МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \Rightarrow$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

~~$\sin 2\alpha =$~~

$$\left[\begin{aligned}&\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \left(+\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ &\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{aligned}\right.$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \operatorname{tg}^2\alpha = x$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \pm 4\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = -1 \Rightarrow 1)\ \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4-4x^2}{1+x^2} = -1$$

$$\frac{2x+4-4x^2}{1+x^2} = -1 \Rightarrow \cancel{2x+4-4x^2 = \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{x^2}{\sqrt{17}}}$$

$$-(2x+4-4x^2) = 1+x^2 \Rightarrow 3x^2+2x-5=0 \Rightarrow x = \left[\begin{aligned}&1\\ &-\frac{5}{3}\end{aligned}\right.$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1;\ -\frac{5}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm 1$$

$$2)\ \frac{2x-4+4x^2}{1+x^2} = -1 \qquad \begin{aligned}&2x-4+4x^2 = -1-x^2\\ &2x-3+5x^2 = 0 \Rightarrow x = \left[\begin{aligned}&-1\\ &3/5\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = -1;\ \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ответ: $1; -1; \sqrt{\frac{3}{5}}; -\sqrt{\frac{3}{5}}$

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}\\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45\end{cases}$$

~~Выд. полный квадрат~~

$$\cancel{\Leftrightarrow (3x-3)^2+(y-6)^2 = 0 \Leftrightarrow}\ \cancel{x=}$$

$$\cancel{\begin{cases}3x-3=0\\ y-6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=6\end{cases} \quad (x;y) = (1;6)}$$

Выделим полные квадраты $\Rightarrow (3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \iff y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(x-1)=A \qquad y=B+6$

$(y-6)=B \qquad 6x=6A+6$

$\Rightarrow B-6A+0=\sqrt{AB}$

$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ B-6A+0=\sqrt{AB} \ (*) \end{cases} \quad (B-6A)^2=AB \quad \Rightarrow \begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ B^2+36A^2=13AB \end{cases}$

$27A^2=13AB-90 \qquad B=\pm\sqrt{90-9A^2}=\pm3\sqrt{10-A^2}$

1) $27A^2=39AB-90 \qquad 9A^2=13AB-\cancel{9}0^{3} \qquad 9A^2=13A\sqrt{10-A^2}\mp 90$

$\sqrt{10-A^2}$

$9A^2+\cancel{9}0^{3}=13A\sqrt{10-A^2} \qquad 9A^2+30=13A\sqrt{10-A^2}$

$81A^4+540A^2+900=1690A^2-169A^4$

$250A^4+-1150A^2+900=0$

$5A^4-23A^2+18=0 \qquad A^{2}=\left[\begin{array}{l}1\\3{,}6\end{array}\right.$ ~~$A=\pm1; \pm\frac{18}{5}$~~

2) $9A^2+30=-13A\sqrt{10-A^2}$

Получим то же самое $\qquad A^2=1;\ 3{,}6 \quad B^2=81;\ \frac{288}{5}$

$A^2=1;\ B^2=81$. Проверил на доп корни, AB (где (*)) ≥ 0, значит

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$: $(1;9)$ ~~$(1;-9)$~~ $(-1;-9)$ ~~$(-1;9)$~~ — такие корни

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-6=-9 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

Проверкой в исходные получаем, ~~что $y-6x=-3$~~, 1-пара не подх

~~$\begin{cases} 3-0=\sqrt{0} \end{cases}$~~

$\begin{cases} 15-12=\sqrt{30-12-15+6} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} -3-0=\sqrt{\ldots} \end{cases}$ — нет реш

$\Rightarrow A^2=3{,}6;\ B^2=\frac{288}{5} \Rightarrow (x;y)=\left(\sqrt{\frac{18}{5}};\sqrt{\frac{288}{5}}\right);\left(-\sqrt{\frac{18}{5}};-\sqrt{\frac{288}{5}}\right)$

И так же отсеиваем

Ответ: $(2;15);\left(\sqrt{\frac{18}{5}};\sqrt{\frac{288}{5}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + (26x-x^2)^{\log_5 13} \\ 26x-x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0;26) \end{cases}$$

Т.к $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ если $b>0,\ c>0$

$x^2-26x=(-t)$, т.к $(-t)>0$ по огранич. то $|t|=+t$

~~$t^{\log_5 12} + \geq t + t^{\log_5 13}$~~

~~$(-t)^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 5} + (-t)^{\log_5 13}$~~

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq t^{\log_5 13}$ $12^2+5^2=13^2$

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq t^{\log_5 \sqrt{(12^2+5^2)}}$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t} \ \Big|: 13^{\log_5 t}$, т.к >0

