МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) (1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \cos2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$, т.к. $\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta = 1$.

$\Rightarrow \sin2\beta = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

1^0 подставим в (1) $\sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+\cos2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \exists \operatorname{tg}\alpha = t$

$\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+\frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{\sqrt5} \Big| \cdot\sqrt5$

$\Rightarrow \frac{4t+1-\cancel{t^2}+1+\cancel{t^2}}{1+t^2} = 0$ $\quad 4t=-2$

$t = -\frac{1}{2}$

2^0 $\sin2\alpha\cdot\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right) - \cos2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\frac{1}{\sqrt5} = 0.$ $\quad \exists \operatorname{tg}\alpha = t$

$\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2\sqrt5}{5} - \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\frac{1}{\sqrt5} = 0. \Big|\cdot\sqrt5$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$$

$$\frac{2t^2+4t}{1+t^2} = 0.$$

$$t(2t+4) = 0$$

$$t = 0; \quad \cancel{4t=4} \quad t = -2.$$

Ответ: $tg\alpha = 0; -2; -\frac{1}{2}$.

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25. \end{cases} \qquad x-2y \geq 0.$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \qquad \text{Пусть } \begin{matrix} x-2=a \\ y-1=b. \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=a+2 \\ y=b+1. \end{matrix} \qquad ab \geq 0.$$

$$\begin{cases} a+\cancel{2}-2b-\cancel{2} = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \ (1) \\ a^2+9b^2=25. \ (2) \end{cases}$$

рассмотрим (1)

$$a^2-5ab+4b^2=0. \ |:b^2.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0.$$

Пусть $\frac{a}{b}=t$

$$t^2-5t+4=0$$

$$D=25-4\cdot1\cdot4=9$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}=4; 1$$

$\frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$

$\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$

$\Rightarrow$ подставим во второе.

$16b^2+9b^2=25$ $\qquad$ $10b^2=25$

$b=\pm1$ $\qquad$ $b^2=\frac{5}{2}.$

$\Rightarrow a=\pm4$ $\qquad$ $b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Downarrow$

$a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$

$(a;b) = (4;1)\ (-4;-1)$

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$

$\Rightarrow$ $\begin{matrix} x-2=4 \\ y-1=1 \end{matrix}$ $\boxed{\begin{matrix} x=6 \\ y=2 \end{matrix}}$ $\qquad$ $\begin{matrix} x-2=-4 \\ y-1=-1 \end{matrix}$ $\boxed{\begin{matrix} x=-2 \\ y=0. \end{matrix}}$ – не уд

$\begin{matrix} x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \end{matrix}}$. $\qquad$ $\begin{matrix} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{matrix}}$

не уд

Ответ: $(6;2)$ $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$$

т.к. $x^2+18x > 0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x - (x^2+18x)^{\log_{12}13} \geq 0.$$

$\exists.\ x^2+18x = t$

$$5^{\log_{12}t} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0.$$

$$5^{\log_{12}t} - 13^{\log_{12}t} \geq -t$$

$$13^{\log_{12}t} - 5^{\log_{12}t} \leq t$$

$$8^{\log_{12}t} \leq t$$

$$\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t} - \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} \leq 1$$

$\exists\ \log_{12}t = a$

$$\left(\frac{13}{12}\right)^{a} - \left(\frac{5}{12}\right)^{a} \leq 1$$

$\Rightarrow.\ 12^a + 5^a \geq 13^a$

$\left(\frac{12}{13}\right)^a + \left(\frac{5}{13}\right)^a \geq 1$

$\log_{12}t \leq 2.$

т.к. монот. уб ф-ция.

$t \in (0; 144].$

$x^2+18x > 0$

$x(x+18) > 0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x-144 \leq 0.$

$D = 900$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 30}{2} = 6;\ -24$$

$\Rightarrow x \in [-24; 6].$

$\Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6].$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6].$

№5.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

$f(1 \cdot x) = f(1) + f(x) = f(x) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = \quad f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{x}{y}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0	4	0	4	0	0

$\frac{x}{y}$	22	23	24
	0	5	0

$\Rightarrow$ кол-во $\qquad n = 16 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 4 + 3 + 2 \cdot 1 = 131$

Ответ: 131

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17.$ на $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 - \frac{8}{4x+3}$ – гипербола.

