МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$2\cdot -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin^2 2\beta = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \cancel{\cdot \pm\frac{2}{\sqrt5}}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt5}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\left(\frac{2}{\sqrt5} - 2\cos\right.$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \varphi$$

$$3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$

$\cos\alpha \neq 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$tg\alpha = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 & t_1 = 3 \\ t_1 t_2 = -3 & t_2 = -1 \end{cases}$

$tg\alpha = -1 \qquad tg\alpha = 3$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$tg\alpha = z$

$3z^2 + 2z - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$z_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

$z_2 = -1$

Ответ: $tg\alpha$ = может быть равен $\frac{1}{3}$; -1; 3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+9+36 \end{cases}$$

$$x-12y=(x-6)-6(2y-1)$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$ $2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$a^2-13ab+36b^2=0$$

$$D=169b^2-144b^2=25b^2$$

$$a_1=\frac{13b+5b}{2}=9b$$

$$a_2=\frac{13b-5b}{2}=4b$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$81b^2+9b^2=90$

$b^2=1$

$b=\pm 1$

$a=\pm 9$

$a=4b$

$a^2+9b^2=90$

$16b^2+9b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}$

$b=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$ab\geq 0 \Rightarrow$ пары $9;1$ и $-9;1$ – не подходят; $\frac{12\sqrt{10}}{5}; -\frac{3\sqrt{10}}{5}$ и $-\frac{12\sqrt{10}}{5}$ и $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ – тоже не подходят

$$\begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases}$$

$x=15$

$y=1$

$$\begin{cases} x-6=-9 \\ 2y-1=-1 \end{cases}$$

$x=-15$

$y=-1$

$x=-15$

$y=-1$

$$\begin{cases} x-6=\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 2y-1=\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$x=\frac{12\sqrt{10}+30}{5}$

$y=\frac{3\sqrt{10}+5}{10}$

$$\begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 2y-1=\frac{-3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$x=\frac{-12-30}{5}$

$y=\frac{-3\sqrt{10}-5}{10}$

~~Ответ: $(15;1);(-15;-1);\left(\frac{12\sqrt{10}+30}{5};\frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right);\left(\frac{-12-30}{5};\frac{-3\sqrt{10}-5}{10}\right)$~~

Из 1 получаем: $a-6b\geq 0 \Rightarrow a\geq 6b \Rightarrow$ ~~реше~~

$\Rightarrow$ решение $a=\frac{12\sqrt{10}}{5}$; $b=\frac{3\sqrt{10}}{5}$ – не подходит

~~Ответ: $(15;1;$~~ также не подходит решение $a=-9$ $b=-1$

Ответ: ~~$x=$~~ $(15;1)$; $\left(\frac{-12-30}{5}\right.$ $\frac{-12\sqrt{10}-30}{5}$; $\left.\frac{-3\sqrt{10}-5}{10}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

$x\in(0;10)$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$

~~По ОДЗ $10x-x^2>0$~~

Пусть $10x-x^2=t$

$t'=10-2x$

t_{max} при $x=5$ ($t_{max}=50-25=25$)

$t\in(0;25]$

$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0$

1) $0<t<1$

$t^{\log_3 4}+\underset{t<1}{(t-1)}(\log_3 3-\log_3 5)\geq 0$

$\log_3 3-\log_3 5\leq 0$ – подходит $\Rightarrow$

при всех $t\in(0;1)$ – выполняется

2) $t=1$

$1+1-1\geq 0$

$1\geq 0$ $\Rightarrow$ при $t=1$ – выполняется

3) $t > 1$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$z = \log_3 t$; $z \in (0; \log_3 25)$

$3^z + 4^z \geq 5^z$

ф-ии возрастающие => пересекаются 1 раз =>

при каком-то значении z_0 // графики пересекутся

и ~~него~~ разность поменяет знак

Найдём это значение z_0

~~3^z~~ Из геометрии известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$ =>

=> $z_0 = 2$

$z = 1$

$3 + 4 \geq 5$

$7 \geq 5$

$\Downarrow$

при $z \in (0; 2]$:

$3^z + 4^z \geq 5^z$

При $z \in (2; \log_3 25)$

$3^z + 4^z < 5^z$ $\log_3 t = 2$ $t = 9$

~~t~~ Итого:

$t \in [0; 9]$ - неравенство выполняется

$9 \geq 10x - x^2 > 0$

$10x - x^2 > 0$ $x \in (0; 10)$

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$ $x_1 = 9$, $x_2 = 1$

~~$x \in$~~ $\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in (0; 10) \end{cases}$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le \frac{57}{8}-\left(4\sqrt{2}x-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

Подставим $x=1$ и $x=\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $x=1$

$$3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4 \qquad 0 \le a+b \le 1$$

$$-\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4 \\ 0 \le a+b \le 1 \end{cases}$$ Вычтем из одного другое

$$3 \le -\frac{3}{4}a \le 3$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{3}{4}a = 3$$

$a=-4$ - справедливо всегда.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le -4x+b \le -32x^2+36x-3$$

$16x^2-4x-16 \,\big|\, 4x-5$: $\quad 16x^2-20x \to 4x+4$; $\quad 16x-16$; $\quad 16x-20$; $\quad 4$

~~$16x^2-16x \le b \le -32x^2+40x-3$~~

$$\frac{16x^2-4x-16}{4x-5} \le b \le -32x^2+40x-3 \qquad 4x+4+\frac{4}{4x-5}$$

~~$f' = 4+\frac{0-4\cdot 4}{(4x-5)^2} = 4-\frac{16}{(4x-5)^2}$~~

$$4x+4+\frac{4}{4x-5} \le b \le \frac{19}{2}-\left(4\sqrt{2}x-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(x) = 4x + 4 + \frac{4}{4x-5}$

$f'(x) = \frac{16x^2 - 40x + 21}{(4x-5)^2} = 0$

$D = 1600 - 1344 = 256 = 16^2$

$x_1 = \frac{40+16}{32} = \frac{56}{32} = \frac{28}{16} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

$x_2 = \frac{40-16}{32} = \frac{24}{32} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad 1 \quad \frac{7}{4}$

$\cancel{f}(x)_{min}$ при $x = 1$

$(f(x) = 4)$

$f(x)_{min}$ при $x = \frac{1}{4}$

$(f(x) = 4)$

$f(x) = -32x^2 + 40x - 3$

$f'(x) = -64x + 40 = 0$

$10 - 16x = 0$

$\cancel{8x-5}$ $5 - 8x = 0$ $\quad x = \frac{5}{8}$

$+ \quad -$

$\frac{1}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{3}{4} \quad 1$

$x = \frac{5}{8}$

$f(x) = -32 \cdot \frac{25}{64} + 40 \cdot \frac{5}{8} - 3 = -\frac{25}{2} + 25 - 3 = \frac{19}{2}$

$4 \leq b \leq 9{,}5$

Осталось рассмотреть все целые b из этого промежутка

$\square$ черновик $\boxtimes$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим неравенства при всех значениях ($x = \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; 1$)

1) $x = \frac{1}{4}$

$4 \le b \le -32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{40}{4} - 3$

$4 \le b \le -2 + 10 - 3$ – минимум правой ф-ции

$4 \le b \le 5$

2) $x = \frac{3}{4}$

$5 \le b \le 9$ – максимум левой функции

3) $x = \frac{5}{8}$

$\frac{5}{2} + 4 + \frac{4}{\frac{5}{2} - 5} \le b \le -32 \cdot \frac{25}{64} + 40 \cdot \frac{5}{8} - 3 =$

$4{,}9 \le b \le 9{,}5$

4) $x = 1$

$4 \le b \le 5$ – минимум правой функции

Отсюда делаем вывод, что $5 \le b \le 5$

Т.е. ~~при~~ только при $b = 5$ выполняется при всех $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

Ответ: $a = -4$ $b = 5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(4x+4+\frac{4}{4x-5}\right)' = 4+\frac{0-4\cdot 4}{(4x-5)^2} = 4-\frac{16}{(4x-5)^2}$$

$16x^2-40x+25$

$$\frac{64x^2-160x+100-16}{(4x-5)^2}=0$$

16×16: 16, 16, $= 96$

$$\frac{64x^2-160x+84}{(4x-5)^2}=0$$

$64 \times 21 = 1344$

$1600-1344=256$

$$\frac{16x^2-40x+21}{(4x-5)^2}=0$$

$D = 1600-1344 = 256 = 16^2$

$44-25=19$

$\frac{56}{32}=\frac{28}{16}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

$\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$

$$\frac{4}{4x-5} \le b \le -32x^2+36x$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$6\cdot 2\cdot 3$

$2\cdot 6y\cdot 3$

2) $x^2-12x+36+36y^2-36y+9-9-36=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$ $\quad x-6-6(2y-1)=x-12y$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x^2+144y-24xy=(2y-1)(x-6)$