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1$

$\log_5 t = m$

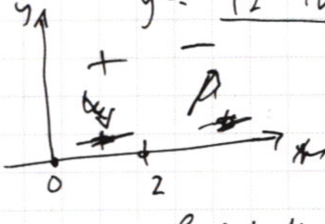
$12^m + 5^m \geq 13^m$

$y = 12^m + 5^m - 13^m$

$12^2+5^2=13^2 \Rightarrow 2$ корень

~~$y = \frac{12^m+5^m}{13^m}$~~

~~$y' = \frac{12^m \ln\frac{12}{13} - 5^m \ln\frac{5}{13}}{13^m}$~~ > 0 т.к $13^m > 0$



Значит смена знака происходит в 2; при $m=\frac{1}{2}$; $\sqrt{12}+\sqrt{5}-\sqrt{13} \geq 0$

что верно т.к $17+2\sqrt{12\cdot5} \geq 13$; но и при $m=3$ $12^3+5^3-13^3 \leq 0$

т.е $m \in$ ~~любое~~ $(0;2] \Rightarrow$ ~~$x \in (0;26)$~~

~~$2 \geq \log_5 t > 0$~~ $\log_5 t \leq 2$; $t \leq 25$ Ответ: ~~(0; 26)~~

~~([illegible] (0;1) ∪ (..; 25))~~

$26x - x^2 \leq 25$

$26x - x^2 - 25 \leq 0$

$+ \quad - \quad +$; $1 \quad 25$

$0 \quad 26$

$1 \quad 25$

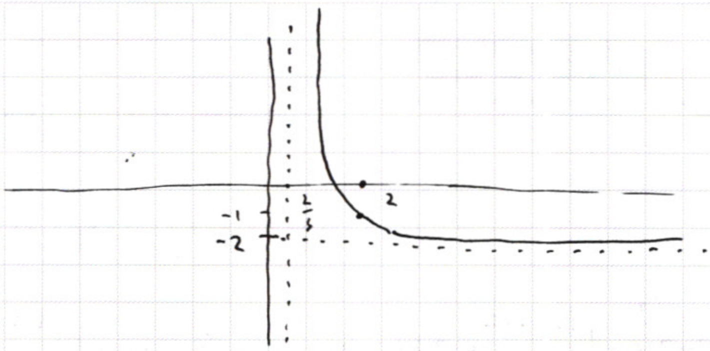
Ответ: $(0;1] \cup [25;26)$

☐ черновик ☑ чистовик   Страница № 3

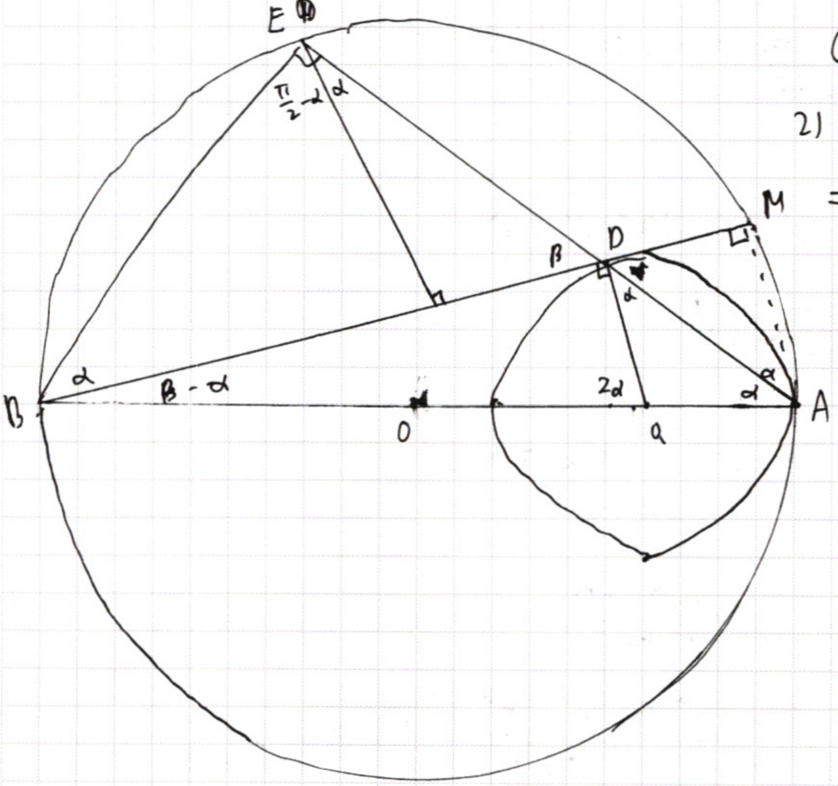
(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

№ 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$$



№ 4



1) O – ц. Ω Q – ц. ω

$Q \in AB$ по св-ву касающихся окр

2) Если $\angle DQB = 2\alpha$, то $\angle DAB = \alpha =$

$= \angle QDA$ (равнобедр.) $\Rightarrow \angle EDB =$

$\frac{\pi}{2} - \alpha$, т.к $\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha$;