$-8x^2 - 30x - 17$ – парабола.

$ax+b$ – лин ф-ия.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$tg\alpha - ?$ уточнить ≥ 3

$\sin2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin2\beta = \frac{2tg\beta}{1+tg\beta} = \frac{2m}{1+m^2}$

$\cos2\beta = \frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

$$\begin{cases} \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-m^2}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2m}{1+m^2} = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2t}{1+t^2}\cdot 2\cdot\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 - 1 + 2 \end{cases}$$

$\alpha\beta\gamma\theta$

$\cos4\beta = (2\cos^2 2\beta - 1)$

$= 2\cdot\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 - 1.$

$2\sin\beta\cos\beta = 2\cdot\frac{2m}{1+m^2}\cdot\frac{1-m^2}{1+m^2}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad m = \pm\sqrt{9-4\sqrt5}$

$\sin2\alpha\,2\cos^2 2\beta + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt5}2\cos2\beta = -\frac{4}{5}$

$5-5m^2 = 2\sqrt5+2\sqrt5m^2$

$2\sqrt5m^2+5m^2 = 5-2\sqrt5$ $\quad 2\cos2\beta = \frac{4\sqrt5}{5}$ $\quad \frac{25-20\sqrt5+20}{5}$

$m^2(2\sqrt5+5) = 5-2\sqrt5$ $\quad \cos2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\quad = 9-4\sqrt5$

$25-2c \quad m^2 = \frac{5-2\sqrt5}{5+2\sqrt5}\cdot 5-2\sqrt5 = \frac{(5-2\sqrt5)^2}{5} =$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x-18y+9y^2=12 \end{cases}$$

$$(x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=25 \qquad (x-2)^2+(3y-3)^2=25.$$

$(3y-3)^2 = 9y^2-18y+9$

окр $y(2;1)$ $R=5$.

$(y-1)(x^2-4x+4)=x^2y-4xy+4y$
$-x^2+4x-4$

$(y-1)(x-2) \Rightarrow x^2y$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2.$

$xy-2y-x+2.$

$x^2-5xy+4y^2-x+2y-2=0.$

$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4y^2+2y+\frac{1}{4}-5xy-1{,}5=0.$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}.$

$(y-1)(x-2)=$
$=xy-2y-x+2.$

$\exists\ x-2=a$
$x=a+2$
$y-1=b$
$y=b+1$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)=25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

$a^2+9b^2=25$

$x^2-4xy+4y^2.$

$a^2+9b^2=25.$

$x(x-4y)+4y^2.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

1) $\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$

$x^2 + \frac{20}{25} = 1$

$x^2 = \frac{5}{25}$

$x = \pm\frac{\sqrt5}{5} = \sin 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$

$\frac{4t + 1 - \cancel{t^2} + 1 + \cancel{t^2}}{1+t^2} = 0$

$4t = -2$

$t = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$

$\frac{4t - 1 + t^2 + 1 + t^2}{1+t^2} = 0$

$\frac{2t^2 + 4t}{1+t^2} = 0$

$2t(t+2) = 0$

$t = -2$

$t = 0$

3, 4, 7, 5, 5, 5, 20, 5, 6, 33, 17

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x + (x^2+18x)^{\log_{12}13} \geq 0$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 + \log_{12} t + \log_{12} 13 \cdot \log_{12} x^2+18 \geq 0$

$\log_{12} t(\log_{12} 5 + 1) + \log_{12} 13 \cdot \log_{12} t \geq 0$

$\log_{12} 5 + \log_{12} 12$

$\log_{12} 60 =$

$x^2 + 18x$

$x \neq -\frac{3}{4}$.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$.

$[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

$\frac{12(-\frac{11}{4})+11}{4(-\frac{11}{4})+3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$.

$-8(\frac{121}{16}) - 30(-\frac{11}{4}) - 17 =$

$= -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = 5$.

$= -143 - 17 = -160$

$\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a+b < 5$.

$2 \le -\frac{3}{4}a+b < 1$.

$\frac{11}{4}$

-160

$\frac{12(-\frac{3}{4})+11}{4(-\frac{3}{4})+3} = \frac{-9+11}{-3+3} \neq 2$

$-8(\frac{9}{16}) - 30(-\frac{3}{4}) - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 =$

$= \frac{-9+45}{2} \; 1$.

