МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\triangle BAC$

~~AC=~~

$BA^2 = AC^2 + BC^2$

$4R^2 = \left(\frac{32}{17}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{3^2}{2}\right)^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №77

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=2: 14$

$x=3: 14$

$x=4: 14$

$x=5: 7$

$x=6: 14$

$x=7: 7$

$x=8: 14.$

$x=9: 14$

$x=10: 7$

$x=11: 4$

$x=12: 14$

$x=13: 3.$

$x=14: 7$

$x=15: 7$

$x=16: 14$

$x=17: 1.$

$x=18: 14.$

$x=19: 1.$

$x=20: 7$

$x=21: 7$

$x=22: 4.$

$x=23: 0.$

$x=24: 14.$

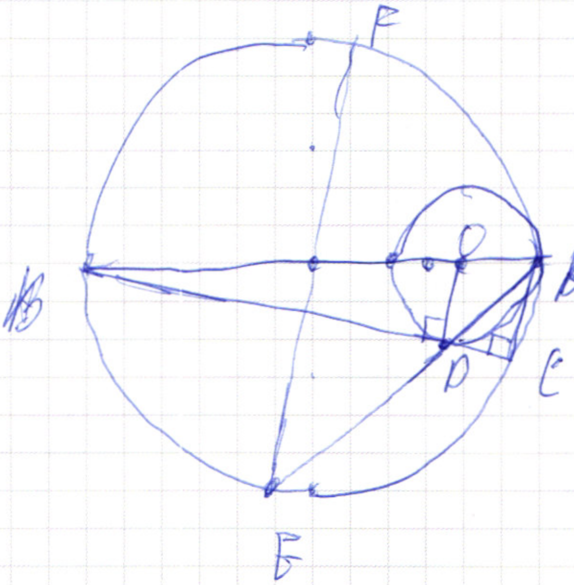
$x=25: 4$

Отв: $14\cdot10+7\cdot7+3\cdot4+3+1\cdot2=$

$=140+49+12+5=$

$=189+17=206.$

№14.



1) $\Omega \cap \omega = A$,
BA - диаметр Ω;
$BC \cap \omega = D$
$AD \cap \Omega = E$
R - радиус Ω
$EF \perp BC$.
O - центр ω
r - радиус ω.

2) BC - кас к ω.
D - точка кас $\Rightarrow$
A - общая точка Ω и ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ E - сер. $\cup BC$.
(лемма Архимеда) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ F - сер. $\cup BAC$
($EF \perp BC$
BC - хорда
E - сер. $\cup BC$)

3) $DC = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$
$\angle ACB = 90°$ (опирается на диам).
а $OD \perp BC$ - (радиус в точ кас) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BOD$ и $\triangle BAC$ $\Rightarrow$

$\frac{OD}{AC} = \frac{17}{32} \Rightarrow \frac{BO}{BA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32}$

$AC = \frac{32}{17} r$; $64R - 32r = 34R \Rightarrow 30R = 32r$
$R = \frac{16}{15} r$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow x \in [0; 1] \cup \{9\}$.

Отв: $x \in [0; 1] \cup \{9\}$.

№5.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0

x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(x)$	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

Подсчитаем для любого x; положительного y, очевидно что $f(y) > f(x)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^{\log_3 5} - a^{\log_3 4} \le a.$