$x-6=a \quad \cancel{y-6=b} \quad 2y-1=b$

$\cancel{6\cdot 6}$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$27b^2-13ab=-90$

$27b^2-13ab+90=0$

$D=169a^2-$

β

$\sin^2 2\beta=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$

$2(\sin\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta)+$

$+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\left(\frac{\sqrt5}{5}\sin\alpha+\frac{2\sqrt5}{5}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt5}{5}\cos\alpha-\frac{2\sqrt5}{5}\sin\alpha\right)$

$+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$

$\frac{2\cdot5}{25}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{4\cdot5}{25}\cos^2\alpha-\frac{4\cdot5}{25}\sin^2\alpha$

$-\frac{8\cdot5}{5}\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\sin2\alpha\cos4\beta}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha+1=0$

$\cancel{\sqrt5\sin(2\alpha+\varphi)=-1}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi}{6}\right)=$

$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos0=$

$1+1=2 \quad 2$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\sin2\beta}=\sqrt{}$

$\cancel{\cos}\sin^2 2\beta=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$\sin2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+9b^2=90$

$a^2+36b^2-12ab=ab$

$a^2+9b^2=90$

$a^2+36b^2=13ab$

$a^2+9b^2=90$

$-32x^2+36x-3$

$-(32x^2-36x)-3=$

$=-(32x^2-36x+\frac{81}{8})-3$

$2\cdot 4\sqrt{2}\cdot$

$36 \times 4 = 144$

$36 \times 4 = 144$

$\frac{36}{8\sqrt{2}}=\frac{9}{2\sqrt{2}}=$

$=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

$4+4+$

$\cancel{13}\ a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$45\cdot 2=\frac{81\cdot 2}{16}=$

$=5\cdot 9$

$=\frac{81}{8}$

$25b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}$

$\leq b\leq 9{,}5$

$+\quad -\quad +$

$\frac{81}{8}$ $\quad 81-24=57$

$57-49=8$

$-\left(4\sqrt{2}x-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{81}{8}-\frac{24}{8}=\frac{57}{8}$

$4{,}5$

$\frac{16(x-16)}{4x-5}\leq ax+b\leq\frac{57}{8}$

$16x-16<\frac{4x-5}{4}$

$\frac{16x-20}{4}$

$\frac{25\cdot 2}{18}$

$x=\frac{1}{4}$ $\quad \frac{4-16}{1-5}\leq$

$4+4-4=4$

$\frac{8}{2}$

$\frac{57}{8}-\left(\sqrt{2}-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2=$

$=\frac{57}{8}-\left(\frac{-5\sqrt{2}}{4}\right)^2=$

$=\frac{57}{8}-\frac{25}{8}=\frac{32}{8}=4$

$16\cdot 4=$

$=7$

$x=\frac{1}{4}$

$1+4-1$

$4+\frac{4}{1-5}=4-1=3$

$3\leq\frac{1}{4}a+b\leq 4$

$xa+b$

$\frac{57}{8}-\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2=$

$=\frac{57-49}{8}=1$

$\cancel{4x}$

$b-4x$

$4-4=0$

$0\leq a+b\leq 1$

$3\leq a+4b\leq 4$

$1\leq a+b\leq 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{2}{5}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{4}{5}\cos^2\alpha - \frac{4}{5}\sin^2\alpha - \frac{8}{5}\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= -\frac{2}{5}$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin$

$$= \begin{cases} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$($ $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\right)$ $\sin(2\alpha+2\beta) =$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$4(4x^2-x-4)$

$D = 1+64 = 65$

$\vec{U}\{x-6;\ 3(2y-1)\}$ $\quad \{x-6;\ -2\}\ \{1;\ 3(2y-1)\}$

$\vec{V}\{1;\ -2\}$ $\quad |U| = \sqrt{90}$

$\vec{U}\cdot\vec{V} =$ $\quad |V| = \sqrt{5}$

$\sqrt{90}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\varphi = \sqrt{\frac{x_1 y_1}{y_2^2 - x_2^2}}$