$8x^2+30x+17=0$.

$D = 900 - 4\cdot 8\cdot 17 =$

$=$

$15 \cdot 11 = 165$, $286 : 2 = 143$, $143+17 = 160$

$165 - 121 = 44$

$45 - 9 = 36$

$32 \cdot 17 = 544$

$900 - 544 = 466$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a+2-2(b+1)=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

$a-2b=$

$=x-2-2(y-1)$

$=x-x-2y+x.$

$\Rightarrow x-2=a \quad y-1=b$

$(a;b)=(4;1)\ (-4;-1)$

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2. \end{cases}$ V.

$\begin{cases} x-1=-4 \\ y-1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ X (неудовл)

$\begin{cases} x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2. \\ y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases}$ V.

$\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases}$ V

удов.

$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$=2-2\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}=$

$=4{,}5-3\sqrt{\frac{5}{2}}+$

$$\begin{cases} a+2-2b-2=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad ab\geq 0$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \quad ab.$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \quad |:b^2 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

$\exists\ \frac{a}{b}=t$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+4=0.$

$t^2-5t+4=0$

$D=25-4\cdot1\cdot4=9.$

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}=4;1.$

$\frac{a}{b}=4$ или $\frac{a}{b}=1.$

$a=4b \qquad a=b.$

$16b^2+9b^2=25. \qquad 10b^2=25$

$25b^2=25 \qquad b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b=\pm1$

$a=\pm4 \qquad a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$\sqrt{\frac{25}{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ:
$x^2+18x>0$.

~~т.к.~~ т.к. ОДЗ

$\Rightarrow$ модуль с «+».

1° $x^2+18x=0$

$x(x+18)=0$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

откр. и «+» $(-\infty;-18]\cup[0;+\infty)$

и «−» $(-18;0)$.

$60 \Big| \frac{13}{4}$

$\log_{12}5+1-\log_{12}13 =$

$=\log_{12}\frac{60}{13}<0$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x \quad \Big| \log_{12}$

$\log_{12}(x^2+18x)\log_{12}5 + \log_{12}x^2 \geq \log_{12}13 \cdot \log_{12}(x^2+18x) - \log_{12}18x$

$\log_{12}(x^2+18x)\log_{12}5 - \log_{12}13\cdot\log_{12}(x^2+18x) + 2\log_{12}x + \log_{12}18 + \log_{12}x \geq 0$

$18x=a$

$x=\frac{a}{18}$

~~$\log_{12}(x^2+18x)(\log_{12}5-\log_{12}13) + 3\log_{12}x + \log_{12}18 \geq 0.$~~

~~$\log_{12}(x^2+18x)\left(\log_{12}\frac{5}{13}\right) + 3\log_{12}x + \log_{12}18 \geq 0.$~~

$\log_{12}5+1-\log_{12}13$.

~~$\log_{12}(x(x+18))\left(\log_{12}\frac{5}{13}\right) + 3\log_{12}x + \log_{12}18 \geq 0.$~~

~~$(\log_{12}x+\log)\;(\log_{12}x+\log_{12}(x+18))\log_{12}\frac{5}{13} + 3\log_{12}x + \log_{12}18 \geq 0.$~~

$\log_{12}13>1$

$\log_{12}(x^2+18x)$.

$\log_{12}t\leq 0$

$x^2+18x=t$

$t\in(0;12)$.

$\log_{12}t\leq\log_{12}1$

$\log_{12}4=2$

$\log_{12}2=1$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x-(x^2+18x)^{\log_{12}13} \geq 0.$

$t\leq 1.$

$t>0$

$5^t + t - t^{\log_{12}13} \geq 0.$

$5^{\log t}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$\log_{12}t\cdot\log_{12}5+\log_{12}t-\log_{12}13\log_{12}t\geq 0$

~~$\log_{12}t$~~ $t\cdot\log_{12}5+\log_{12}t-\log_{12}13\cdot\log_{12}t\geq 0.$

$\log_{12}(t)(\log_{12}5+1-\log_{12}13)\geq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 − 1.

$t\in(0;1]$.

$x^2-18x>0$

$x^2-18x\le 1$

5 − 1

11 − 2

13 − 3

17 − 4

19 − 4

23 − 5

$18\cdot18$

$x\in(-\infty;-18]\cup[0;+\infty)$

$x^2-18x-1\le 0$

$D=296-4\cdot(-1)=300$.