$x^{\beta} - x^{\gamma}$

$\beta > \gamma.$

$\frac{225}{4} + \frac{256\cdot 225}{799}$

$\frac{225\cdot 1823}{3196}$ 3^n $1823.$

$5^n - 4^n \le 3^n.$

$\frac{225(799+256\cdot 4)}{3196.}$

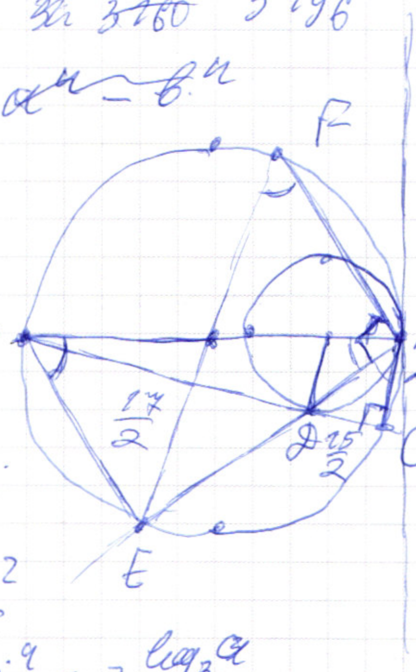
3196

$a^4 - b^4$

$r = \frac{16\cdot 15}{7\sqrt{79}}$

$r^2 = \frac{256\cdot 16^2}{(64-15)(64+15)} = \frac{16^2\cdot 16^2}{49\cdot 79}$

$5^{\log_3 a} - 4^{\log_3 4} \le 3^{\log_3 a}.$



$\left(\frac{5}{3}\right)^n - \left(\frac{4}{3}\right)^n \le 1.$

$4R^2 = r^2 + 256$

$4\cdot\frac{32^2}{15^2}r^2 = r^2 + 256$

$\frac{r}{R-r} = \frac{15}{17}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^4 - \left(\frac{4}{3}\right)^4 \le 1.$

$r^2\left(\frac{4\cdot 32^2 - 15^2}{15^2}\right) = 256.$

$17r = 15R - 15r.$

$32r = 15R$

$R = \frac{32}{15}r.$ $R = \frac{32\cdot 16}{7\sqrt{79}}.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~Также рассмотрим две~~

~~Не~~ $t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$t \geq 3^{\log_3 t \cdot \log_3 5} - 3^{\log_3 4 \cdot \log_3 t}$

$t \geq 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

Рассмотрим две функции

$f(t) = 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

$g(t) = t$.

$$f'(t) = \frac{(\ln 5 \cdot 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \cdot \ln 4)}{t \cdot \ln 3}$$

Только заметим, что при $t > 0$ $f'(t) > 0$ =>

=> $f(t)$ - возр.

~~$f''(t) =$~~

$$\cancel{f'(t) = \frac{5^{\log_3 t}(\ln 3 \ln^2 5 \, 5^{\log_3 t} -}{t^2 \ln^2 3}}$$

$$f''(t) = \frac{5^{\log_3 t} \ln 5 (\ln 5 - \ln 3) - 4^{\log_3 t} \ln 4 (\ln 4 - \ln 3)}{t^2 \cdot \ln^2 3}$$

Также, заметим, что при $t > 0$ $f''(t) > 0$ =>

=> $f'(t)$ - возр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $t = 1 \Rightarrow f(t) = 0$.

$f'(t) = \dfrac{\ln 5 - \ln 4}{\ln 3} = \dfrac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 3} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(1) < g'(1) = 1 \Rightarrow f$

f – возр

f' – возр

$\Rightarrow$ на отрезке от $[0; 1]$ $f(t) \le g(t)$

$f'(t) < g'(t)$

Пусть $t = 9 \Rightarrow f(t) = 9$

$g(t) = 9$

$f'(t) = \dfrac{25 \ln 5 - 16 \ln 4}{9 \ln 3} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на отрезке от $[9; +\infty)$

$f(t) > g(t)$, поскольку $f'(t) > g'(t)$

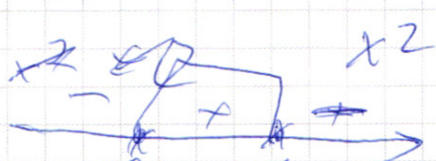
при этом на отрезке от $(1; 9]$ $f(t) \le g(t)$,

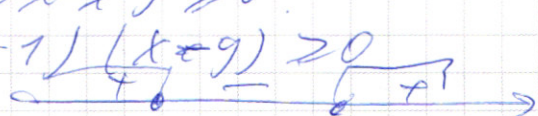
~~поэтому~~ $f'(t)$ позволит снова функции f в какой-то момент сравнять функцию y на отрезке и при этом её $f'(t) > y'(t)$, то это не могло