$\frac{16x+16x^2-20x-16}{4x-5} \le b \le -32x^2+40x-3$

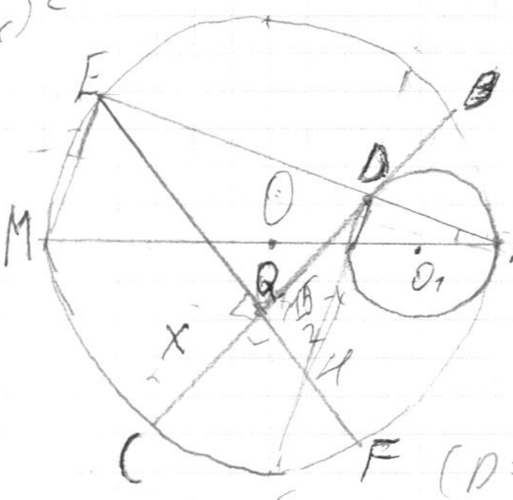
$\frac{16x^2-4x-16}{4x+5} \le b \le -32x^2+40x-3$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x+QD$ $\quad \frac{x}{16-x}=\frac{EQ}{QF}$ $\quad x\cdot(16-x)=EQ\cdot QF$

$QH\cdot QE=\left(\frac{15}{2}-x\right)^2$



$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$-\left(32x^2-40x+\frac{25}{2}\right)$

$\frac{25}{2}-\frac{6}{2}=\frac{19}{2}$

$y=\frac{1}{25}$ $\quad 22-\frac{25}{2}$

$40=2\cdot 4\sqrt{2}$

$\frac{40}{8\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$y\left(\frac{1}{25}\right)$ $\quad \frac{44}{-25}$ $\quad \le b$

$CD=\frac{15}{2}$

$\frac{5}{2}+4-\frac{8}{5}=\frac{25+40-16}{10}$ $\quad BD=\frac{17}{2}$

$4x+4+\frac{4}{4x-5}\le b\le$

$\frac{25}{2}$ $\quad \frac{50}{4}$ $\quad \frac{25}{2}$

$CD\cdot BD$

$\frac{64}{16}$ $\quad 49$ $\quad -\frac{25}{2}+25\cdot 3$

$CD\cdot BD=ED\cdot DA$

1344 | 2
672 | 2
336 | 2
168 | 2
84 | 2
42 | 2
21 | 7·3

$\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}=ED\cdot DA$

$40-35\left(\frac{1}{25}\right)<0$ $\quad \frac{2}{25}$

Q $\quad CQ=x$

$QD=\frac{15}{2}-x$

$\frac{\frac{15}{2}-x}{QH}=\frac{x}{}$

$-32+40-3$

$\frac{(32x-4)(4x-5)-4(16x^2-4x-16)}{(4x-5)^2}=$

$[x]+\left[\frac{1}{y}\right]<0$

$\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{1}{4y}\right]<0$

64×21: 64, 128, 1344

$=\frac{128x^2-16x-160x+20-64x^2+16x+64}{(4x-5)^2}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $\quad f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$3+4+\frac{4}{-2}$

$f(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

$\frac{8}{5-10}$

$-32\cdot\frac{9}{16}+40\cdot\frac{3}{4}-3=$

$=-18+30-3=$

$4+\frac{4}{4x-5}\le ax+b\le\frac{57}{8}-\left(4\sqrt{2}x-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2$ $\quad \frac{8}{5}$

$=30-21=9$

$=\frac{64x^2-160x+84}{(4x-5)^2}=0$ $\quad D=1600-$

$3+4+\frac{4}{-2}=$

$16x^2-40x+21$

$=3+4-2=$

$3+4+\frac{4}{-2}=3+4-2=$ $\quad 4\cdot\frac{5}{2}$ $\quad \frac{5}{2}+4+\frac{4}{}$ $\quad =5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + \cancel{5\log} 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

1) $x<0$

$10x + (x^2-10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$2^{\log_3 5}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$ $\quad 2^5-2^4$

$x^2-10x<0$

$x\in(0;10)$

$10x-x^2$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10-2x$

$x=5$ $(10x-x^2)^{\log_3 3} + \cancel{\log}(10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

$x^m - x^n = (x-1)(m-n) \geq 0$

$50-25$

$\cancel{x\leq 1}$ $x=1$ - выводы

3^5-2^5 $\quad \log_3 25$

$x<1$ $\quad \log_3 (0;$

$3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}$

$m\leq n$

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$x>1$

$m\geq$

$27+64-125$ $\quad 3^{\log_3(10x-x^2)} + 4^{\log_3(10x-x^2)} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

$x^m - y^m$ $\quad 3^{\log_3 25} + 4^{\log_3 25} - 5^{\log_3 25}$

$3^{\log_3(10x-x^2)} +$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)