$\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ для удобства

$\angle DBA = \beta$. $\frac{\pi}{2} - 2\alpha = \beta - \alpha$

3) $DQ = AQ = 13\operatorname{ctg} 2\alpha$

$BQ = \frac{13}{\sin 2\alpha}$

$BA = \frac{25}{\sin 2\alpha}$ ($\angle BMA = 90^\circ$)

т.к опир на диам.

$$\frac{25}{\sin 2\alpha} = \frac{13}{\sin 2\alpha} + \frac{13\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{13}$$ (Тр. не тупой)

$R(\Omega) = \frac{65}{2}$ $R(\omega) = \frac{156}{5}$

а) $32{,}5$; $31{,}2$

4) $\angle BEA - 90^\circ$, $\angle BEF = \frac{\pi}{2} - \alpha$. В $\triangle BEO$ $\angle EOB =$

$= 2\alpha$ $(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha)$, т.е O леж на $EF \Rightarrow EF$ диаметр

(центр $\angle = 2\alpha$; впис α)

$\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle AFE = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\cos^2\alpha = \frac{25}{26} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

б) $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$

в) $AE = \frac{65\cdot 5}{\sqrt{26}}$; $AF = \frac{65}{\sqrt{26}} \Rightarrow S = \frac{65^2\cdot 5}{52}$

Ответ: $32{,}5$; $31{,}2$; $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$; $\frac{65^2\cdot 5}{52}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \quad \cdot 4 \\ B^2+36A^2=13AB \end{cases}$ $\begin{cases} 36A^2+4B^2=360 \\ 36A^2+B^2=13AB \end{cases}$ $3B^2=360-13AB$

$B=x-1$

$1+B=x$

$3B^2+13AB=360$ $3B^2+12AB+AB-360=$

$B(3B+13$

$9x^2-18x+9=y^2-12y+38=x^{45}$

$B-6A$

$B+1=x$

$y-6-6(x-1)=y-\cancel{6}-6x+\cancel{6}$

$B-6A=\sqrt{AB}$ $AB\geq0$ $B^2-12AB+36A^2=AB$

$\begin{cases} 9A^2-90+B^2=0 \\ B^2+36A^2=13AB \end{cases}$ $(3A+B)=u$ $AB=V$ $(3A+B)=u$

$36A^2+4B^2=20$ $9A^2+B^2+6AB=u^2$

$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ 36A^2+B^2=13AB \end{cases}$ $\begin{cases} u^2-6V=90 \\ \end{cases}$ $9(x-1)^2+(y-6)^2=u$

$AB=V$ $B^2-12AB+36A^2$

$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ B-6A=\sqrt{AB} \end{cases}$ $\cancel{A^2+B^2}$ $3A+B=u$

$(y-6)-(6x-6)$ $9A^2=90-B^2$

$y-6-6x+6$ $360-4B^2$

$3A+B=u$

$B+3A$ $-3A-B=V$

$B^2-12AB+360-4B^2=\sqrt{AB}$

$-3B^2-12AB+360=AB$

$-3B^2-\cancel{12AB}$ $360-3B^2=13AB$

$3\cancel{60}-3B^2$ $3B^2=360-13AB$ $3B^2=360-13B\cdot\sqrt{\ }$

$(1;15)$ $(0;-3)$ $15-6$ $(8\cdot9)$ $72+90$ $\frac{288}{5}$

$y-6x$ $y-6x$ 3^2+1^2 $9+81$ $y-6x$ $(1;9)$ $(1;-9)$ $(-1;-9)$ $(-1;9)$

$B^2=90-9A^2$ $90-\frac{18}{5}\cdot9$ $\frac{162}{5}$ $90-\frac{450}{162}$ 288

$B^2=\frac{288}{5}$ $\left(\sqrt{\frac{18}{5}};\sqrt{\frac{288}{5}}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{18}{5}};-\sqrt{\frac{288}{5}}\right)$ $y-6x$

$288+162=450$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ 36A^2+B^2=13AB \end{cases}$