$\Rightarrow 10x - x^2 \le 9 \Rightarrow$

$x^2 - 10x + 9 \ge 0$

$(x-1)(x-9) \ge 0$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=1 \\ t=9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y=1 \\ x=15 \end{array} \\ \\ \begin{cases} k=-\frac{6}{\sqrt{10}} \\ t=-\frac{24}{\sqrt{10}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}} \\ x=6-\frac{24}{\sqrt{10}} \end{array} \end{array}\right.$$

Отв: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}} \\ x=6-\frac{24}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right.$

№ 13.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

1) $10x-x^2 > 0.$

2) $10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+3^{\log_3 5\cdot\log_3(10x-x^2)}$

$$10x-x^2 \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}$$

3) Рассмотрим неравенство от переменной t: $t \geq t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$

Отныне рассмотрим две функции от t.

$g(t) = t$

$f(t) = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

В нашем случае $t = 10x - x^2$, $t > 0$.

~~Жат~~

~~$f'(t) = \ln t \,(t^{\log_3 5}$~~

$$f'(t) = \frac{t^{\log_3 5} - \cancel{\log}\, t^{\log_3 4}}{t}$$

$f'(t) \vee 0$.

$$\frac{t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}}{t} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(\log_3 5 - \log_3 4)}{t} \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)}{t} \vee 0$$

$+ \quad 0 \quad - \quad 1 \quad +$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45. & (2) \end{cases}$$

(2) $\cancel{(x-6}\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90.$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90.$

~~Введём~~

Введём новые переменные $t=x-6$

$k=2y-1.$

(2) $t^2+(3k)^2=90$

(1) $\cancel{\{x\geq 12y}$

1. $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$\cancel{\{x\geq 12y \Leftrightarrow t\geq 6k}$

2. $t-6k=\sqrt{tk}$

$\cancel{t\geq 6k}$

3.

$$\begin{cases} t^2+9k^2=90. \\ t-6k=\sqrt{tk} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+9k^2=90. \\ t^2+36k^2-12tk=tk \\ t\geq 6k. \end{cases}$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~$\begin{cases} t \geq 6k \\ (t-9k)(t-4k) \end{cases}$~~

$$\begin{cases} t \geq 6k \\ t^2 - 13tk + 36k^2 = 0 \quad (3) \\ t^2 + 9k^2 = 90 \quad (4) \end{cases}$$

(3) $t^2 - 13tk + 36k^2 = 0 \quad \Big| : k^2 \neq 0$

$(k = 0 \Rightarrow t = \sqrt{90} \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 - 13tk + 36k^2 \neq 0)$

$$\left(\frac{t}{k}\right)^2 - 13\frac{t}{k} + 36 = 0.$$

~~$D=$~~ $\left[\begin{array}{l} \frac{t}{k} = 9 \,\big|\cdot k \neq 0 \\ \frac{t}{k} = 4 \,\big|\cdot k \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9k \\ t = 4k \end{array}\right.$

(4) $$\begin{cases} t \geq 6k \\ \left[\begin{array}{l} t = 9k \\ t = 4k \end{array}\right. \\ t^2 + 9k^2 = 90 \end{cases}$$

1. $t = 9k$

$81k^2 + 9k^2 = 90.$

~~$k = \pm 1$~~

$\left[\begin{array}{l} k = 1;\ t = 9 \\ k = -1;\ t = -9 \text{ — не подходит по } t \geq 6k. \end{array}\right.$

$-9 < -6$

2. $t = 4k.$

$16k^2 + 9k^2 = 90.$

$25k^2 = 90$

$k^2 = \frac{18}{5} = 3{,}6 = \frac{36}{10}.$

$\left[\begin{array}{l} k = \frac{6}{\sqrt{10}} \quad t = \frac{24}{\sqrt{10}} \\ k = \frac{-6}{\sqrt{10}} \quad t = \frac{-24}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

не подходит по $t \geq 6k$

$\frac{24}{\sqrt{10}} \not\geq \frac{36}{\sqrt{10}}$

~~Отв:~~

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

(2) $2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(1) $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cancel{s0}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad |\cdot\sqrt{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha = 1$ $\quad |: \cos^2\alpha \neq 0$

(если $\cos\alpha=0$, то $2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha \neq 1$)

$2\,tg\alpha + 4 = tg^2\alpha + 1$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$tg\alpha = 3$

$tg\alpha = -1$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ \Big| \cdot \sqrt{5}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cancel{2}4\cos^2\alpha + 2 \cancel{\cos...} = -1.$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha = -3 \ \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$

(cos ≠ 0, иначе $2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha \neq 3$).

