МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

Преобразуем нижнее выражение: $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$.

Подставим верхнее и получим:

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Тогда $\sin(2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$; От знака этого синуса будет зависеть дальнейшее решение, но пока запишем его просто как „±". Рассмотрим ур-ние:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin(2\alpha) \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2\alpha) \pm 4\cos(2\alpha) = -1$.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку. Пусть $t = \operatorname{tg}\alpha$: $\frac{2t}{1+t^2} \pm 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$.

$(1+t^2) > 0$ при любых t. $2t \pm 4(1-t^2) = -1-t^2$.

$(t+1)^2 \pm 4(1-t)(1+t) = 0$.

$(t+1)(t+1\pm 4(1-t)) = 0$.

Сразу находим 1 корень $t = -1$.
Дальше рассматриваем 2 скобку равную нулю.

1°. ~~т.к.~~ Если $\sin(2\beta) > 0$: $t+1+4(1-t) = 5-3t \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \frac{5}{3}$

2°. Если $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$: $t+1-4(1-t) = 5t-3 \Rightarrow$
$t = \frac{3}{5}$.

Других корней нет
Итого получается возможные значения $tg\alpha$

Ответ: $tg\alpha = -1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

№3.

$$26x + |x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(-x^2+26x) + |26x-x^2|^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$-x^2+26x \geq 0$.

Пусть $-x^2+26x = t$, тогда по $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$: $5^{\log_5 t} +$
$+ 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$.

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1$.

Заметим, что левая часть убывает, а равенство достигается при $\log_5 t = 2$, решение при
$0 < t \leq 25$: $\begin{cases} -x^2+26x \leq 25 \\ -x^2+26x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-25)\cdot(x-1) \leq 0 \\ x(26-x) > 0 \end{cases}$

$x \in (0;1] \cup [25;26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. Посчитаем значение в простых числах: $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$ $f(23)=5$. Зная эти значения и соотношения $f(ab)=f(a)+f(b)$ можем посчитать зн. во всех N числах:

$f=0$ в: 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 26;

$f=1$ в: 10, 14, 15, 20, 21, 28;

$f=2$ в: 22, 25;

$f=3$ в: 26;

Итого на отрезке от [4; 28] f принимает знач. „0" 9 раз; „1" 8 раз; „2" 3 раза; „3" 2 раза; „4" 2 раза; „5" 1 раз.

Заметим, что $f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x)$, т. е. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$, разобьем тогда все пары на „$\frac{x}{y}$" и „$\frac{y}{x}$". Либо для обеих $f=0$, либо ровно для 1 f прин. отрицат. знач. Значит нам нужно вычислить из всех пар $x; y$, кол-во пар для которых $f(x)=f(y)$ и оставшееся кол-во поделить на 2. Это и будет искомое кол-во пар: получаем $(25\cdot24-9\cdot8-8\cdot7-3\cdot2-2\cdot1-2\cdot1)/2=\frac{(600-72-56-10)}{2}=231$.

Ответ: 231.

№2. $\begin{cases} -6x+y=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ Возведем в квадрат 1 равенство с учетом того, что левая часть неотрицательная.

Также дополним второе равенство до полных квадратов. $\begin{cases} (-6x+y)^2 = xy-6x-y+6 \\ -6x+y \geq 0 \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36=90 \end{cases} \Leftrightarrow$

Рассмотрим 1 равенство оно эквивалентно

$\Leftrightarrow 36x^2-12xy+\cancel{y^2}+6x+y^2+y-6=0.$

Оно раскладывается в произведение:

$(4x-y+2)\cdot(9x-y-3)=0.$

Таким ~~образом~~ образом получается система:

$$\begin{cases} (4x-y+2)\cdot(9x-y-3)=0 \\ -6x+y\geq 0 \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Сделаем замену $a=3x-3$; $b=y-6$, т.е. $x=\frac{a}{3}+1$; $y=b+6$.

$$\begin{cases} (\cancel{4a}\ \frac{4a}{3}+4-b-6+2)\cdot(3a+9-b-6-3)=0\ \cancel{296} \\ -2a-6+b+6\geq 0 \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\frac{4a}{3}-b)\cdot(3a-b)=0 \\ -2a+b\geq 0 \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Рассмотрим каждое равенство на гр. с осями a b.

1°. $(\frac{4a}{3}-b)(3a-b)=0.$

две прямые проходящие через точку $(0,0)$ с коэф. $\frac{4}{3}$ и 3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2^0. $-2a+b\geq 0$.