$B^2=90-9A^2$ $B=\pm 3\sqrt{10-A^2}$

$27A^2=13AB-90$

$27A^2=12A$

$9A^2=\pm 13A\sqrt{10-A^2}\mp 90$

1) $9A^2=13A\sqrt{10-A^2}-30$

$9A^2+30=13A\sqrt{10-A^2} \Rightarrow 81A^4+540A^2+900=169A^2(10-A^2)$

$81A^4+540A^2+900=1690A^2-169A^4$

$169+81=250$

$900 : 25 = 36$

$1150 : 25 = 46$

$1690-540=1150$

$t^2-23t+90$

$15\cdot 6$ $(20+3)^2=400+$ $18\cdot 5=90$

$569-4\cdot 90$

$569-300=209$

$10A^4-46A^2+36A^2$

$5A^4-23A^2+18A^2$

$900 : 50 = 18$

$1150 : 50 = 23$

$169A^2(10-A^2)$

$1690A^2-169A^4$ $(23)^2=400+120+9$

A

$529-360=169$

$23\pm\sqrt{529-360}$

$\frac{23\pm 13}{10}$ $\frac{10}{}$

$\frac{324}{25}\cdot 9+B^2=90$

$39=-13\cdot 3$

$4-$ $\left(\frac{18}{5}\right)^2$

$B^2=90-\frac{9\cdot 324}{25}$

$9(10-\frac{324}{25})$

$9-12$

$x;y$ $(2;9)$ $(0;-9)$

$x;y$

$A=1;\ x=2$

$(0;3)$ $(-2;9)$ $-(2;9)$ $(2;3)$

$y-6=3$ $y-6=-3$ $(0;3)$ $(0;9)$

$B=$ $A=-1;\ 0$

$y=9$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$(1;9)$; $(1;-9)$ x $(2;15)$; $\cancel{(2;-3)}$

$9-12$

$(-1;-9)$; $(-1;9)$ y $\cancel{(0;-3)}$; $(0;15)$ $3=\sqrt{-3+6}$

$y-6x$ $3-12$

$-3-6$ $15-0$ $9=\sqrt{-9+6}$

$15=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ 2\alpha+2\beta = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (2) \end{array}\right.$

$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha$

$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\beta = ar \end{array}\right.$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

$\cancel{\sin^2}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$ $\operatorname{tg}\alpha =$

$\sin$

$\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

4

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = \frac{1}{17}$

$\cos 2\alpha \quad \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$-4x^2+2x+4$

$-(4x^2-2x-4)$

$-\cancel{(4x^2+}$

$D = 1+4\cdot4 = 17 \quad D = 4+4\cdot4\cdot4 = 68 = (2\sqrt{17})^2$

$x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \qquad x =$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = 1$

$5x^2+2x-3=0$

$4x^2+2x-4 = 1+x^2$

$t^2+2t-15$

$3x^2+2x-5=0$

$t^2+2t-15$

$+5; -3$

$-1; +\frac{3}{5}$

$x = \frac{3}{3} \quad -\frac{5}{3}$

$1; -\frac{5}{3}$

$5x^2+2x-3=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{2}{2}$; $1; -1$ | $\frac{2\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{24}{5}}$ $\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\frac{4}{5}$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{5}$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 45$

$9x^2 + 36 -$

$\cancel{9+3}6 - 18 - 48 = 45$

$9 + 36 - 18 - 72 = 45$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 0$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12x + 36 = 0$

(

$xy - 6x - y + 6$ $(y-6)(x-1) = y - 6x$

$y(x-1) - 6(x-1)$ $xy - y - 6x + 6$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$

$9x^2 - 18x + y^2 - 12y = 45$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 =$

$9x^2 + 18 + 9 = y^2 - 12y + 36$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12x + 36$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = -6x - y + 6$

$y - 6x$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12x + 36 = 45$

$9 + y^2 - 18 - 12y = 45$

$y^2 - 12y = 54$

$y^2 - 12y - 54 = 0$

$D = 36 + 54 = 90 = 30 \cdot 3$ $3 \cdot 3 \cdot 10$ $3\sqrt{10}$

$6 \pm 3\sqrt{10}$

$9x^2$ $(3x-3)^2$

$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 45$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 - 45 = 45$

$6 - 6 = \sqrt{6 - 6 - 6 + 6}$

9

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 0$

$(1; 6)$

$9 + 36 - 18$

$(y - 6x)^2 = xy -$

$9 + y^2 - 18 - 12y = 45$

$y^2 - 18 - 12y = 36$

$y^2 - 12y - 54 = 0$

$36 + 54$

69

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq (x^2-26x) + (26x-x^2)^{\log_5 13}$

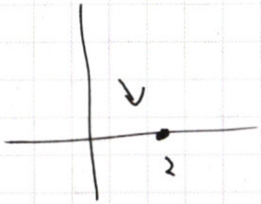
$26x-x^2>0 \quad x\in(0;26)$

$|x^2-26x|>0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq -(26x-x^2)+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} \geq -t+t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$



2

$12^x+5^x \geq 13^x$

$12^x-5^x-13^x \geq 0 \qquad 12^3-5^3-13^3$

$y = 12^x \ln 12 - 5^x \ln 5 - 13^x \ln 13$

$t \leq 25$

$\sqrt{12}+\sqrt{5} \geq \sqrt{13}$

12 17+

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ +\ 125 \\ \hline 1873 \end{array}$$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{5}-\frac{1}{13}$

$\frac{12+5}{12\cdot 5} \quad \frac{17}{60} \geq \frac{1}{13}$

$x^2-26x+25\geq 0$

$x^2-26x+25\geq 0$

25 1

$(x-1)(x-25)$

1 25

.13

$12^x+5^x=13^x$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 2628 \\ +\ 125 \end{array}$$

$26x-x^2-25\leq 0$

$200-100-25$

$200-100-25$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ +\ 144 \\ \hline 3168 \\ +\ 125 \\ \hline 3293 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$160\cdot 3$