$2\operatorname{tg}\alpha - 4 = -3\operatorname{tg}^2\alpha - 3$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0.$

$\operatorname{tg}\alpha = -1.$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

3) Если $\sin 2\beta$ принимает только одно из двух значений $\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ имеет лишь два различных значения, но они имеют нам минимум 3 $\Rightarrow$ $\sin 2\beta$ принимает оба из значений $\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right\} \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = 3$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg}\alpha = 3 \end{array}\right.$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$ $\quad 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$.

$tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$.

$\frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$.

$\frac{\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{4} - 1} = -\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{3}}$

$\cancel{tg}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\frac{3}{4}}\cancel{\sqrt{3}} - 1}$

$\cancel{\frac{2}{4}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

~~$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$~~

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin\alpha+\beta \cos\alpha+\beta$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$e^{\ln t \cdot \log_3 5}$

$2\,\cancel{\cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = +\frac{2}{5}$

$\frac{e^{\ln t \log_3 5}}{t}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

$\cos^2\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$x^2 - 10x \geq 0.$

$x^2 + \cancel{(x^2 - 10x)}^{\log_3 4} \geq x^2 +$

$10x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 10x < 0.$

$x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5$

$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$ $3^{\log_3 5} \log_3$

$\cancel{(x x}$ $\cancel{\geq x^2 + (10x - x^2)}^{\log_3 5}$

$\cancel{a^{\log_3 4 - 1}}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0.$

$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0.$

$a^{\log_3 5 - 1}$ $\cancel{(10x - x^2)(1 +}$

$-a^{\log_3 4 - 1}$

$(10x - x^2)(1 + (10x - x^2)^{\log_3 4 - 1} - (10x - x^2)^{\log_3 5 - 1})$

$1 + (10x - x^2)^{\log_3 \frac{4}{3}} - (10x - x^2)^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0.$

$a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0.$

$a + a^2 - a^3 \geq 0.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^2 + k^2 = 46.$

$t - 2k = \sqrt{\quad}$

2 $\quad$ 1, 3, 4, 6.

2 $\quad$ 1, 2, 3, 4, 6

$(x-6)(2y-1).$ $\quad$ $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$

$2xy - 12y - x + 6.$ $\quad$ $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{2}{6}$

$(x-6) = t$ $\quad$ $t - 6k \geq 0.$

$2y - 1 = k$

$\sin\alpha + \cos\alpha$ –

$t - 6k = \sqrt{tk}$

$t^2 + (3k)^2 = 45.$ $\quad$ $t = 4k$

$t = 9k.$

$t^2 + 36k^2 - 12tk = tk$ $\quad$ $18k^2 = 46$

$$\begin{cases} t^2 + 9k^2 = 46. \\ t^2 + 36k^2 - 13tk = 0. \end{cases}$$

$t = \frac{13k + 5k}{2} = 9k$

$t = \frac{13k - 5k}{2} = 4k$

~~$46 + 27k^2 - 13tk = 0.$~~

$k^2 = \frac{5}{2}$

$D = 169 - 144 = 25$ $\quad$ $k = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$(t-4k)(t-9k) = 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-12y\geq 0.$

