30)\cdot\frac{3}{4}-17-b=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

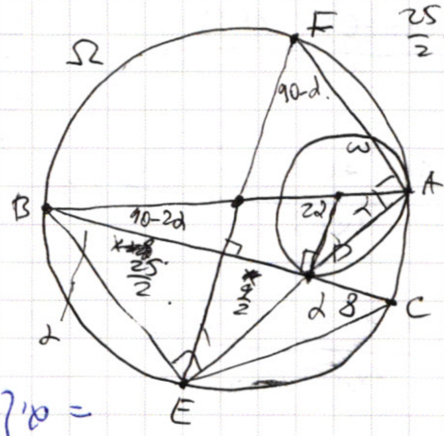
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

CD = 8 BD = 17.

R - ? r - ? ∠AFE - ? S_{AEF} - ?

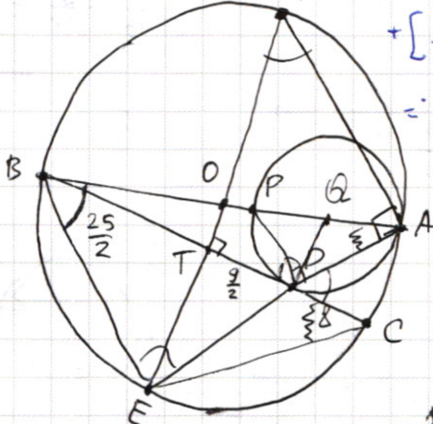
$BD = 2x + 8 = 17 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$.

$\frac{9}{2} + 8 = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$



$\frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 17$.

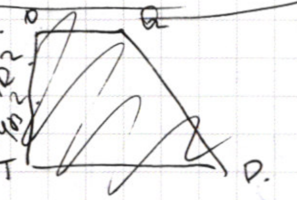
$\times \frac{17}{8}$
136.



$OP = QO - PQ = R - r - r = R - 2r$.

$$\boxed{17^2 = (2R - 2r) \cdot 2r \quad (1)} \to R - r = \frac{17^2}{4r}.$$

$OT = \sqrt{R^2 - \frac{625}{4}}$



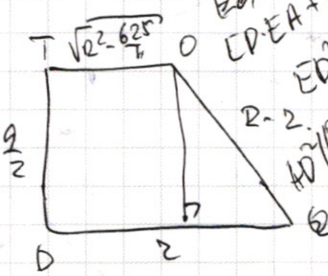
12 баллов
(~~[illegible]~~).

~~ED~~ $ED \cdot EA + (ED + DA)^2 = 4R^2$.

$ED^2 + 4ED \cdot EA + DA^2 = 4R^2$

$(\ldots + 1)^2 = 4R^2$

$AD^2\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{R}{r} - 1\right) + 1\right)$



$(R - r)^2 - \left(r - \sqrt{R^2 - \frac{625}{4}}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

$R^2 - 2Rr + \cancel{r^2} - \cancel{r^2} + 2r\sqrt{R^2 - \frac{625}{4}} + R^2 - \frac{625}{4} = \frac{81}{4}$.

$4R^2 = AD^2 \cdot \left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{R}{r} + 1\right)\right)$

$\frac{17^2}{4r} - \left(r - \sqrt{\left(r + \frac{17^2}{4r}\right)^2 - \frac{625}{4}}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

$17^2 = 389$

$\times \frac{17}{17}$
119
17
289

$\frac{17^2}{4r} - r^2 + 2r\sqrt{\left(r + \frac{17^2}{4r}\right)^2 - \frac{625}{4}} + \frac{625}{4} - \left(r + \frac{17^2}{4r}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

$\frac{289}{4r^2}$ $\frac{289}{4r^2} - r^2 + 2r\sqrt{\left(r + \frac{389}{4r}\right)^2 - \frac{625}{4}} + \frac{625}{4} - r^2 = \frac{389}{2} - \left(\frac{389}{4r}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

~~$\frac{ED}{DA}$~~ $\frac{R}{r} = \frac{AD + DE}{AD} = 1 + \frac{DE}{AD}$

$DE = AD\left(\frac{R}{r} - 1\right)$.

$\frac{AD}{25} = \frac{r}{EC} \to EC = \frac{25r}{AD}$. | $17^2 + r^2 = (2R - r)^2$.

$EC^2 = ED \cdot DA \to \frac{25^2 \cdot r^2}{AD^2} = \cancel{ED\,AD} \cdot ED \cdot EA = ED^2 + ED \cdot DA = ED^2 + 136. = AD^2 \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 136.$

$\begin{cases} 4Rr - 4r^2 = 389 \\ 4R^2 - 4Rr = 389 \end{cases}$

~~Rr~~ =
$4(R - r)(R + r) = 778 =$
$= 4 \cdot \frac{389}{4r} \cdot \left(r + r + \frac{389}{4r}\right) = 778$.

$\times \frac{389}{2}$
778

$\frac{\left(2r + \frac{389}{4r}\right)}{r} = 2$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)