480

$26x-x^2-25\leq 0$

$x^2-26x+25\geq 0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq x^2-26x+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

25 $\quad 2 \geq 1+2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}$ $\cancel{+t}$

$+t(26x-x^2) \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 t}$

$t^{\cdots}+t^{\cdots}\geq t^{\cdots} \qquad 0<t\leq 2$

$26x-x^2\leq 25 \qquad \log_5 t\leq 2 \qquad t\leq 25$

$26x-x^2-25\leq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geqslant \cancel{4}(x^2-26x)+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\quad t<0$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geqslant (x^2-26x)+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$|t|^{\log_5 12} \qquad t=x^2-26x$

$(-t)^{\log_5 12}+(-t) \geqslant (-t)^{\log_5 13}$

$-t=u \qquad u^{\log_5 12}+u^{\log_5 5} \geqslant u^{\log_5 13}$

$(2+5)^2$

$u^{\log_5 12}+u^{\log_5 5} \geqslant u^{\log_5 13} \geqslant u^{\frac{1}{2}\log_5(12^2+5^2)}$

$\sqrt{(12^2+5^2)}^{\log_5 5}$

$u^{\log_5 12}+u^{\log_5 5} \geqslant u^{\log_5 13}$

$u^{\log_5 5}(\cancel{\log}\, u^{\log_5 \frac{12}{5}}+1)=u^{\log_5 13} \qquad \log_5\frac{12}{5}+\log_5 5$

$u^{\log_5 \frac{12}{5}}+1=u^{\frac{\log_5 13}{\log_5 5}} \qquad u^{\log_5\frac{12}{5}} \cancel{+1} = u^{\log_5 13}$ $\quad \frac{\sqrt{13^2-12^2}}{13}$

$u^{\log_5 12}+u^{\cancel{\log}} \geqslant u^{\log_5 13} \qquad u(u^{\log_5\frac{12}{5}}+1) \geqslant \frac{u}{u}^{\log_5 13}$

$12^x+5^x \geqslant 13^x \qquad \left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x \geqslant 1$

$\frac{12^x+5^x}{13^x} \geqslant 1 \qquad 12^x+5^x \geqslant 13^x \qquad \sqrt{12}+\sqrt{5} \geqslant \sqrt{13}$

$3.. \quad 2.. \quad \geqslant 3.$

$12^x+5^x \geqslant 13^x$

$5^x\left(\left(\frac{12}{5}\right)^x+1\right) \geqslant 13^x \qquad 12^x \cancel{-13^x+5^x} \geqslant 0$

$\left(\frac{12}{5}\right)^x+1 \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^x \qquad 12^m+5^m \geqslant 13^m$

$\left(\frac{12^x}{5^x}-\frac{13^x}{5^x}\right) \geqslant -1 \qquad \left(\frac{1}{5^x}-\frac{13^x}{12^x\cdot 5^x}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(3A)^2 + B^2 = 90$ $\quad (B+6)$

$x = A+1 \quad 6x = 6A+1$

$A = x-1$

$B + 6 - 6A - 1$ $\quad B = y-6$

$169 - 75$

$$\begin{cases} 36A^2 + B^2 = 13AB \\ 9A^2 + B^2 = 90 \end{cases}$$

$4.5 \quad 3\sqrt{5} \pm x$

$45A^2 + 2B^2 = 13AB - 90$

$B+6-6A-6$

$(1+1-x)9 - 9 + (9-6)$

$45A^2 - 13AB + 2B^2 = -90$

$9A^2 + B^2 = 90$

$12^2 + 5^2 = 13^2$

$27A^2 = 13AB - 90$

$27A^2 = 13A\,\cancel{3}\,3(10-A^2)$

$B^2 = 90 - 9A^2 ; \quad B^2 = 9(10-A^2)$

$B = \pm 3\sqrt{(10-A)^2}$

$27A^2 = 13A \cdot 3\sqrt{10-A^2}$

$27A^2 - 39A\sqrt{10-A^2} = 0 \qquad A = 0$

$27A - 39\sqrt{10-A^2} \qquad 27A = 39\sqrt{10-A^2}$

$169 + 81 = 150 \quad 81+1$

$9A = 13\sqrt{10-A^2}$

$\frac{9}{13}A = \sqrt{10-A^2}$

$\left(\frac{9}{13}\right)^2 A^2 = 10 - A^2$

$\frac{81}{169}(A^2) + A^2 = 10$

$\frac{150}{169}A^2 = 10$

$\frac{15}{169}A^2 = 0$

$B^2 + 36A^2 - 12AB = AB$

$$\begin{cases} B^2 + 36A^2 = 13AB \\ 9A^2 + B^2 = 90 \end{cases}$$

$90 - 27A^2 = 13AB$

$B^2 = 90 - 9A^2$ $\quad 9(10-A^2)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ 36A^2+B^2=13AB \quad \cdot 2 \end{cases}$$