Полуплоскость над прямой проходящей через (0;0) с коэф. 2.

3^0. $a^2+b^2=90$.

Окружность с центром в (0;0) и радиусом $3\sqrt{10}$.

Прямая из 2 неравенства проходит между прямыми из 1, также отрезок из прямой с коэф. $\frac{4}{3}$. Нужно взять решение с отрицательными a, из прямой с коэф. 3 - положительное. Найдем пересечения прямых из первого уравнения с окружностью.

1^0. $a^2+9a^2=90$.

$a=\pm 3 \quad b=\pm 9$.

Следовательно нам подходит решения $a,b=3,9$.

2^0. $a^2+\frac{16a^2}{9}=90$.

$a=\pm\sqrt{\frac{90\cdot 9}{25}}=\pm\frac{9}{5}\cdot\sqrt{10} \quad b=\pm\frac{12}{5}\cdot\sqrt{10}$

Следовательно нам подходит решение $a,b=-\frac{9}{5}\cdot\sqrt{10}, -\frac{12}{5}\sqrt{10}$.

Делаем обратную замену, получается, что решение.

$x,y=(2,15);\left(-\frac{3}{5}\cdot\sqrt{10}+1, -\frac{12}{5}\cdot\sqrt{10}+6\right)$

№6. Данное неравенство эквивалентно тому, что прямая $ax+b$ должна находится над параб-

лой.
$18x^2-51x+28=f(x)$ на заданном полуинтервале.

Значит полученный полуинтервал должен находиться выше этого отрезка, который соединяет точки $x=\frac{2}{3}$, $x=2$. в силу выпуклости параболы. Подставим $f(\frac{2}{3})=2$; $f(2)=-2$. найдем уравнения прямой для которой все отрезки прямых находятся под или на уровне этой прямой. $y=kx+d$.

$$\begin{cases}-2=2k+d\\ 2=\frac{2k}{3}+d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-3\\ d=4\end{cases} \Rightarrow a=-3;\ b=4.$$

Попробуем решить неравенство:

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq -3x+4$; От $\frac{2}{3}$ до 2. $3x-2>0$, тогда

можно домножить на него: $8-6x \geq (-3x+4)(3x-2)$, откуда получим $(3x-4)^2 \geq 0$, что тождественно истина для любого x. Тогда такая прямая всегда будет ~~[illegible]~~ между гиперболами. В такой ситуации нельзя брать отрезок выше этой прямой, потому что он будет пересекать гиперболу, следовательно $a=-3$; $b=4$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

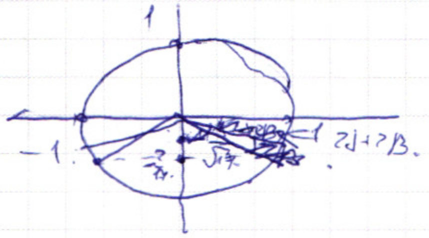
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) \leq +\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$



$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) +$

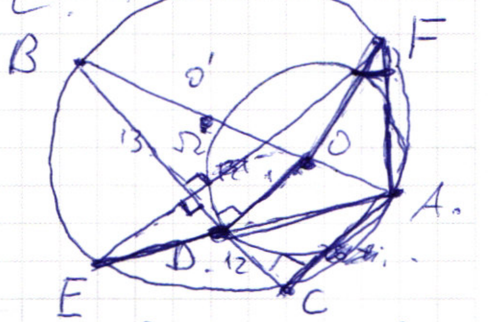
$\cancel{\sin 30+60 = 1 = \sin 30\cdot\cos 60^\circ + \sin 60^\circ\cdot\cos 30 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\sqrt{\frac{16}{17}} = \cancel{-\frac{2}{17}} + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}(\sin(2\alpha+2\beta))$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

№2.

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$\cancel{y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6}$