$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6.$

$x^2+36y^2-12x-36y=45.$

$x\geq 12y$ $\quad x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0.$

$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

1 $\quad$ 2 $\quad$ 6 $\quad$ 3 $\quad$ $\ln 5$

$6y$ $\quad +36+9$ $\quad$ 4

$\cancel{x^2}$ $\quad$ 9

$\cancel{x^2}\cdot(x-6)^2+(6y-3)^2=45.$

$\ln 7$

$\sqrt{2}$ $\quad 9\cdot 20.$ $\quad \cancel{13x}$ $\quad \cancel{12}x.$

$x-6=t$

$6\sqrt{5}.$

$6y-3=k.$

$5^t-4^t\leq t.$

$(x-6)^2$

$-2(6y-3)$

$(x-6)^2.$

$\ln 5\, 5^t-4^t\ln 4.$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$30R - 16r = 17r$

$30R = 32r$

$R = \frac{16}{15} r$ $\quad \frac{r}{\frac{32}{15} r}$ $\quad \frac{15}{32}$

2.

$AB = \frac{2 \cdot 16^2}{\sqrt{17 \cdot 47}}$

$r^2 \left(\frac{4 \cdot 16^2 - 15^2}{15^2} \right) = 16^2$

$\cancel{17}$

$r^2 = \frac{16^2 \cdot 16^2}{17 \cdot 47}$

$\frac{r}{2R}$

$\cancel{2} \cdot \cancel{47}$

$AD^2 = \frac{16^2 \cdot 15^2}{17 \cdot 47} + \frac{15^2}{4} =$

$15 \sqrt{\frac{1823}{3196}}$ $\quad r = \frac{16 \cdot 15}{\sqrt{17 \cdot 47}}$

$= 15^2 \left(\frac{16^2}{17 \cdot 47} + \frac{1}{4} \right) =$

$90 - \alpha$ $\quad 45 - \frac{\alpha}{2}$ $\quad R = \frac{16^2}{\sqrt{17 \cdot 47}}$

$= \frac{15^2 (4 \cdot 16^2 + 17 \cdot 47)}{4 \cdot 17 \cdot 47}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 47 \\ \hline 119 \\ 68 \\ \hline 799 \end{array}$$

$45 + \frac{\alpha}{2}$

$4 \frac{16^2}{15^2}$

1024

~~1799~~

1800

1823 $\quad r^2 \left(\frac{4 \cdot 16^2 - 15^2}{15^2} \right) = \frac{R^2}{16}$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32}$

~~$34R =$~~

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$R = \frac{16}{15} r$.

$r = \frac{16 \cdot 15}{\sqrt{1799}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\sin\alpha}\cdot\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt5}+\cancel{\sin}\frac{4}{\sqrt5}\cos^2\alpha-\frac{4}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}$

5

ya: $f(1)=0$.

$f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})$ $\qquad =\frac{3}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=\frac{3}{\sqrt5}\ \Big|\cos^2\alpha$

$5^t\geq 4^t+$

$f(\frac{1}{a})=-f(a)$ $2\operatorname{tg}\alpha+4=3+3\operatorname{tg}^2\alpha$

12 $\qquad f(x\cdot y)=f(x)+f(\frac{x}{y})$

$5^t\leq 4^t+3^t$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq$

$\cancel{4}^{\log_3}$ $\qquad$ $x\geq 5$

e^t

$5^x-4^x\geq$ $\qquad \ln5\cdot5^x-\ln4\cdot4^x$

$f(x)-f(y)$ $e^{\ln5\,x}-e^{\ln4\,x}$

$\ln5\,e^{\ln5 x}-\ln4\,e^{\ln4\cdot x}$

$\frac{16x - \cancel{20} + 4}{4x - 5}$

$\hat{\ln a}$

$4 + \frac{4}{4x-5} \leq a_{x+6} \leq$

$a^{\log_3 5} - a^{\log_3 4} \leq a.$

$\cancel{D} =$

$a \leq 1.$

$\frac{D}{4} = 18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 32 =$

$= \cancel{2} \cdot 3^4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2^5 =$

$= 2^2 \cdot 3 (3^3 - 4 \cdot 2^3) =$

$= 2^2 \cdot 3($

$\cancel{a + a}$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$1 + a^{\log_3 4} \ln a \cdot a^{\log_3 5} \ln a.$

$125 \geq 25.$

$27 + 64 \geq 125.$