$72A^2+2B^2=26AB$

$\cancel{63} \quad 9A^2-$

$81A^2+3B^2=90+26AB$

$$\begin{cases} 9x^2+y^2=90 \\ 36x^2+y^2=13xy \end{cases}$$

$27A^2 = 13AB-90$

$10-A^2 \geq 0$

$A^2 \leq 10$

$\log(A+B)$

$$\begin{cases} |t|^{\log_5 12} \geq t + (-t)^{\log_5 13} \\ (-t)>0 \qquad t<0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$(-t)^{\log_5 12} \geq t + (-t)^{\log_5 13}$

$(-t)^{\log_5 12} + (-t) \geq (-t)^{\log_5 13}$

$\cancel{A}^{\log_5 12} + \cancel{\log_5} \cancel{B}^{\log_5 5}$

$u^{\log_5 12} + u^{\log_5 5} \geq u^{\log_5 13}$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$(y-6x) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ B-6A = \sqrt{AB} \end{cases} \qquad y=B+6 \qquad 6x=6A+6$$

$B^2-12AB+36A^2=AB$

$$\begin{cases} B^2+36A^2=13AB \\ 9A^2+B^2=90 \end{cases}$$

$x^{\log_5 12} + x^{\log_5 5} \geq x^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq t^{\log_5(12^2+5^2)}$

$\frac{1}{2}\log_5(12^2+5^2)$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$12^x+5^x \geq 13^x \qquad \left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x \geq 0$

$(-t)^{\log_5 12} + (-t)^{\log_5 13} \geq t$

$|t|^{\log_5 12} \geq t + (-t)^{\log_5 13}$

$|-t|^{\log_5 12} \geq t + (-t)^{\log_5 13} \qquad t<0$

$-t>0 \qquad - \qquad +$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq (x^2-26x) + (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 t} \geq 5^{\log_5 t} + 13^{\log_5(-t)}$

$x(26-x) \geq 0 \qquad (-t)^{\log_5 13}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)} \qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \qquad 9^{\log_2 3} = 3^{\log_2 9}$

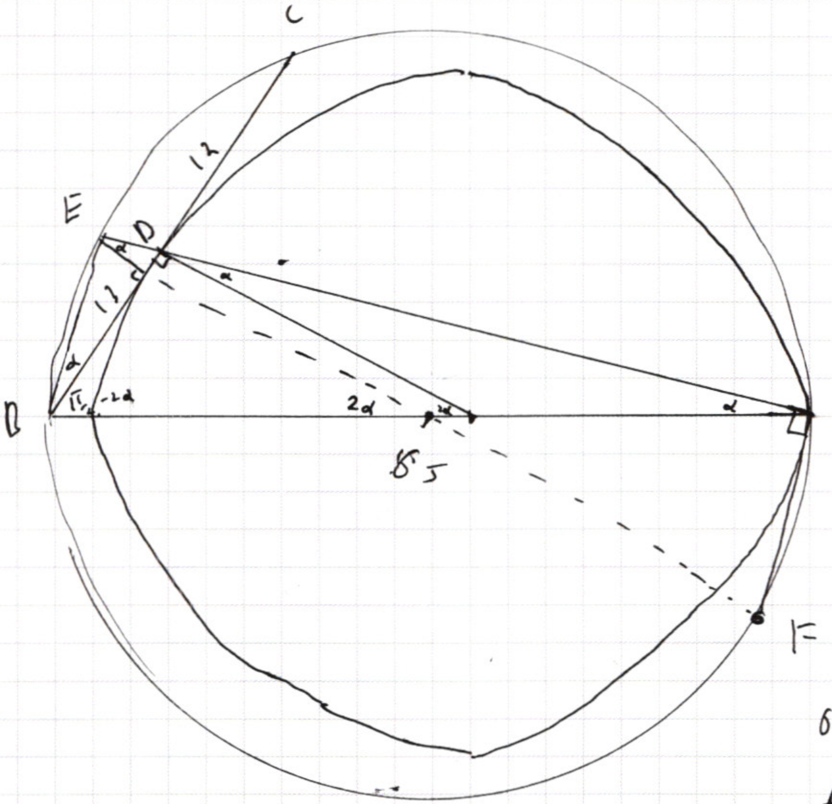
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

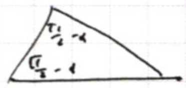
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

25 12

$$\begin{array}{r} 625 \\ +144 \\ \hline 869 \end{array}$$



$AB = 65$



$\pi - 2\alpha$

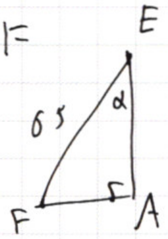
$\pi - \quad 2\alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$

$\cos 2\alpha = \frac{12}{13} = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{25}{13} = 2\cos^2\alpha$

$\frac{25}{26} = \cos^2\alpha$



$\cos\alpha = \frac{AE}{65} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$AE = \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26}}$