$y^2+y+36x^2+6x-6-13xy = 0$

$9x^2-18x+y^2-12y-45 = 0$

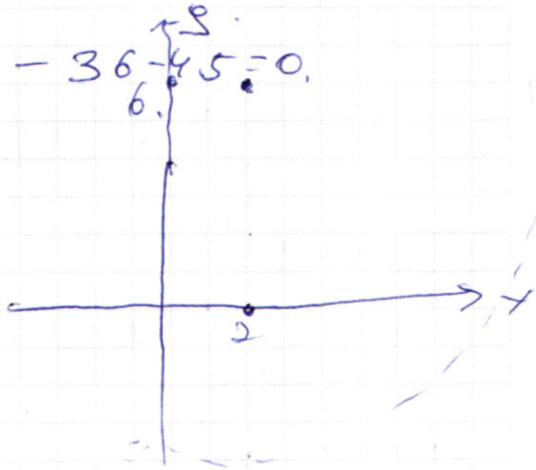
$R-?;\ r-?;\ \angle AFE;\ S_{AEF}$

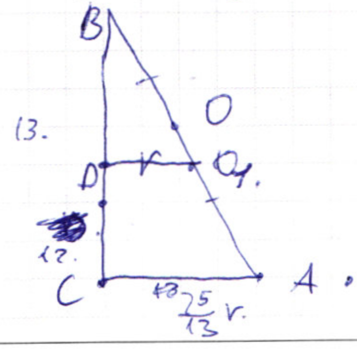
$9(x^2-2x+4-4)+y^2-12y+36-36-45 = 0$

$9((x-2)^2-36+(y-6)^2-36-45 = 0$

$9(x-2)^2+(y-6)^2-117 = 0$

$(3x-6)^2+(y-6)^2 = 117$



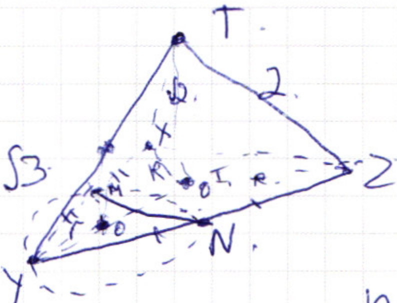


$r = \frac{13}{25}CA$

$CA = \frac{25}{13}r$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\cdot y$ / $4R_1$

$< \frac{\sqrt{3}\cdot 2x\cdot 2y}{2\cdot 4R_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}xy}{R_1}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$ $S_2 = 4S_1$

$R_{XYZ}/2 = R$

$R^2 + h^2 = 4.$

$R^2 + h^2 = 2.$

$f\left(\frac{10}{4}\right) = f(10) + f\left(\frac{1}{4}\right) =$

$= 2 + 0 = 2.$

$f(x/y) < 0$

x 4 5 6 7 8 ...

$D = 2601 - 4\cdot 28\cdot 18 = 2601 - 2016 =$

$= 585.$

2016.

$169 - 2\cdot 13\cdot 18$

$= 169^{\log_5 12}$

$+ 2\cdot 169 \geq 2601$

$169 + 13^{\log_5 13}$

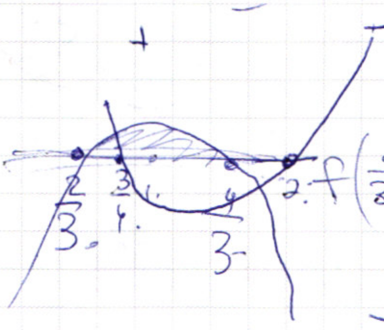
$x = \frac{51 \pm 3\sqrt{65}}{36}$

$\sqrt{65} \approx 8.$

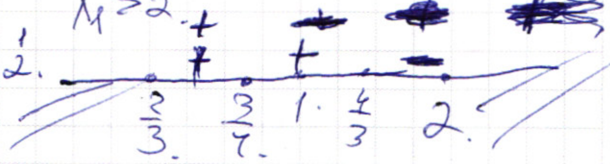
$585 = 9\cdot 65$, $3\sqrt{65}$

$x_1 \approx 2$, $x_2 \approx \frac{3}{4}$

$x_1 > 2$



$f\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) > 0$



$x^2 - 2\cdot 13x + 169 = 0$

$(x-13)^2 = 0$

$(x-25)(x-1) \geq 0.$

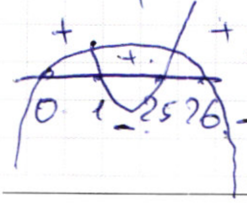
$x(26-x) > 0.$

$1 = 18x^2 - 5x + 28$

$2 = \frac{8-6x}{3x-2}$

$1 \leq ax + b \leq 2.$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(-x^2+26x)}$



$x^2 - 26x = t$

$t^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(-t)}$

$169^{\log_5 12} + 2\cdot 169 \geq 169 + 169^{\log_5 13}$

$\frac{0}{4-8} \leq 2a + b \leq 8 - 34 + 28$

$2a + b \geq 2.$

$2a+b \leq -1$, $a = -1$, $b = 1$

$x=3$: $18\cdot 4 - 10 + 28$, $2a + b \leq 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)