$x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{300}}{2}=9\pm\sqrt{75}=9\pm5\sqrt3$

$18\cdot18=144+180=296$

$300:4=75$

$75\cdot4=300$

$16\cdot7=112$

$N=16\cdot7+$

$2\cdot5+4+3+2\cdot1=$

131

$+\quad -\quad +$; $9-5\sqrt3$, $9+5\sqrt3$

$(x-9-5\sqrt3)(x-9+5\sqrt3)\le0$.

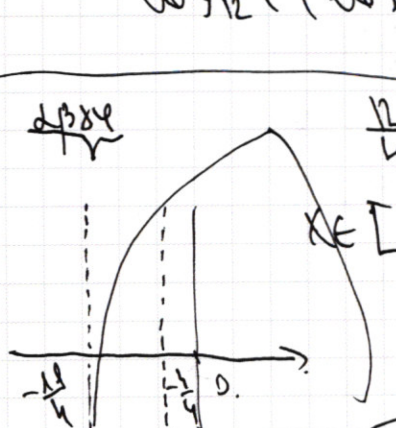
$x\in[9-5\sqrt3;9+5\sqrt3]$.

$5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13}\ge0$

$\log_{12}t\cdot\log_{12}5+\log_{12}t-\log_{12}13\cdot\log t\ge0$.

$\log_{12}t(\log_{12}5-\log_{12}13+1)\ge0$.

$12x+11 : 4x+3 = 3$, $-(12x+9)$, 2



$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le-8x^2-30x-17$.

$x_в=\frac{30}{16}$

$x\in[-\frac{11}{4};-\frac34)$.

$ax+b$ – пр.

$-8x^2-30x-17$ – параб

$\frac{12x+11}{4x+3}=3-\frac{8}{4x+3}$ – гипер.

$3-\frac{8}{4x+3}$ – гипербол

множество $(a;b)$ на $[-\frac{11}{4};-\frac34)$

точке. удовл услов. $-8x^2-30x-17$ – параб.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

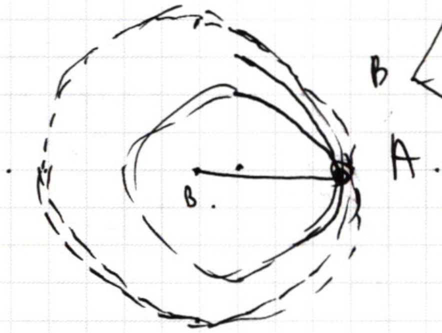
x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	e	0	e	1	.	.

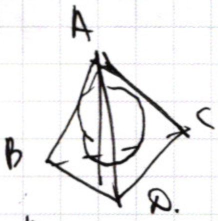
1) $tg = 0; -2; -\frac{1}{2}$

2)

x	1	2	3
y	0	1	0

x	5
y	6





б). $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$. $y \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\frac{12x+11}{4x+3} = -\frac{11}{4}$

$(12x+11)4 = -11(4x+3)$

$48x+44 = -44x-33$

$92x = -77$

$x = -\frac{77}{92}$

$\le ax+b \le$

$-8x^2-30x-17 = -\frac{11}{4}$

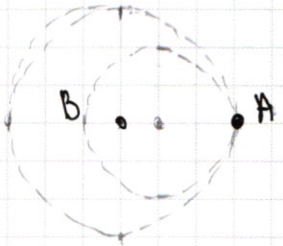
$-8x^2-30x-17+\frac{11}{4} = 0 \mid \cdot 4$

$-32x^2-120x - 57 = 0$

№ 7

$4 + 68 + 11 = 57$

$48 + 44 = 92$



больше – п

меньше – ш

$x_в = \frac{30}{-6} = -2$

1)

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$.

нашли $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$.

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = [p/4]$ $f(xy) = f(x)+f(y)$

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f(x/y) < 0$

(xy)

$x \in [1; 4)$ $y = 0$

$x \in [4; 8)$ $y = 1$

$x \in [8; 12)$ $y = 2$

$x \in [12; 16)$ $y = 3$

$x \in [16; 20)$ $y = 4$

$x \in [20; 24)$ $y = 5$

$[4,3] = 4$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)