$AF = \frac{65}{\sqrt{26}}$

$\frac{4225}{26}$

$\frac{65 \cdot 5 + 65}{\sqrt{26}}$

$\frac{65^2 \cdot 5}{26}$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

4 − $f(2 \cdot 2)$
5 − 2
6
7 − 2
8
9
10
11 − 3
12
13 − 3
14
15
16
17 − 4
18

19 − 4
20
21
22
23 − 5
24
25
26
27
28
~~29~~

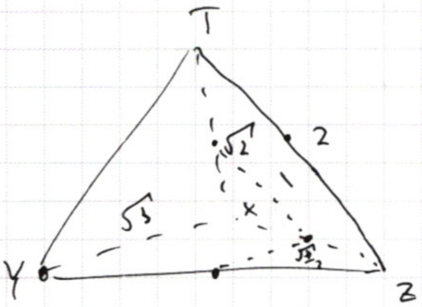
k	k(x) ~5
4	k(2) + k(2) = 2
5	2
6	k(3) + k(2) = 2
7	2
8	k(2) + k(2) + k(2) = 3
9	k(3) + k(3) = 2
10	k(5) + k(2) = 3
11	3
12	k(3) + k(4) = 3
13	3
14	k(7) + k(2) = 3
15	3
16	4
17	4
18	3
19	4
20	4
21	3
22	4
23	5
24	4
25	4
26	4
27	3
28	4
2	1
3	1

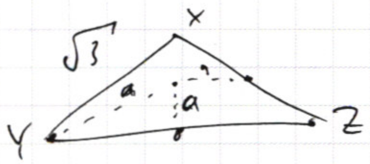
$k(x) + k(\frac{1}{y}) < 0$

$k(\frac{1}{p})$

$k(\frac{1}{y}) = \cancel{k(x)} + k(\frac{1}{y})$

~7





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

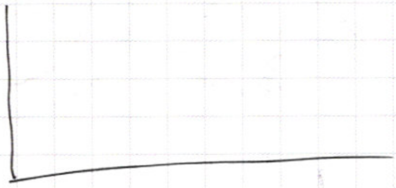
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x \geq 1$



$y = \frac{12^x + 5^x}{13^x} \geq 1$

$y' = \frac{(12^x+5^x)' 13^x - (12^x+5^x)(13^x)'}{(13^x)^2} = (12^x \ln 12 + 5^x \ln 5) 13^x$

$(12^x \ln 12 + 5^x \ln 5) 13^x - (12^x + 5^x) \ln 13 \cdot 13^x$

$13^x (\underline{12^x \ln 12 + 5^x \ln 5 - 12^x \ln 13 - 5^x \ln 13})$

$12^x(\ln 12 - \ln 13) - {}^{13^x}\, 5^x(\ln 5 - \ln 13)$ $\quad 12^x \ln \frac{12}{13} - 5^x \ln \frac{5}{13}$

$12^n \ln \frac{12}{13} - 5^n \ln \frac{5}{13} \geq 0$

$12^n \ln \frac{12}{13} \geq 5^n \ln \frac{5}{13}$ $\quad \left(\frac{12}{5}\right)^n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{\ln\left(\frac{12}{13}\right)}$

$6x - 4$ $\quad \frac{2}{3x-2}$ $\quad 8 - 6x$ $\quad \frac{-(8+6x)}{3x-2} = -1$

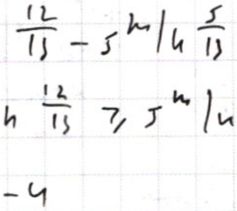
$-2(3x-2) + 4$

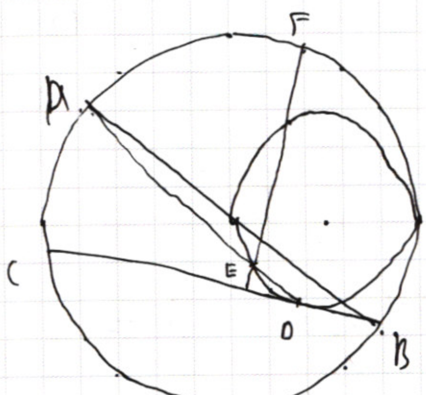
$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$ $\quad 36x - 51 = 0$

$18x^2 - 51x + 28$ $\quad \cancel{3(6x^2 - 17x +}$ $\quad 36x = 51$

$12x = 17 \quad x = \frac{17}{12}$

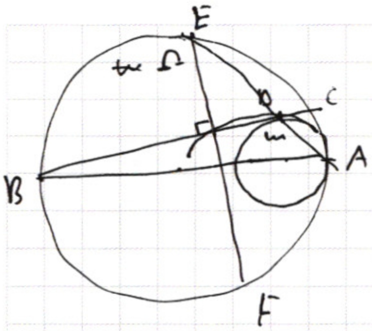
$3(x^2 - 17x) + 28$ $\quad \frac{4}{-8} \quad \frac{7}{4}$





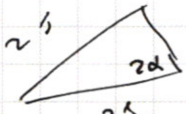
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

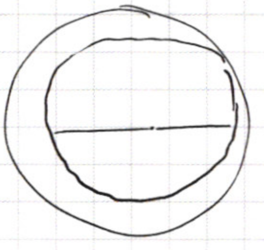


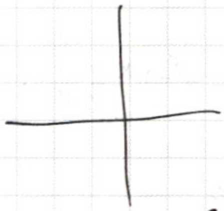
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{13}{DQ} = DQ = \frac{13}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 13 \operatorname{ctg} 2\alpha$

65



$\frac{25}{\sin 2\alpha}$





$$\begin{array}{r} 4225 \\ -\ 625 \\ \hline 2600 \end{array}$$

65^2

$(60+5)^2$

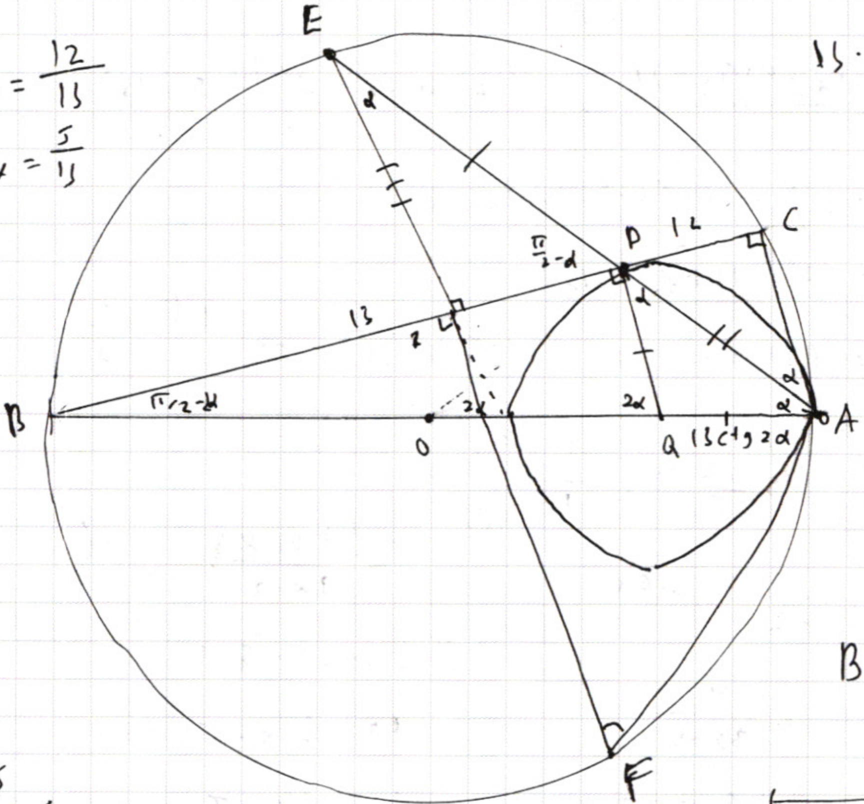
$3600 + 600$

4225

$\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$

$13 \cdot \frac{12}{5} =$



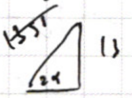
$\frac{\pi}{2} - 2\alpha + \alpha + x + \frac{\pi}{2} = \pi$

$-2\alpha + x =$

$x + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$

$x + \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\frac{13}{\sin \alpha}$

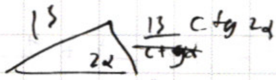


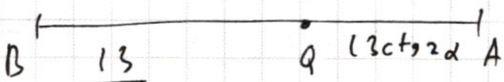
$\frac{13}{\operatorname{tg} 2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{13}{x}$

$\operatorname{ctg} 2\alpha =$

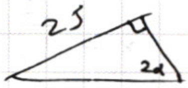
$BA =$





$\frac{13}{\sin 2\alpha}$

25



$\frac{25}{\sin 2\alpha}$

$5 \cdot 13$

65

$\frac{25}{5} \cdot 13$

$\frac{25}{\sin}$

$12 = 13\cos 2\alpha$

$\frac{25}{5} \cdot 13$

$25 = 13 + 13\cos 2\alpha$

$AB = 65$

$12 = 13\cos 2\alpha$

$\frac{12}{13} = \cos 2\alpha$

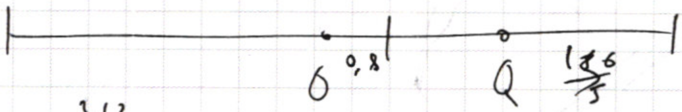
$13 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)$

$\frac{13 \cdot 12}{5}$

$\frac{624}{5}$

$(12+1)12$

$\frac{156}{5}$



300

$\frac{312}{10}$

31,2

$2 \cdot \frac{312}{5}$

$AB = 65$

~~$AO =$~~

$\frac{32}{5}$